第41卷第6期
2013年6月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol.41 No.6
Jun. 2013

文章编号：0253-374X(2013)06-0834-06

DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2013.06.006

基于转弯比例的检测器布设与流量推算惟一性

邵敏华[1]，邵显智[2]，孙立军[1]

(1.同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室，上海 201804；2.中国民航机场建设集团公司，北京 100101)

摘要：基于交叉口转弯比例列出路网流量守恒的线性方程组，其系数矩阵表示路网中路段间交通流向的逻辑关系，采用“点线变换”的方法给出这种逻辑关系的有向图表示，从而使得流量守恒方程组的系数矩阵同时也是逻辑关系有向图的邻接矩阵.在对逻辑关系有向图进行分析的基础上，采用“回路组”的概念和Taussky定理，得到了系数矩阵的秩与方程数相等的结论，证明了“封闭环”式检测器布设方案可惟一地确定路网内所有路段的流量，并进一步指出检测器布设方案并不惟一.

关键词：道路网络；检测器位置问题；封闭环；点线变换；回路组；转弯比例

中图分类号：U491　　**文献标志码**：A

Counting Sensor Location Problem Based on Turning Ratios and Uniqueness of Traffic Flow Solution

SHAO Minhua[1], *SHAO Xianzhi*[2], *SUN Lijun*[1]

(1. Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. China Airport Construction Group Corporation, Beijing 100101, China)

Abstract: The system of linear equations can be given to describe the flow conservation in the road network based on the turning ratios at intersection. The coefficient matrix of the system describes the relationship of the flow direction among links. By the point-arc exchanging from the traditional road network topology, a directed graph can be used to represent the flow-direction relationship, with the coefficient matrix of the flow conservation equations as its adjacent matrix. The coefficient matrix describes a directed graph composed by several directed-circle groups. According to the performance of directed-circle group and Taussky's theorem of nonsingular matrix judgment, the conclusion of the rank of the coefficient matrix is equal to the number of the rows is given. Based on this conclusion, the fact that the close-ring sensor location design can give the unique link flow solution over the network is proven. Finally, the fact that the design of the sensor location based on the turning ratios at intersection is not unique is discussed.

Key words: road network; sensor location problem; close ring; point-arc exchanging; directed-circle groups; turning ratios at intersection

获取路网中车流量的分布往往是了解网络交通运行状况的第一步.由于在每个路段都布设检测器来获取所有路段流量的方法耗资巨大，不具有可行性，因此如何在网络中选择检测器位置就显得至关重要.交通检测器位置问题(sensor location problem, SLP)直到2001年才由Bianco等[1]正式提出.而在此前，仅Yang[2]在1998年对面向出行需求(origin/destination, O/D)矩阵反算的流量检测器布设方法进行过讨论.Bianco所基于的流量推算方法并没有采用传统的先进行O/D反算，再将需求分配到路网上的思路，而是基于检测到的部分交叉口的出入流量，采用交叉口转出比例直接推算得到路网内所有路段的流量.在这种基于路网拓扑关系的流量推算方法下，Bianco等[3]给出了检测器布设位置与数量的充分必要条件，又在2006年进一步讨论了SLP问题的求解算法.2011年，Morrison[4]研究发现：Bianco等所提出的充分必要条件忽视了方程组系数线性相关的可能性，因此不具备充分性，仅为必要条件，并提出了更为严格的必要条件.与传统的基于O/D矩阵进行推算的方法相比较，直接利用拓扑关系进行路网流量推算的方法无需对出行者路径选择进行假设，需要的检测器更少，且如果将推算结果用于O/D反算，也会提高O/D反算的准确性[1].但是，Bianco等的方法需要建立在路网内所有路段均为双向通行的假设基础上，因此对存在单行道的路网难以适应，这极大地限制了其应用范围.我

收稿日期：2012-06-05
基金项目：国家自然科学基金(5120837)；国家“八六三”高技术研究发展计划(2012AA112402)
第一作者：邵敏华(1978—)，女，副教授，工学博士，主要研究方向为交通工程.E-mail：shaominhua@tongji.edu.cn

国学者在 SLP 领域的研究不多. 2004 年伍建国等[5]基于路段间流量的相似性，给出了检测器布设方法，但该方法仅能适用于多个路段交通量具有明显相似性的区域. 2003 年暨育雄[6]发现了交叉口转弯比例的稳定性，并给出了进行流量推算的基于交叉口转弯比例的蒙特卡罗仿真法，在此基础上，邵敏华等[7-9]于 2006 年和 2007 年提出了面向局域路网的"封闭环"式的流量检测器布设方法，并进一步指出，由于历史 O/D 矩阵获取不易，加之局域路网并不包含完整的出行路径，因此传统的基于 O/D 反算进行流量推算的方法不能适用于局域路网. 此后，耿媛婧[10]又基于"封闭环"式检测器布设方法对暨育雄提出的蒙特卡罗仿真算法进行了改进，提高了算法效率. 然而，与 Bianco 等的研究中所存在的问题一样，基于交叉口转弯比例的"封闭环"式检测器布设方法仅保证了未知数与方程数相等，其系数行向量是否线性无关尚未得到证明.

本文通过对路网拓扑关系的"点线"变换，证明了基于交叉口转弯比例的流量守恒方程组系数矩阵行向量的线性无关性，在此基础上，证明了"封闭环"式检测器布设方法可以惟一地推算得到路网内所有路段的流量，并进一步对此类流量检测器布设方法的实质进行了讨论，对"封闭环"进行了重新的诠释.

1　道路分类与流量守恒方程组

设路网由 n 条有向路段组成，以数字编号为 1，2，…，n，路段集记为 $A=\{1,2,\cdots,n\}$. 按路段与交叉口的关系可将路段分为三类：① 只出路段. 在研究路网范围内仅为某交叉口的出口路段而不是任何交叉口的进口路段，设这些路段组成集合 A_{out}. ② 进出路段. 在研究路网范围内同时为交叉口的进口路段和出口路段，称为进出路段，设这些路段组成集合 A_{io}. ③ 只进路段. 在研究路网范围内仅为某交叉口的进口路段而不是任何交叉口的出口路段，设这些路段组成集合 A_{in}.

将出口路段集合记为 $A_1=A_{\text{out}}\cup A_{\text{io}}$. 可知，$A_{\text{out}}\cup A_{\text{io}}\cup A_{\text{in}}=A_1\cup A_{\text{in}}=A$，$A_{\text{out}}\cap A_{\text{in}}=\varnothing$，$A_{\text{out}}\cap A_{\text{io}}=\varnothing$，$A_{\text{io}}\cap A_{\text{in}}=\varnothing$. 由于任何道路网络必然与外界相连通，因此以上三类路段在路网中必然同时存在.

以 a_{ij} 表示路段 j 在其下游交叉口转入路段 i 的流量比例，称为路段 j 的 i 向转弯比例，易知：$0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$，且 $\sum\limits_{i\in A_1,i\neq j} a_{ij}=1$.

取集合 A_1 中的任意路段 k，设其上游交叉口为 w，则由交叉口处的流量守恒可列出如下方程：

$$x_k=\sum_{j\in A,j\neq k} a_{kj}x_j+s_k \tag{1}$$

式中：x_j 为路段 j 的流量；s_k 为路段 k 的交通生成量，当路段 k 上不存在大的交通产生、吸引点时，$s_k=0$. 易知，当路段 j 为交叉口 w 的进口路段时，$0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$，否则，$a_{ij}=0$.

设 A_1 中共有路段 m 条，对路网 A 中的道路重新排序，A_1 中的路段先排序，即 $A_1=\{1,2,\cdots,m\}$，则对 A_1 中的每条路段均可列出如式(1)的流量守恒方程，这就形成了基于交叉口转弯比例的路网流量守恒方程组

$$\begin{aligned}
x_1&=\sum_{j\in A,j\neq 1} a_{1j}x_j+s_1\\
x_2&=\sum_{j\in A,j\neq 2} a_{2j}x_j+s_2\\
&\vdots\\
x_m&=\sum_{j\in A,j\neq m} a_{mj}x_j+s_m
\end{aligned} \tag{2}$$

2　系数矩阵与基于路网拓扑关系"点线变换"的路网交通流向逻辑关系图

在对路网中的有向路段进行重新编号后，可取 $A_{\text{in}}=\{m+1,m+2,\cdots,n\}$ 表示路网中所有交叉口的进口路段. 若将路段上的交通生成量也以 x_k 表示，并在 A_{in} 的路段后依次编号，设共有 g 个路段有交通生成量，取 $F=\{n+1,n+2,\cdots,n+g\}$，通常有 $g\ll m$. 重新编号后，流量守恒方程组的系数矩阵

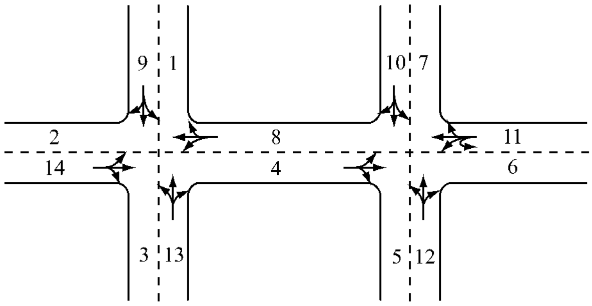
$$\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1(n+g)}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} & \cdots & A_{in} & \cdots & a_{i(n+g)}\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} & \cdots & a_{m(n+g)}
\end{pmatrix} \tag{3}$$

$\boldsymbol{C}_1$ 具有如下特征：① 当 $1\leqslant i=j\leqslant m$ 时，$a_{ij}=-1$；② 当 $i\neq j$ 且 $1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$ 时，$0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$，且 $\sum\limits_{i\in A_1,i\neq j} a_{ij}=1$；③ 当 $j>n$ 时，交通生成量 $x_j>0$ 在路段 i 上，$a_{ij}=1$，否则 $a_{ij}=0$.

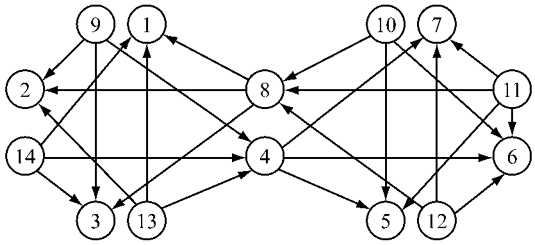
系数矩阵 $\boldsymbol{C}_1$ 实际上给出了路网内路段间交通流向的逻辑关系. 现以 $\boldsymbol{C}_1$ 中的 a_{ij} 构建有向图 $G'(N',A')$. 与传统路网拓扑关系有向图不同，G' 将

路网中有向路段表示为节点,而将交叉口分解为表示交通流向的有向连线.路网中的有向路段集对应G'中的节点集N',$N'=\{1,2,\cdots,n\}$,A'为有向连线集合,$a_{ij}>0$对应G'中的连线(j,i).

图1给出了一个由两个交叉口组成的路网的拓扑关系变换结果.



a 原路网拓扑关系



b 变换后的逻辑关系

图1 路网拓扑关系的"点线"变换

Fig.1 Point-arc exchanging from the road network topology

由上述有向图构建过程可知,$a_{ij}>0$表明在G'中存在有向连线(j,i),而$a_{ij}=0$则表明节点j,i不相邻,即有向连线(j,i)不存在.$\boldsymbol{C}_1$在不考虑对角元素时(现实路网中不存在连接同一路段的交叉口),可用于表示G'的拓扑关系,因此可用作G'的邻接矩阵.

3 路网流量守恒方程组系数矩阵的秩

取$\boldsymbol{C}_1$前m列,形成$m\times m$的方阵

$$\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad (4)$$

易知:如矩阵的秩$R(\boldsymbol{C}_2)=m$,则$R(\boldsymbol{C}_1)=m$.$R(\boldsymbol{C}_2)=m$等价于$|D(\boldsymbol{C}_2)|>0$,$D(\boldsymbol{C}_2)$为$\boldsymbol{C}_2$对应行列式的值.设$\boldsymbol{C}_2$对应于图$G''(N'',A'')$,有$G''\subset G'$.

命题1:如果G''中的有向连线$(j,i)(i\neq j)$不属于有向图中的任何回路,那么其对应的属性值a_{ij}不影响$D(\boldsymbol{C}_2)$的取值.

根据行列式展开式的定义,有

$$D(\boldsymbol{C}_2)=\sum(-1)^t a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_m m} \quad (5)$$

式中:$p_1,p_2,\cdots,p_m\in\{1,2,\cdots,m\}$,且互不相等,$t$为$p_1,p_2,\cdots,p_m$的逆序数.有:①当对于任意$k\in\{1,2,\cdots,m\}$,都有$p_k=k$时,$t=0$,$a_{p_k k}=-1$,对应项值为$(-1)^m$.②当存在$p_k\neq k$时,只要存在$k\in\{1,2,\cdots,m\}$使得$a_{p_k k}=0$,则$a_{p_j j}$所在项的值一定为零.

由此可知,如果a_{ij}所在的所有项都至少存在一个$a_{p_k k}=0$,则即使$a_{ij}>0$,其所在项的值也一定为零,即a_{ij}不会影响$D(\boldsymbol{C}_2)$的取值.

现任取式(5)中的任意非零项,且该项中存在$p_k=l$,$l\neq k$,由于该项为非零项,一定有$a_{lk}>0$,同时,在该项中也一定存在$a_{il}>0$,且$i\neq l$,同理,也一定存在$a_{kt}>0$,$t\neq k$.根据第2节的论述,上述结果可表达为:对于式(5)非零项中的任意$p_k=l$,$l\neq k$,G''中一定存在有向连线(k,l)与之对应,并且也一定存在(k,l)的上游连线(t,k)和下游连线(l,i),分别对应于该非零项中的a_{kt}和a_{il}项.将该项中的所有$a_{p_k k}>0$的项所对应的有向连线组成的集合记为$P=\{(k,p_k)|a_{p_k k}>0,k=1,2,\cdots,m\}$,则由上述分析可知,对于$P$中的任意连线$(k,p_k)$,集合中一定存在它的上游连线和下游连线,由于没有任何两条连线有共同的起始点或者共同的终止点,因此每一个连线有且仅有一个上游连线和一个下游连线,即P必然对应于G''中的若干条路,且每条路均不存在起始点和终止点,即P对应于G''中的若干条回路,其中所有的连线必然存在于某一条回路中.

由此,证明了在$D(\boldsymbol{C}_2)$展开式的任意非零项中,所有的$a_{ij}>0(i,j=1,2,\cdots,m,i\neq j)$对应的$G'$中的有向连线$(j,i)$都必然处于某一回路中.其逆否命题即为命题1,故命题1成立.

3.1 G''中回路组的定义与矩阵变换

设G''中由不属于任何回路的节点y所组成的节点集合为Y,包含n_y个节点.可知,所有以$y\in Y$为起始点或终止点的连线均不属于任何回路(反证法易证),即:a_{iy},$i\in\{1,2,\cdots,m\}$,$i\neq y$与a_{yj},$j\in\{1,2,\cdots,m\}$,$j\neq y$必然不影响$D(\boldsymbol{C}_2)$的取值.不妨取$a_{iy}=0$,$i\in\{1,2,\cdots,m\}$,$i\neq y$,$a_{yj}=0$,$j\in\{1,2,\cdots,m\}$,$j\neq y$,并再对$\boldsymbol{C}_2$进行若干次行和列的位置变换(相当于对节点进行重新编号),使得Y中节点对应的列位于矩阵的最后n_y列,且对角元素值仍为-1.重新赋值和变换后,取$m_1=m-n_y$,得到新的矩阵

$$\boldsymbol{C}_3=\begin{pmatrix} \overbrace{a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1m_1}}^{m-n_y} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} \cdots a_{ij} \cdots a_{im_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1 1} \cdots a_{m_1 j} \cdots a_{m_1 m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 & -1 & & 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & & \ddots & \\ 0 \cdots 0 \cdots 0 & \underbrace{0} & \underbrace{} & \underbrace{-1}_{n_y} \end{pmatrix} \tag{6}$$

有$|D(\boldsymbol{C}_3)|=|D(\boldsymbol{C}_2)|$.令

$$\boldsymbol{C}_4=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{im_1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m_1 1} & \cdots & a_{m_1 j} & \cdots & a_{m_1 m_1} \end{pmatrix} \tag{7}$$

则有$|D(\boldsymbol{C}_3)|=|D(\boldsymbol{C}_4)(-1)^{n_y}|=|D(\boldsymbol{C}_4)|$.设$\boldsymbol{C}_4$对应有向图$G^{(3)}$,$G^{(3)}\subset G''$.可知,$G^{(3)}$中所有的节点和连线均处于某一回路中,即$G^{(3)}$由若干条回路组成.设$G^{(3)}$内共有回路$r$条,所有回路构成集合$C_R=\{c_1,c_2,\cdots c_k,\cdots,c_r\}$,其中$c_k$为$G^{(3)}$中的一条回路.由回路定义可知,$c_k$上的任意两个节点$v,w\in c_k$间必然是双向连通的.

现对回路间的连通关系给出定义,对于回路c_i的任意节点$v\in c_i$与c_j的任意节点$w\in c_j$:① 如果$G^{(3)}$中既存在$v\rightarrow w$的路径,也存在$w\rightarrow v$的路径,则称回路c_i与c_j是双向连通的,记作$c_i\rightleftharpoons c_j$.② 如果$G^{(3)}$中只存在$v\rightarrow w$的路径,不存在$w\rightarrow v$的路径,则称回路$c_i$至$c_j$是单向连通的,记作$c_i\rightarrow c_j$.③如果$G^{(3)}$中既不存在$v\rightarrow w$的路径,也不存在$w\rightarrow v$的路径,则称回路$c_i$与$c_j$是不连通的,记作$c_i\infty c_j$.

命题 2:$G^{(3)}$的回路集合C_R中,任何两个回路间都不存在单向连通关系.

采用反证法给出命题 2 的证明.设在C_R中存在$c_i\rightarrow c_j$的单向连通关系,则一定存在至少一条连接节点$v\in c_i$与$w\in c_j$且$w\notin c_i$的路径,记为R_{vw},则组成R_{vw}的有向连线中至少有一条不属于任何回路的连线(k,l),这是因为:如果R_{vw}的任意连线都属于某一回路,则所有连线的起终点必是双向连通的,由此可知,如果R_{vw}存在,则R_{wv}也一定存在,这与$c_i\rightarrow c_j$的单向连通关系不符.而$G^{(3)}$中的所有连线都一定属于某一回路,因此(k,l)不存在,故C_R中不存在具有单向连通关系的回路,命题 2 证毕.

命题 3:双向连通关系具有传递性,即如$c_i\rightleftharpoons c_j$,$c_j\rightleftharpoons c_k$,则一定有$c_i\rightleftharpoons c_k$.

证明如下:如节点$v\in c_i$,$w\in c_j$,因$c_i\rightleftharpoons c_j$,一定存在路径$R_{vw}$和$R_{wv}$,同理,对于节点$u\in c_k$,因$c_j\rightleftharpoons c_k$,一定存在路径$R_{wu}$和$R_{uw}$,由此,也一定存在路径$R_{vu}=R_{vw}+R_{wu}$(将$R_{vw}$与$R_{wu}$在节点$w$相接)和$R_{uv}=R_{uw}+R_{wv}$(将$R_{uw}$与$R_{wv}$在节点$w$相接),这就证明了$c_i\rightleftharpoons c_k$.

由命题 3 可知,如$c_i\infty c_j$,则对于任意与c_k满足$c_k\rightleftharpoons c_i$和任意$c_l$满足$c_l\rightleftharpoons c_j$,一定有$c_k\infty c_l$.可据此对$C_R$中的回路进行分组,给出回路组的定义如下:

彼此双向连通的回路组成回路组,回路组内任意两个回路间都是双向连通的,分属两个回路组的回路间一定是不连通的.

可知:同一回路组内任意两个节点间也是双向连通的,分属两个不同回路组的节点间一定是不连通的,同一节点不可能同时分属两个回路组.

设$G^{(3)}$中共有N_g个回路组,以H_I表示其中的第I个回路组,$I\in\{1,\cdots,N_g\}$,则H_I亦为有向图.设H_I的节点数为n_I,则有$\sum\limits_{I=1}^{N_g}n_I=m_1$.在按照节点所在的回路组对节点进行重新排序(相当于对矩阵$\boldsymbol{C}_4$变换数次行与列的位置)后,H_I对应有向图的邻接关系可以用$n_I\times n_I$的矩阵$\boldsymbol{C}_{II}$表示,前$(I-1)$个回路组包含节点总数为记为$h_{I-1}=\sum\limits_{K=1}^{I-1}n_K$,则

$$\boldsymbol{C}_{II}=\begin{pmatrix} a_{(h_{I-1}+1)(h_{I-1}+1)} & \cdots & a_{(h_{I-1}+1)(h_{I-1}+j)} & \cdots & a_{(h_{I-1}+1)(h_{I-1}+n_I)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(h_{I-1}+i)(h_{I-1}+1)} & \cdots & a_{(h_{I-1}+i)(h_{I-1}+j)} & \cdots & a_{(h_{I-1}+i)(h_{I-1}+n_I)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{(h_{I-1}+n_I)(h_{I-1}+1)} & \cdots & a_{(h_{I-1}+n_I)(h_{I-1}+j)} & \cdots & a_{(h_{I-1}+n_I)(h_{I-1}+n_I)} \end{pmatrix} \tag{8}$$

同样,当$i=j$时,$a_{(h_{I-1}+i)(h_{I-1}+j)}=-1$,当$i\neq j$时,$0\leqslant a_{(h_{I-1}+i)(h_{I-1}+j)}\leqslant 1$且$\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n_I}a_{(h_{I-1}+i)(h_{I-1}+j)}\leqslant 1$,当且仅当节点$j$在$G'$中的所有连线所对应的矩阵元素都包含在$\boldsymbol{C}_{II}$中时,$\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n_I}a_{(h_{I-1}+i)(h_{I-1}+j)}=1$.

而两个回路组 H_I 与 H_J 间的节点邻接关系，用矩阵 $\boldsymbol{C}_{IJ}$ 和 $\boldsymbol{C}_{JI}$ 表示，由于分属两个不同回路组的节点间一定是不连通的，因此 $\boldsymbol{C}_{IJ}$ 为 $n_J\times n_I$ 的零矩阵，$\boldsymbol{C}_{JI}$ 为 $n_I\times n_J$ 的零矩阵.

$\boldsymbol{C}_4$ 经上述变换后，可得到矩阵

$$\boldsymbol{C}_5=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1I} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1N_g}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{I1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{II} & \cdots & \boldsymbol{C}_{IN_g}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{N_g1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{N_gI} & \cdots & \boldsymbol{C}_{N_gN_g}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \boldsymbol{C}_{II} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \boldsymbol{C}_{N_gN_g}\end{pmatrix}\tag{9}$$

因为 $\boldsymbol{C}_5$ 系由 $\boldsymbol{C}_4$ 经过若干次行交换和列交换得到，因此 $|D(\boldsymbol{C}_5)|=|D(\boldsymbol{C}_4)|$，且 $\boldsymbol{C}_5$ 中，仅对角方阵 $\boldsymbol{C}_{II}$ 中存在非零元素，所以 $D(\boldsymbol{C}_5)=\prod_{I=1}^{N_g}D(\boldsymbol{C}_{II})$.

3.2 路网流量守恒方程组系数矩阵秩的计算

现在来证明 $|D(\boldsymbol{C}_{II})|>0$. 根据 Taussky 的矩阵非奇异判别定理，主对角占优(至少一列绝对占优)、不可约复矩阵为非奇异矩阵，定理对于对角元素为正的实矩阵同样成立[11-12].

将 $\boldsymbol{C}_{II}$ 中所有元素乘以 -1 不改变 $|D(\boldsymbol{C}_{II})|$ 的值. 由式(8)可知，一定有：$|-a_{(h_{I-1}+j)(h_{I-1}+j)}|\geqslant\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n_I}|-a_{(h_{I-1}+i)(h_{I-1}+j)}|$ 成立. 又由于 $\boldsymbol{C}_{II}$ 所对应的网络回路组(有向图) H_I 一定与外界路网存在流量交换，这就使得 H_I 中必然至少存在一个节点 k，其下游节点 $l\notin H_I$，即 $a_{lk}>0$ 不在 $\boldsymbol{C}_{II}$ 中，故 $\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n_I}|-a_{(h_{I-1}+i)(h_{I-1}+k)}|<1$ 成立. 因此，$\boldsymbol{C}_{II}$ 满足对角占优条件. 由于 H_I 内任意两个节点间都是双向联通的，因此 H_I 必为强连通图，其邻接矩阵 $\boldsymbol{C}_{II}$ 必为不可约矩阵. 因此，$\boldsymbol{C}_{II}$ 为非奇异矩阵，有 $D(\boldsymbol{C}_{II})\neq0$.

至此有：$|D(\boldsymbol{C}_2)|=|D(\boldsymbol{C}_5)|=|\prod_{I=1}^{N_g}D(\boldsymbol{C}_{II})|>0$，$R(\boldsymbol{C}_1)=R(\boldsymbol{C}_2)=m$. 这就证明了流量守恒方程组的系数矩阵的行向量线性无关.

4 面向路网流量推算的“封闭环”检测器布设方法

4.1 解惟一性证明

只对路网只进路段进行检测的“封闭环”式的流量检测器布置形式如图2所示[7-8]，可以证明在这一检测方式下，路网流量守恒方程组的方程数一定与未知数数目相同[9].

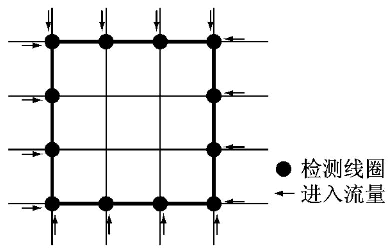


图2 “封闭环”式交叉口流量检测器布设方案

Fig.2 Closing-ring sensor location design

本节证明这一检测器布设方式可以获得路网内所有路段流量的惟一解.

由前述，局域路网的流量守恒方程组可列为

$$\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{X}=0\tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{C}_1$ 为 $m\times n$ 系数矩阵，由式(3)给出，当路网内不存在大的交通生成量，故 $g=0$. $\boldsymbol{X}$ 为 n 维路段流量向量，即

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)'\tag{11}$$

当 $i\leqslant m$ 时，路段 $i\in A_1$；当 $m<i\leqslant n$ 时，路段 $i\in A_{\rm in}$，即为只进路段，在“封闭环”式检测器布设方案中即为检测路段，设其检测流量值为 b_i，则可列出进行流量推算的线性方程组如下：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}'\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\tag{12}$$

式中：$\boldsymbol{C}'$ 为 $\boldsymbol{C}_1$ 的后 $(n-m)$ 个列向量组成的矩阵；$\boldsymbol{E}$ 为 $(n-m)$ 阶单位矩阵；$\boldsymbol{B}$ 为检测流量向量，$\boldsymbol{B}=(b_{m+1},\cdots,b_n)$.

易知，线性方程组(12)的系数行列式等于 $D(\boldsymbol{C}_2)D(\boldsymbol{E})=D(\boldsymbol{C}_2)$，因 $D(\boldsymbol{C}_2)\neq0$，故线性方程组(12)的系数行列式不等于零，由克莱姆法则可知，线性方程组(12)有惟一解.

而当考虑路网内的交通生成量时，设共有 g 个路段有交通生成量，相当于方程组(12)增加了 g 个

未知数，这时只要增加 g 个检测路段，并确保方程组的系数行列式非零即可. 事实上，可以将进入路段 j 的交通生成量抽象成路网中的一条路段 k，$k\in F$，则该路段必为只进路段($F\subset A_{in}$)，且只有 j 一个流向，转弯比例为 1，与路网中的其他路段不同的是，其流量值可以为负值. 只要增加对集合 F 内的所有路段的流量检测，就一定可以确保方程组系数行列式非零.

4.2　虚拟“封闭环”

由 4.1 节可知，“封闭环”式检测器布设方案就是对路网内的所有只进路段进行检测，方案可以得到路网内所有路段流量的惟一解. 然而，这一检测器布设方案却不是惟一的. 以图 1 的路网为例，给定路段的转弯比例值，如图 3 所示，每个进口路段旁按空间顺序标注了转弯比例取值. 设网络内没有交通生成量.

根据“封闭环”布设方案，取检测路段集为{9，10，11，12，13，14}，检测流量向量为 $\boldsymbol{B}=(10,10,10,10,10,10)$，求解线性方程组(12)，可得路段流量向量 $\boldsymbol{X}=(9.6,8.8,9.6,12,10.4,12.2,9.4,8,10,10,10,10,10,10)$.

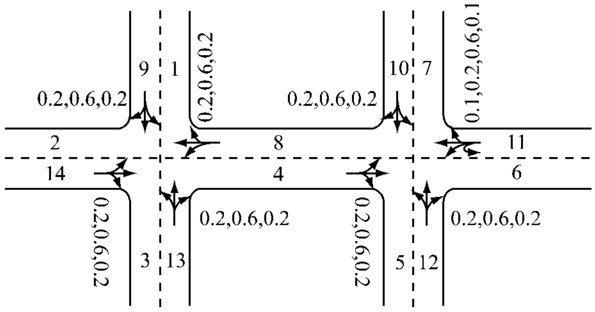


图 3　路网示例

Fig.3　Road network example

如将检测路段集改为{4，9，10，11，12，14}，检测流量向量为 $\boldsymbol{B}=(12,10,10,10,10,10)$，则同样可以得到相同的路段流量向量 $\boldsymbol{X}$.

只要对与集合 A_{in} 所含元素($F\subset A_{in}$)数目相同的路段数进行检测，且确保方程组系数行列式不为零，基于交叉口转弯比例的流量推算方程组就一定有惟一解. 由此可见，检测器布置方案并不仅有“封闭环”一种，但检测路段的最小数量是惟一的，即 A_{in}($F\subset A_{in}$)所包含的只进路段数. 由于检测路段数相同，可将能够求得网络路段流量惟一解的所有检测方案都看作虚拟的“封闭环”，虚拟“封闭环”并不一定封闭.

值得一提的是，由于本文在推导过程中，未对路网拓扑关系作任何假设，因此可适用于包含单行、禁左等各种情况的路网.

5　结论

本文研究的基于交叉口转弯比例的流量推算方法是一种基于路网拓扑关系的方法. 首先采用“点线变换”给出了路段间交通流向逻辑关系的有向图表示，并说明了基于转弯比例的路网流量守恒方程组的系数矩阵可以用作交通流向逻辑关系图的邻接矩阵. 而后，将图与系数矩阵相结合，提出了“回路组”的概念，并通过对系数矩阵的元素调整和若干次行、列变换，最终采用 Taussky 的矩阵非奇异判别定理证明了路网流量守恒方程组系数矩阵的非奇异性. 最后，指出了“封闭环”式流量检测器布设方案实质就是对路网中的所有“只进路段”(含代表交通生成量的路段)进行检测，进一步证明了该方案可以惟一确定路网内所有路段的流量，并指出检测器布设方案并不惟一：只要对与“只进路段”集元素数目相同的路段集合进行检测，且确保流量推算线性方程组系数行列式不为零，路网内的路段流量就一定有惟一解. 所有符合条件的方案都可看作虚拟的“封闭环”，但虚拟“封闭环”并不一定封闭.

并不是所有与“只进路段”数目相同的路段集都可构成虚拟“封闭环”，事实上，有很多路段集都会使得方程组系数行列式为零. 同时，在实际工作中，人们通常会将检测器布设在重要的路段和交叉口，以便对这些路段进行详细的交通分析，这有时也会带来检测器的冗余. 综合考虑这些因素的检测器布设方法和有检测器冗余时的流量推算方法笔者将另文论述.

参考文献：

[1] Bianco L, Confessore G, Reverberi P. A network based model for traffic sensor location with implications on O/D matrix estimates[J]. Transportation Science, 2001,35(1):50.

[2] Yang H. Optimal traffic counting locations for origin-destination matrix estimation[J]. Transportation Research Part B:Methodological,1998,32(2):109.

[3] Bianco L, Confessore G, Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem [J]. Annals of Operations Research, 2006,144(1):201.

[4] Morrison D R. Characteristics of optimal solutions to the sensor location problem[R]. Clarement: Department of Mathematics of Harvey Mudd College, 2011.

(下转第 909 页)