

一种分析二维任意分布多裂纹的求解方法

许 强, 杨冬升

(同济大学 建筑工程系, 上海 200092)

摘要: 基于虚边界元最小二乘法求解多域组合问题的基本思想, 将每一裂纹视为一对子域; 并且借鉴了边界型无网格法中紧支径向基函数插值的基本思想, 在每一子域的虚边界上近似构造虚拟源函数. 建立了用于分析二维多裂纹问题的一种虚边界无网格最小二乘的计算格式. 依据子域定义, 在计算过程中无需像边界元直接法中“常规子域法”那样在裂纹面的延伸边界上额外增添附加子域, 从而减少了计算量, 尤其避免了由附加子域所引起的因划分单元数或配点数不足或不当而带来的计算误差. 为数值论证该方法的可行性和计算精度, 以及讨论任意分布多裂纹间的相互影响, 分别给出了单向受拉无限大板的中心裂纹、三等长共线且相邻间距不同的裂纹算例; 由数值比较可知该方法具有较高的计算精度.

关键词: 虚边界; 无网格; 径向基函数; 应力强度因子; 多裂纹

中图分类号: O346.1

文献标志码: A

A Numerical Algorithm for Solving Two-dimensional Arbitrary Distribution of Multiple Cracks

XU Qiang, YANG Dongsheng

(Department of Building Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The study is based on the basic idea to solve multi-domain combinations with virtual boundary element least square method, namely, each crack can be treated as a pair of sub-domains, and the basic idea to resort to the interpolation of the compactly supported radial basis function commonly used in boundary-type meshless methods. This virtual source function is constructed approximately on the virtual boundary corresponding to each sub-domain. The computational scheme with the virtual boundary meshless least squares to analyze two-dimensional multi-crack problems is established. According to the definition about sub-domain in this paper, the

added extra sub-domains on the boundary extended along the crack surface as “conventional sub-domain method” in the direct boundary element method can be neglected, thereby reducing the amount of computation. Especially, the calculation error due to inadequate number of elements or the lack of collocation points configured on the boundary of the additional sub-domains and the improper configuration is avoided. Finally, some examples, such as a single center crack, third-adjacent spacing of different length collinear cracks, are given to verify the feasibility and accuracy of the proposed numerical algorithm and the interaction between multiple cracks with arbitrary distribution is revealed. The results prove the method to be superior to other methods in terms of its accuracy.

Key words: virtual boundary; meshless; radial basis function; stress intensity factor; multi-crack

在实际工程中常用应力强度因子来定量估算具有缺陷结构的断裂强度, 而工程结构的断裂力学分析也往往依据应力强度因子这一参量来评估^[1]. 据笔者所知, 至今用于计算应力强度因子的方法至少有 20 余种, 如 Westergaard 法、变量函数法、边界配点法、格林函数法及边界元法等, 其中较多方法还只限于用来分析规则的、简单的裂纹问题. 而对分析具有任意方向的多分布缺陷的复杂裂纹问题, 其成熟的、通用的数值算法还不多见. 由此可知, 正确分析任意分布的多裂纹问题和考察相邻裂纹间的相互影响, 在断裂力学的研究领域中仍是人们关注的议题.

多裂纹普遍存在于混凝土^[2]、钢结构^[3]、岩体^[4]、复合材料^[5]等实际工程结构中. 描述裂纹问题的基本方程建立容易但精确求解则较困难, 尤其多裂纹问题; 利用解析法和近似简化的方法所能计算的问题是极其少的, 对稍微复杂的问题必须借助于数值分析方法. 应用常规有限元法分析裂纹时, 一般

需要在裂纹所在区域细分网格^[6],这不但增加了计算量,而且单元剖分不当其计算结果的精度也未必令人满意.近十年来,人们依据广义有限元的思想来分析裂纹问题,如在裂纹附近利用单位分解跳跃函数作为基函数^[7],这种广义有限元法无需网格划分,仅需要背景网格以用于相应的积分计算.该方法具有边界型无网格法的特征,适于分析某场函数在局部域内急剧变化的问题.边界元直接法能数值分析函数变化梯度大的问题,当然也能较好地计算应力集中问题.但边界元直接法仍存在自身不足,如奇异积分的处理、边界层效应、角点问题及系数阵为满阵等所带来的计算效率和计算精度的影响.而本文作者许强等^[8]所提出的多域组合问题虚边界元最小二乘法思想则能克服边界元直接法中的上述不足,因虚、实边界不重合避免了积分的奇异性,虚拟边界的构形具有一定的任选性,使得可在光滑的虚拟边界上人为构造具有高阶连续性质的虚拟源函数,从而使边界元直接法中的边界层效应和角点问题在虚边界元中均不存在;此外,所形成的系数矩阵具有对称和相对稀疏的性质.

与传统虚边界元法不同^[8],文献^[8]中对每一子域的虚拟边界上虚拟源函数的构造是借鉴了边界型无网格法中径向基函数插值的基本思想.在具体计算实施中,将每一裂纹视为一对子域,即依据裂纹的每一边界人为勾画出一个子域,建立用于分析二维多裂纹问题的虚边界无网格最小二乘数值计算格式.从理论上说,每一子域构形的形状及大小对解的结果不会产生影响.依据文中的子域定义,在相邻的裂纹间无需额外添加“多域连续边界^[9]”,从而减少了计算量,尤其避免了由附加子域所引起的因划分单元数或配点数不足或不当而带来的计算误差.

1 紧支径向基函数和应力强度因子

1.1 紧支径向基函数

设 $u(x)$ 是求解域 Ω 内的一个标量函数,而 $u^h(x)$ 是 $u(x)$ 的近似函数.在径向点插值中,含有附加多项式的 $u^h(x)$ 的函数插值可表述为如下形式^[10]:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x) b_j = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{a} + \mathbf{p}^T(x) \mathbf{b} \quad (1)$$

式中: $R_i(x)$ 是径向基函数, n 是当前计算点 x 的定义域 d 内径向基函数的项数; $p_j(x)$ 是二维多项式的基函数, m 是多项式基函数的项数.系数 a_i 和 b_j

均为待定参数.而 $\mathbf{R}(x) = \{R_1(x) \ R_2(x) \ \cdots \ R_n(x)\}^T$, $\mathbf{p}(x) = \{p_1(x) \ p_2(x) \ \cdots \ p_m(x)\}^T$, $\mathbf{a} = \{a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n\}^T$, $\mathbf{b} = \{b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m\}^T$.

为了确定方程(1)中的 a_i 和 b_j , 形成一个围绕计算点 x 且含有 n 个场节点的支撑域,让方程(1)在这 n 个节点处满足真实解.于是对 $I=1, 2, \dots, n$, 有:

$$\sum_{i=1}^n R_i(x_I) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x_I) b_j = u_s(x_I) \quad (2)$$

$$\sum_{I=1}^n p_j(x_I) a_I = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

方程(3)是由 $p_j(x_I)$ ($I=1, 2, \dots, n$) 与 \mathbf{a} 的正交性而生成的 m 个约束条件,其与方程(2)联立可求解所有待定系数 a_i 和 b_j . 方程(2)和(3)联立方程组的矩阵表示为

$$\mathbf{B} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

其中, \mathbf{u}_s 为节点已知物理量, \mathbf{B} 的具体表达可见文献^[10].将方程(4)改写为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s \\ 0 \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}_s \quad (5)$$

其中, $\bar{\mathbf{B}}$ 含 \mathbf{B}^{-1} 中的前 n 列元素.将方程(5)代入式(1),可得:

$$u^h(x) = \{\mathbf{R}^T(x) \ \mathbf{p}^T(x)\} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{u}_s = \mathbf{N}^T(x) \mathbf{u}_s = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i \quad (6)$$

式中, $\mathbf{N}(x)$ 为径向点插值法的形函数矩阵.

在本文中,为了进一步提高方法的计算精度和计算效率,将采用上述的径向点插值思想来近似构造虚拟源函数 $\varphi_k(\xi)$ ($k=1, 2$),以适应断裂力学问题的求解.其中,对径向基函数 $R_i(x)$ 选用具有紧支性质的三次样条函数,即

$$R_i(x) = \begin{cases} 2/3 - 4r^2 + 4r^3 & r \leq 1/2 \\ 4/3 - 4r + 4r^2 - 4r^3/3 & 1/2 \leq r < 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases} \quad (7)$$

这里 $r = \|x - x_i\|/d_i$, d_i 是关于节点 x_i 的定义域半径.

1.2 应力强度因子

在给定的平面直角坐标系下,对含 I、II 型的复合裂纹问题,由文献^[9]可知其裂纹尖端点 \tilde{x} (如图 1)处沿 x_1 、 x_2 方向的位移 u_1 、 u_2 可分别表示为

$$u_1 = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2\pi}} \cos \frac{\tilde{\theta}}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) +$$

$$\frac{K_{\parallel}}{2G} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2\pi}} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \left(\kappa + 1 + 2\cos^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \quad (8)$$

$$u_2 = \frac{K_{\perp}}{2G} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2\pi}} \sin \frac{\tilde{\theta}}{2} \left(\kappa + 1 - 2\cos^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) + \frac{K_{\parallel}}{2G} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2\pi}} \cos \frac{\tilde{\theta}}{2} \left(-\kappa + 1 + 2\sin^2 \frac{\tilde{\theta}}{2} \right) \quad (9)$$

式(8)–(9)中: K_{\perp} 、 K_{\parallel} 分别对应于 I、II 断裂模型的应力强度因子; 而 \tilde{r} 是计算点 x 到裂尖端点 \tilde{x} 的距离; $\tilde{\theta}$ 是径向矢量 \tilde{r} 与 x_1 轴的夹角. 此外, $G = E/2(1+\nu)$, 且对于平面应变问题, 有 $\kappa = 3-4\nu$; 对于平面应力问题, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$.

由式(8)–(9)可知, 当 $\tilde{\theta}$ 以逆时针转 π 时, 裂尖端点 \tilde{x} 处沿 x_1 、 x_2 方向的位移分别记为

$$\begin{cases} u_{1+} = \frac{K_{\parallel}}{2G} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2\pi}} (\kappa + 1) \\ u_{2+} = \frac{K_{\perp}}{2G} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2\pi}} (\kappa + 1) \end{cases} \quad (10)$$

而当 $\tilde{\theta}$ 以顺时针转 π 时, 则对应的位移有:

$$\begin{cases} u_{1-} = -\frac{K_{\parallel}}{2G} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2\pi}} (\kappa + 1) \\ u_{2-} = -\frac{K_{\perp}}{2G} \sqrt{\frac{\tilde{r}}{2\pi}} (\kappa + 1) \end{cases} \quad (11)$$

再由式(10)–(11), 可联立解得 K_{\perp} 、 K_{\parallel} , 即 I 型和 II 型裂纹的应力强度因子位移外推计算式分别如下:

$$K_{\perp} = \frac{(u_{2+} - u_{2-})G}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{\tilde{r}}} \quad (12)$$

$$K_{\parallel} = \frac{(u_{1+} - u_{1-})G}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{\tilde{r}}} \quad (13)$$

为便于比较受不同载荷和不同几何尺度下的裂纹应力强度因子 K , 引入量纲一应力强度因子 F , 其一般式^[11]为 $F = K/(\sigma \sqrt{\pi a})$, 其中: F 为量纲一应力强度因子或归一化应力强度因子或边界修正因子; σ 为泛指应力, 对 I 型裂纹为拉应力, II 型裂纹为面内切应力, III 型裂纹为面外切应力; a 为裂纹半长.

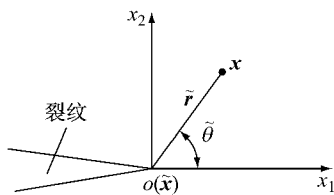


图1 裂纹尖端位移的局部坐标描述

Fig.1 Local coordinate description of the crack tip displacement

2 虚边界无网格最小二乘法

在文献[8]中已经给出求解多域组合问题的虚边界元最小二乘法的数值思想及其计算格式; 这里, 对其仅作简要概述. 将所求问题的整体域 Ω 视为由 n 个子域 $\Omega_l (l=1, 2, \dots, n)$ 的组合体, 且要求 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \dots \cup \Omega_n$ 和 $\Omega_1 \cap \Omega_2 \dots \cap \Omega_n = \emptyset$ (空集), 如图2所示. 设 Γ 为整体域 Ω 的边界, Γ_l 为当前子域 Ω_l 的边界. 当 $\Gamma_l \cap \Gamma$ 为非空集时, 其对应边界部分称为该子域 Ω_l 的外部边界, 反之称为子域 Ω_l 的内部边界且记为 Γ_{ls} ; 故有 $\Gamma_l = \Gamma_l \cap \Gamma + \sum \Gamma_{ls}$, 而 Γ_{ls} 是相邻子域 Ω_l 与 Ω_s 的公共边界, 亦称为相邻子域的结合面. 多域组合问题的求解思想与单域问题的基本一致, 不同的是在数学建模时需要考虑相邻子域间的“连续性条件”, 如位移连续、面力连续. 当然, 若子域个数 $n=1$, 多域问题亦蜕化为单域问题.

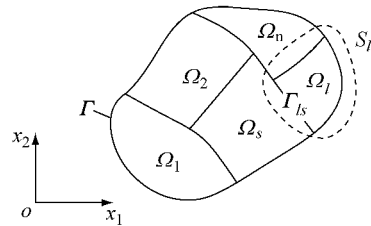


图2 多域组合问题的示意图

Fig.2 Diagrammatic sketch of the problems of multi-domain combination

对于多域问题, 设 Ω_l 为任意子域, 与之对应的虚拟边界为 S_l , $\varphi_k^{(l)}(\xi) (k=1, 2)$ 是位于 S_l 上的虚拟源函数, 如图3所示. 若该子域具有外部边界 $\Gamma_l \cap \Gamma$, 如外部位移边界 $\Gamma_l^u \cap \Gamma$ 或外部应力边界 $\Gamma_l^p \cap \Gamma$, 则在求解时必须满足问题所给定的相应的位移或应力边界条件, 即

$$\begin{cases} u_i^{(l)}(x) = \bar{u}_i^{(l)}(x), & x \in \Gamma_l^u \cap \Gamma \\ p_i^{(l)}(x) = \bar{p}_i^{(l)}(x), & x \in \Gamma_l^p \cap \Gamma \end{cases} \quad (14)$$

其中, $\bar{u}_i^{(l)}(x)$ 、 $\bar{p}_i^{(l)}(x)$ 分别为当前子域的外部位移边界 $\Gamma_l^u \cap \Gamma$ 上的已知位移和外部应力边界 $\Gamma_l^p \cap \Gamma$ 上的已知面力. 此外, 还应满足相邻子域 Ω_s 与当前子域 Ω_l 在内部边界 Γ_{ls} 上的位移连续性条件和面力相互作用条件, 即

$$\begin{cases} u_i^{(l)}(x) = u_i^{(s)}(x) \\ p_i^{(l)}(x) = -p_i^{(s)}(x) \end{cases} \quad x \in \Gamma_{ls} \quad (15)$$

于是, 依据文献[8]的数值思想可建立方差泛函 J 如下:

$$\begin{aligned}
J[\varphi^{(1)}(\xi), \varphi^{(2)}(\xi), \dots, \varphi^{(n)}(\xi)] = & \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^2 \left\{ \alpha_l \int_{x \in \Gamma_l^i \cap \Gamma} [u_i^{(l)}(x) - \bar{u}_i^{(l)}(x)]^2 d\Gamma(x) + \right. \\
& \beta_l \int_{x \in \Gamma_l^i \cap \Gamma} [p_i^{(l)}(x) - \bar{p}_i^{(l)}(x)]^2 d\Gamma(x) \left. + \right. \\
& \sum_{G(\Gamma_k)} \sum_{i=1}^2 \left\{ \alpha_G \int_{x \in \Gamma_k} [u_i^{(l)}(x) - u_i^{(s)}(x)]^2 d\Gamma(x) + \right. \\
& \left. \beta_G \int_{x \in \Gamma_k} [p_i^{(l)}(x) + p_i^{(s)}(x)]^2 d\Gamma(x) \right\} \quad (16)
\end{aligned}$$

式中: α 和 β 分别为关于位移和面力的加权系数; G 为当前内部边界 Γ_k 的编号. 方程(16)在实、虚边界均采用数值积分.

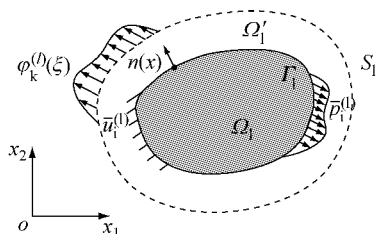


图3 虚边界元法的单域示意图

Fig.3 Diagrammatic sketch of single domain with virtual boundary method

在不考虑体力的作用且 $\varphi_k^{(l)}(\xi)$ 为已获知的前提下, 子域 Ω_l 内任一点的位移、应变、应力和对应边界上任一点的面力可分别按下式来计算, 即

$$u_i^{(l)}(x) = \int_{S_l} u_{ik}^*(x, \xi) \varphi_k^{(l)}(\xi) dS \quad (17)$$

$$\epsilon_{ij}^{(l)}(x) = \int_{S_l} \epsilon_{ijk}^*(x, \xi) \varphi_k^{(l)}(\xi) dS \quad (18)$$

$$\sigma_{ij}^{(l)}(x) = \int_{S_l} \sigma_{ijk}^*(x, \xi) \varphi_k^{(l)}(\xi) dS \quad (19)$$

$$p_i^{(l)}(x) = \int_{S_l} \sigma_{ijk}^*(x, \xi) n_j \varphi_k^{(l)}(\xi) dS \quad (20)$$

式(17)~(20)中, u_{ik}^* 、 ϵ_{ijk}^* 、 σ_{ijk}^* 分别为上述对应物理量值的二维平面应变问题 kelvin 基本解.

虚拟源函数 $\varphi_k^{(l)}(\xi)$ 是未知待求的. 在常规虚边界元法中, 未知待求的 $\varphi_k^{(l)}(\xi)$ 是依据边界单元的函数插值来近似构造, 这样, 方法的计算精度将与单元类型的选取和单元的剖分程度有关; 而在本文中, 为了提高计算精度, 对 $\varphi_k^{(l)}(\xi)$ 则是采用式(6)来近似构造, 即 $\varphi_k^{(l)}(\xi) \approx \tilde{\varphi}_k^{(l)}(\xi) = \sum_{i=1}^{m^l} N_i^{(l)}(\xi) \cdot {}_i\tilde{\varphi}_k^{(l)} =$

$N^{(l)T}(\xi) \cdot {}_s\tilde{\varphi}_k^{(l)} (k=1, 2)$; 其中, m^l 是 l th(第 l)子域虚边界上当前计算点 ξ 的支持域内所含虚拟节点数, $N_i^{(l)}(\xi)$ 是关于虚拟节点 y_i 的形函数(图4), $\tilde{\varphi}_k^{(l)}$

是与虚拟节点对应的虚拟源函数值, ${}_s\tilde{\varphi}_k^{(l)} = \{{}_1\tilde{\varphi}_k^{(l)}, {}_2\tilde{\varphi}_k^{(l)}, \dots, {}_{m^l}\tilde{\varphi}_k^{(l)}\}^T$, 与之对应的形函数矩阵 $N^{(l)T}(\xi) = \{N_1^{(l)}(\xi), N_2^{(l)}(\xi), \dots, N_{m^l}^{(l)}(\xi)\}$. 图4中, d_c 为计算点 ξ 的支撑域半径, d_i 为节点 y_i 的定义域半径.

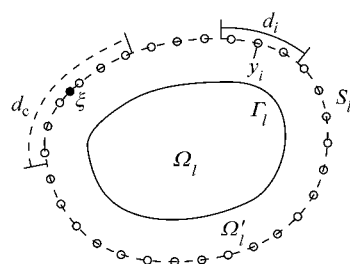


图4 多域虚边界无网格法的单域计算模型

Fig.4 Single-domain computational model of multi-domain virtual boundary meshless method

设 N_l 是虚拟边界 S_l 上所布置的虚拟节点总数, 则在 S_l 上的节点虚拟函数值向量 $\tilde{\varphi}^{(l)}$ 可表示为: ${}_s\tilde{\varphi}^{(l)} = \{{}_1\tilde{\varphi}_1^{(l)}, {}_1\tilde{\varphi}_2^{(l)}, {}_2\tilde{\varphi}_1^{(l)}, {}_2\tilde{\varphi}_2^{(l)}, \dots, {}_{N_l}\tilde{\varphi}_1^{(l)}, {}_{N_l}\tilde{\varphi}_2^{(l)}\}^T$.

于是, 式(17)和(20)的数值积分需采用一种背景网格, 可分别表示为

$$u_i^{(l)}(x) = \sum_{e=1}^{m_e^l} \sum_{g=1}^{e_g^l} \tilde{w}(\xi_g) u_{ik}^*(x, \xi_g) N^{(l)T}(\xi_g) \cdot {}_s\tilde{\varphi}_k^{(l)} \quad (21)$$

$$p_i^{(l)}(x) = \sum_{e=1}^{m_e^l} \sum_{g=1}^{e_g^l} \tilde{w}(\xi_g) \sigma_{ijk}^*(x, \xi_g) n_j N^{(l)T}(\xi_g) \cdot {}_s\tilde{\varphi}_k^{(l)} \quad (22)$$

其中 m_e^l 为边界 S_l 的单元剖分数, e_g^l 为单元高斯点数, $\tilde{w}(\xi_g)$ 为当前高斯点 ξ_g 所对应的加权值(即权数), n_j 为面力(或应力)边界上当前计算点处的单位法向矢量向给定坐标的投影. 将式(21)和(22)代入方差泛函式(16), 由此可见, $J[\varphi^{(1)}(\xi), \varphi^{(2)}(\xi), \dots, \varphi^{(n)}(\xi)]$ 是随所有虚拟边界的节点虚拟函数值 ${}_s\tilde{\varphi}^{(l)} (l=1, 2, \dots, n)$ 而变化的, 所以 J 又可表达为 $J[{}_s\tilde{\varphi}^{(1)}, {}_s\tilde{\varphi}^{(2)}, \dots, {}_s\tilde{\varphi}^{(n)}]$.

为了便于表述, 记 N_s 为多域问题所有子域的虚拟边界上的节点总数, 则整个节点函数值向量 A 可统一表达为 $A = \{{}_s\varphi^{(1)T}, {}_s\tilde{\varphi}^{(2)T}, \dots, {}_s\tilde{\varphi}^{(n)T}\}^T = \{\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots, \tilde{\varphi}_{2N_s}\}^T$

为了求解 ${}_s\tilde{\varphi}^{(l)} (l=1, 2, \dots, n)$, 对式(16)进行一阶变分, 即 $\delta J=0$, 有 $\partial J / \partial \tilde{\varphi}_s = 0 (s=1, 2, \dots, 2N_s)$, 得到求解所有虚拟边界上所有虚拟节点处的虚拟函数值 A 的控制方程, 写成矩阵形式如下:

$$\mathbf{K}\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (23)$$

式中: $\mathbf{K} = [k_x]_{2N_s \times 2N_s}$ 是一个对称的系数矩阵; \mathbf{A} 是

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{2N_1 \times 2N_1}^{(1)} & \mathbf{D}_{2N_1 \times 2N_2}^{(2)} & \cdots & \mathbf{D}_{2N_1 \times 2N_l}^{(l)} & \cdots & \mathbf{D}_{2N_1 \times 2N_n}^{(n)} \\ \mathbf{D}_{2N_2 \times 2N_1}^{(1)} & \mathbf{G}_{2N_2 \times 2N_2}^{(2)} & \cdots & \mathbf{D}_{2N_2 \times 2N_l}^{(l)} & \cdots & \mathbf{D}_{2N_2 \times 2N_n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{2N_l \times 2N_1}^{(1)} & \mathbf{D}_{2N_l \times 2N_2}^{(2)} & \cdots & \mathbf{G}_{2N_l \times 2N_l}^{(l)} & \cdots & \mathbf{D}_{2N_l \times 2N_n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{D}_{2N_n \times 2N_1}^{(1)} & \mathbf{D}_{2N_n \times 2N_2}^{(2)} & \cdots & \mathbf{D}_{2N_n \times 2N_l}^{(l)} & \cdots & \mathbf{G}_{2N_n \times 2N_n}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{2N_1 \times 1}^{(1)} \\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{2N_2 \times 1}^{(2)} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{2N_l \times 1}^{(l)} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{2N_n \times 1}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{2N_1 \times 1}^{(1)} \\ \mathbf{B}_{2N_2 \times 1}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{2N_l \times 1}^{(l)} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{2N_n \times 1}^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

式(24)即为虚边界无网格最小二乘求解方程,故本文所提出的方法亦称为“虚边界无网格最小二乘法”。其中,对角线子块 \mathbf{G} 是关于子域 Ω_l 所形成的系数子阵;而非对角线子块 \mathbf{D} 则是相邻子域的公共边界处的连续性条件所形成的系数子阵。由于方程(24)是依据式(16)所示的方差泛函获得,故系数矩阵 \mathbf{K} 具有对称性。当 Ω_l 与 Ω_s 为非相邻子域时,亦不存在对应的结合面 Γ_s , 这时相应的非对角线子块 \mathbf{D} 的系数应为零值,即 \mathbf{D} 为零子块。由此可知,系数矩阵 \mathbf{K} 具有对称和相对稀疏的性质。

3 计算裂纹问题的相关处理技术

3.1 裂纹子域的定义

设整个域 Ω 含有 m 条裂纹,将 Ω 人为地划分成 $2m+1$ 个子域,如图5所示。域 Ω 的整个边界记为 $\Gamma (= \Gamma_s + \sum_{i=1}^m (\Gamma_+^i + \Gamma_-^i))$ 其中 Γ_s 为域 Ω 的外部边界,而 Γ_+ 和 Γ_- 分别为当前裂纹的上下(或左右)边界。对每一裂纹分别以该裂纹的上下界面勾画出一个子域,如与边界 Γ_+ 对应的子域记为 Ω_+ , 即每一裂纹存在一对子域;而对被视为“基底”的子域记为 Ω^* 。

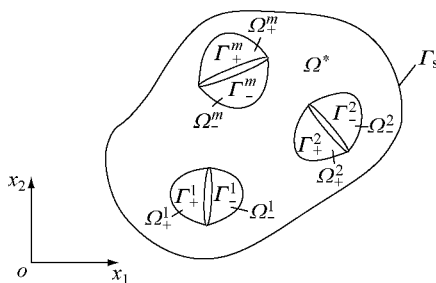


图5 含多裂纹的示意图

Fig.5 Diagrammatic sketch of containing multiple cracks

就本文方法的数值实施思想来讲,裂纹子域构型的形状具有任意可选性,如矩形或半圆或半椭圆等,而且其构型的形状及大小对数值结果不会产生影响。相对边界元直接法中的“常规子域法”^[9],本文

未知待求的虚拟源函数值; \mathbf{B} 是基于边界条件获得的右端项。方程(23)的子块矩阵表示形式如下,即:

方法在计算过程中不存在裂纹面的延伸边界,也就无需额外增添附加子域,即划分裂纹子域边界时不需另外将裂纹线延长,仅需包络裂纹即可,从而减少了计算量,尤其避免了由附加子域所引起的因划分单元数不当或配点数不足等而带来的计算误差。

3.2 等比例单元的采用

裂纹尖端附近处应力梯度变化大,故如何在尖端附近的实际边界合理地剖分单元以获得较好的数值解将是非常重要的。通过数值实践,本文在裂尖附近的实际边界依据“等比例”的数学思想来布置单元节点,从而决定对应单元的划分与分布。其具体实施思想为:设裂纹边界的半长 \overrightarrow{BA} 为 a , A 为裂纹尖端点;由点 B 到点 A 按下式布置节点,即 $a_i = (1-q^i) \cdot a / (1-q^n)$ $i=1, 2, \dots, n$; 其中, q 为比例因子, $q \neq 1$, 当 $i=n$ 时 a_n 为裂尖 A 点。

4 数值算例

4.1 算例1

在边长 $l=100$ mm 的平板内有一位于中心且半长 $a=1$ mm 的贯穿裂纹。垂直于上下板边的荷载为均匀分布的拉力,以 σ 表示,计算模型如图6所示;其中 σ 取值为 1 MPa,材料弹性模量 $E=2.1 \times 10^6$ MPa,泊松比 $\nu=0.3$ 。

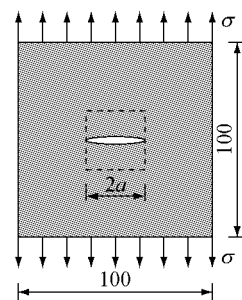


图6 单裂纹计算简图

Fig.6 Calculation diagram of single crack

采用本文方法计算,该问题可人为地被分成 3 个子域,即 1 个被称为“基底”的子域 Ω^* 和 2 个属于

裂纹定义的子域 Ω_+^i 和 Ω_-^i , 如图 7 所示. 对于裂纹子域 Ω_+^i , 在其对应的裂纹边界 Γ_+^i 上依据“等比例”布置方案在其半长上划分 22 个单元, 而 Ω_+^i 对应的内部边界共有 3 个直线边, 每边取 20 个均布单元, 总共有 104 个单元; 与 Ω_+^i 对应的虚拟边界 S_+^i , 采用半径 $r_1=1.22$ mm 的圆, 且被均布成 45 个单元. 对于子域 Ω_-^i , 其虚、实边界的单元剖分与同子域 Ω_+^i 的. 对于“基底”子域 Ω^* , 其外部边界 Γ_s 有 4 条直线边且每条边取 20 个均布单元, 而其内部边界的单元方案同相应的裂纹子域; 与 Ω^* 对应的虚拟边界分别有 $S_{\text{外}}^*$ 和 $S_{\text{内}}^*$ 且分别取 $r_3=72$ mm 和 $r_4=1.9$ mm 所对应的圆, 它们均被划分成 45 个单元. 所有虚边界节点数相加为 180, 即此问题本文方法的计算自由度数为 360.

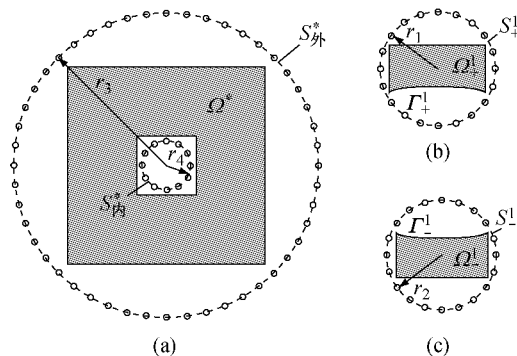


图7 单裂纹离散图

Fig.7 Discretization of single crack

采用 Westergaard 应力函数法计算该例应力强度因子^[11], 可得解析解为 $\sqrt{\pi}$ MPa ($=1.7725$ MPa); 而本文方法的数值结果为 1.7758 MPa, 误差为 1.86%. 在同等自由度下, 本文作者曾采用具有二次单元的常规虚边界元法, 其计算结果为 1.7795 MPa, 误差为 3.95%; 而文献[12]在同等自由度下采用直接边界元 J 积分法和边界元位移不连续法的计算结果见表 1. 采用本文所提出的方法具有边界型无网格优点, 此外, 无需处理奇异积分和避开角点问题

等; 再者, 由于采用了三次样条函数, 所以应力强度因子的计算精度相对较高.

表1 单裂纹应力强度因子

Tab.1 The stress intensity factor for the single crack

K	解析解	文献[12]的 J 积分法	文献[12]的位移不连续法	本文
结果/MPa	1.772 5	1.786 7	1.930 3	1.775 8
误差/%	—	8	8.9	1.86

4.2 算例 2

在边长 $l=100$ mm 的平板内有三条共线且半长均为 $a=1$ mm 的贯穿裂纹. 垂直于上下板边的荷载为均匀分布的拉力, 以 σ 表示, 计算模型如图 8 所示; 其中 σ 取值为 1 MPa, 材料弹性模量 $E=2.1 \times 10^6$ MPa, 泊松比 $\nu=0.3$. 此外, 设相邻裂纹中心距为 d , 以 $2a/d$ 的比值来确定相邻裂纹的裂尖距.

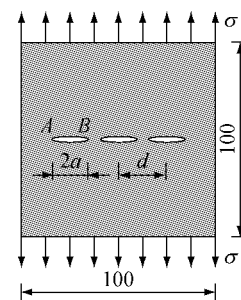


图8 三共线裂纹计算简图

Fig.8 Calculation figure of three collinear cracks

采用本文方法计算, 该问题可人为地被分成 7 个子域, 即 1 个被称为“基底”的子域 Ω^* 和 6 个属于裂纹定义的子域 Ω_+^i 和 Ω_-^i ($i=1, 2, 3$). 把整个域 Ω 划分为 7 个子域 Ω_i ($i=1, 2, \dots, 7$), 虚边界离散模型类似算例 1. 计算裂尖 A、B、C 量纲一应力强度因子 K_A, K_B, K_C , 与 Yan^[13] 在每条裂纹上采用 45 个位移不连续单元结合直接边界元法及文献[14]用应力函数法计算的精确解比较, 结果见表 2. 可见此方法在

表2 三共线裂纹裂尖 A、B 和 C 量纲一化应力强度因子

Tab.2 The normalized stress intensity factor for three collinear cracks

F $2a/d$	K_A			K_B			K_C		
	本文	文献[13]	文献[14]	本文	文献[13]	文献[14]	本文	文献[13]	文献[14]
0.05	0.998 85	0.996 1	1.000 83	0.998 51	0.996 1	1.000 40	0.998 76	0.996 3	1.000 63
0.10	0.999 51	0.997 2	1.001 50	0.999 59	0.997 3	1.001 64	1.000 58	0.998 2	1.002 52
0.20	1.003 70	1.001 5	1.005 85	1.004 83	1.002 6	1.007 02	1.007 99	1.005 9	1.010 30
0.30	1.010 67	1.008 5	1.012 96	1.0148 0	1.012 6	1.017 10	1.021 70	1.019 5	1.024 07
0.40	1.020 58	1.018 4	1.022 97	1.031 15	1.028 8	1.033 53	1.042 85	1.040 5	1.045 29
0.50	1.033 81	1.031 7	1.036 31	1.056 66	1.054 0	1.059 13	1.074 05	1.071 4	1.076 63
0.60	1.051 18	1.049 0	1.053 83	1.096 43	1.093 2	1.099 15	1.120 46	1.117 1	1.123 16
0.70	1.074 47	1.072 2	1.077 24	1.161 44	1.157 1	1.164 56	1.192 61	1.188 1	1.195 58
0.80	1.107 43	1.104 9	1.110 32	1.278 91	1.272 4	1.283 48	1.316 68	1.310 4	1.321 36
0.90	1.161 05	1.158 1	1.164 39	1.557 27	1.540 5	1.564 54	1.599 52	1.583 5	1.606 85

相比文献[13]用较少自由度下,计算结果更加接近文献[14]的精确解。

5 结论

(1)本文提出了虚边界无网格最小二乘法求解二维多裂纹问题的数值思想.文中所给出的数值算例已表明本文方法的可行性和计算精度。

(2)在虚拟边界上,采用了三次样条径向基函数来构造虚拟源函数,且在构造虚拟源函数时不依赖于单元剖分,只需在其数值积分时人为地引用一背景网格;因此,本文方法具有边界型无网格法的优点,更适合于求解复杂问题。

(3)依据文中的子域定义,在计算过程中无需象边界元直接法中“常规子域法”那样在裂纹面的延伸边界上额外增添附加子域,从而减少了计算量,尤其避免了由附加子域所引起的因划分单元数或配点数不足而带来的计算误差。

(4)本文思想的应用具有扩展性,可以推广应用与其他数学物理问题,如位势、扩散、波动、动力、热传导、热弹性等问题。

参考文献:

- [1] Brock D. Elementary engineering fracture mechanics[M]. 4th edition. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1986.
- [2] Shi Z H, Ohtsu M, Suzuki M, et al. Numerical analysis of multiple cracks in concrete using the discrete approach[J]. ASCE, Journal of Structural Engineering, 2001, 127(9): 1085.
- [3] Qing H, Yang W, Lu J A. Numerical simulation of multiple cracking in ANSI 304 stainless steel under thermal fatigue[J]. International Journal of Damage Mechanics, 2010, 19(7): 767.
- [4] HUANG Mingli, FENG Xiating, WANG Shuilin. Numerical simulation of propagation and coalescence processes of multi-crack in different rock media[J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, 23(2): 142.
- [5] Giordano S, Saba M I, Colombo L. Elastic properties of multi-cracked composite materials[J]. European Physical Journal B, 2010, 76(2): 261.
- [6] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 45(5): 601.
- [7] Duarte C A, Hamzeh O N, Liszka T J, et al. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(15-17): 2227.
- [8] 许强,鲁鑫,王海亮,等. 多域组合问题虚边界元法的求解[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2006, 27(3): 339.
XU Qiang, LU Xin, WANG Hailiang, et al. Virtual boundary element method for solving the problems of multi-domain composite structures [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2006, 27(3): 339.
- [9] 黎在良,王乘. 高等边界元法[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
LI Zailiang, WANG Cheng. Higher boundary element method [M]. Beijing: Science Press, 2008.
- [10] 刘欣. 无网格方法[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
LIU Xin. Meshless method[M]. Beijing: Science Press, 2011.
- [11] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
Chinese Aeronautical Establishment. Stress intensity factors handbook[M]. Beijing: Science Press, 1993.
- [12] Tuhkuri J. Dual boundary element analysis of closed cracks [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1997, 40(16): 2995.
- [13] Yan X. Interaction of arbitrary multiple cracks in an infinite plate[J]. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 2004, 39(3): 237.
- [14] Chen Y Z. Stress intensity factors for curved and kinked cracks in plane extension [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1999, 31(3): 223.