

# 统一分布模型在物流规划中的应用

孙 焰, 仇 磊

(同济大学 交通运输工程学院, 上海 201804)

**摘要:** 统一分布模型继承了目前主要基于熵理论的重力模型的特点, 引入统一分布模型进行物流分布预测, 设计了基于空间 0.618 搜索算法的极大似然估计参数标定方法. 通过实际算例比较了各种内部成本取法下统一分布模型和双约束重力模型的预测效果, 发现物流分布具有规模效应. 预测结果显示, 统一分布模型各指标均优于双约束重力模型, 证实了统一分布模型具有良好的适应性, 是一种高效的物流分布模型.

**关键词:** 物流分布; 重力模型; 统一分布模型; 极大似然估计; 空间搜索算法

**中图分类号:** U492; F252

**文献标志码:** A

## Application of a Consolidated Model to Logistics Planning

SUN Yan, QIU Lei

(College of Transportation Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** A consolidated distribution model (CM) which contains the most important characteristics of entropy gravity models was introduced to logistics distribution and an algorithm based on space 0.618 search was used to maximum likelihood parameters estimation. By comparing the applications with double constraints gravity model and CM, the parameters' economic meaning is verified. The results of CM forecasting are always better than the double constraint gravity model and the CM is not sensible to the interior cost of logistics zone when the distance between zones is much bigger than the interior. It is turned out that CM is an effective and accommodative logistics distribution model.

**Key words:** logistics distribution; gravity model; consolidated distribution model; maximum likelihood estimation; space search

在进行区域物流系统规划和分析时, 目前使用较多的是运用分阶段预测思想建立的基于 L-OD (logistics-original destination) 的四阶段物流需求预测模型<sup>[1]</sup>. 该模型可分为物流生成预测、物流分布预测、物流链选择、物流网络分配 4 个阶段.

在物流分布预测阶段, 需要预测规划区域中各物流分区之间的物流交换量, 即区域物流 PA (production and attraction) 分布表. 常用的物流分布模型可分为增长系数法和重力模型两类<sup>[2]</sup>.

本文将统一分布模型<sup>[3]</sup>引入到物流分布预测中, 该模型继承了目前各种主流重力模型的特点, 考虑了价格弹性、规模效应等因素, 可以看作是重力模型的统一形式. 针对统一分布模型参数较多的问题, 设计了基于极大似然估计和空间搜索的参数标定方法, 此方法可以作为重力模型参数标定的一般方法. 通过实际的算例分析, 证实了统一分布模型在物流分布预测中的良好适用性.

## 1 统一分布模型

统一分布模型以基于熵理论的双约束重力模型 (gravity model, GM) 为基础, 继承了基于目的地竞争的分布模型 (distribution model based on competing destinations, CDM)、基于自遏制理论的重力模型 (self-deterrent distribution model with quadratic costs, SDM) 的特点, 将它们的目标函数汇总起来, 形成了新的多目标分布模型.

统一分布模型和重力模型的假设条件相似, 都是在已知基年的物流分布表  $O_{ij}$  和规划年的总物流产生量  $P_i$  和吸引量  $A_j$  的条件下, 预测规划年各物流小区间的物流分布  $L_{ij}$ . 模型的形式如下:

$$\min F_1 = \sum_{ij} L_{ij} C_{ij} \quad (1)$$

$$\min F_2 = \sum_{ij} L_{ij} (\ln L_{ij} - 1) \quad (2)$$

$$\max F_3 = \sum_{ij} L_{ij} \ln S_{ij} \quad (3)$$

$$\min F_4 = \sum_{ij} C_{ij} L_{ij}^2 \quad (4)$$

$$\text{s. t. } \sum_j L_{ij} = P_i \quad (5)$$

$$\sum_i L_{ij} = A_j \quad (6)$$

式(1)~(6)中:  $C_{ij}$  表示小区  $i$  和  $j$  之间的物流成本, 可以选择距离、时间或其他形式的综合成本;  $L_{ij}$  为小区  $i$  产生的到小区  $j$  的物流量;  $S_{ij}$  表示某 PA 对的吸引力, 常用的计算公式有

$$S_{ij} = \sum_{k=1, k \neq i, j} A_k e^{-\sigma C_{jk}} \text{ 或 } S_{ij} = \sum_{k=1, k \neq i, j} A_k C_{jk}^{-\sigma} \quad (7)$$

式中,  $\sigma$  表示成本  $C_{jk}$  的权重, 为计算简便, 一般都取  $\sigma=1$ 。

在目标函数中, 式(1)表示物流总费用最小目标, 式(2)表示熵最大目标, 式(3)表示物流网络中各路径的吸引力最大目标, 式(4)表示在考虑规模效应(或负规模效应)的情况下总费用最小。

以上多目标模型求解比较麻烦, 引入参数, 将其转化为以下等价问题:

$$\min F_5 = \sum_{ij} L_{ij} C_{ij} + \frac{1}{\beta} \sum_{ij} L_{ij} (\ln L_{ij} - 1) - \frac{\rho}{\beta} \sum_{ij} L_{ij} \ln S_{ij} + \frac{\lambda}{2\beta} \sum_{ij} C_{ij} L_{ij}^2 \quad (8)$$

$$\text{s. t. } \sum_j L_{ij} = P_i \quad (9)$$

$$\sum_i L_{ij} = A_j \quad (10)$$

在式(8)中, 各参数都有相应的经济学意义,  $\beta$  可以解释为物流分布关于物流费用的弹性;  $\rho$  与物流费用和能接受的距离有关;  $\rho/\beta$  可以解释为影子价格;  $\lambda/2\beta$  的正负号表示了是否具有规模效益, 如果为负, 表明费用有规模效应, 若为正则表明规模不经济。

用拉格朗日乘子法(Lagrange Multiplier)求解模型(8), (9), (10), 得到如下模型:

$$\left. \begin{aligned} L_{ij} &= M_i P_i N_j A_j (S_{ij})^\rho e^{-\beta C_{ij} - \lambda C_{ij} L_{ij}} \\ M_i &= \frac{1}{\sum_j N_j A_j (S_{ij})^\rho e^{-\beta C_{ij} - \lambda C_{ij} L_{ij}}} \\ N_j &= \frac{1}{\sum_i M_i P_i (S_{ij})^\rho e^{-\beta C_{ij} - \lambda C_{ij} L_{ij}}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} L_{ij} &= M_i P_i N_j A_j f(C_{ij}) \\ M_i &= \frac{1}{\sum_j N_j A_j f(C_{ij})} \\ N_j &= \frac{1}{\sum_i M_i P_i f(C_{ij})} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

模型(11)中:  $M_i$  和  $N_j$  是由双约束条件推出的平衡系数; 模型(12)是基本的双约束重力模型,  $f(C_{ij})$  表示费用函数, 常用指数形式。当  $\lambda=0, \rho=0$  时, 统一分布模型就转换为费用函数为指数形式的双约束重力模型, 所以重力模型是统一分布模型的一种特殊形式。

## 2 参数的标定

对于重力模型, 一般选用试算、迭代的方法进行参数标定, 例如文献[4]中介绍的通过 Excel 软件快捷地标定双约束重力模型参数的方法。统一分布模型中的参数较多, 这种简单的方法并不适用。

极大似然估计是一种常用的参数标定方法, 对数形式的极大似然函数具有较简单的表达式, 因此本文采用极大似然估计对模型的参数进行标定。

### 2.1 极大似然估计

统一分布模型的极大似然估计函数可以通过泊松分布或 Logit 分布推出, 将基年物流分布矩阵  $O$  作为先验矩阵代入分布函数, 结合模型(11), 根据极大似然原理得到极大似然函数  $f(\rho, \beta, \lambda)$ , 推导过程见文献[3]。

$$f(\rho, \beta, \lambda) = \sum_{ij} O_{ij} (\ln M_i + \ln N_j + \rho \ln S_{ij} - \beta C_{ij} - \lambda C_{ij} O_{ij}) \quad (13)$$

通过求  $f(\rho, \beta, \lambda)$  的最大值, 可以得到参数  $\rho, \beta, \lambda$  的值。在式(13)中,  $M_i$  和  $N_j$  相互包含, 求偏导数并不容易, 不能直接采用求梯度并令梯度等于零的方法标定参数。至此参数标定问题转化为求函数(13)最大值的问题。

### 2.2 极大似然函数值求法

模式搜索法是对最速下降法的一种近似, 虽然收敛速度较慢, 但是编程方便, 算法比较稳定可靠, 在维度较小时比较适合, 式(13)中只有 3 个参数, 因此本文选用模式搜索法求式(13)的最大值。

空间 0.618 搜索法<sup>[5]</sup>是一种在优选法的基础上改进的模式搜索法, 具有更快的收敛速度, 编程也比较方便。下面介绍空间 0.618 法求极大似然函数值的具体步骤:

步骤1  $P$  为参数向量  $p=(\rho, \beta, \lambda)$  的空间,  $P, B, \Lambda$  为3个参数的值域, 即  $\rho \in P, \beta \in B, \lambda \in \Lambda$ , 赋初始值  $k=1, p^{(0)}=(\rho^{(0)}, \beta^{(0)}, \lambda^{(0)}) \in P$ ;

步骤2 令  $p^{(k)}=(\rho, \beta^{(k-1)}, \lambda^{(k-1)})$ , 令  $\rho \in P$  进行1维0.618搜索<sup>[6]</sup>, 通过  $\max f(\rho, \beta^{(k-1)}, \lambda^{(k-1)})$  求得  $\rho^{(k)}$ ;

步骤3 令  $p^{(k)}=(\rho^{(k)}, \beta, \lambda^{(k-1)})$ , 用类似的方法重复两次步骤2, 分别求得  $\beta^{(k)}, \lambda^{(k)}$ , 得到  $p^{(k)}=(\rho^{(k)}, \beta^{(k)}, \lambda^{(k)})$ ;

步骤4 令  $\Delta=f(p^{(k)})-f(p^{(k-1)})$ , 如果  $\Delta > \epsilon$ , 令  $k=k+1$ , 转入步骤2; 否则, 转入步骤5;

步骤5  $p^*=p^{(k)}=(\rho^{(k)}, \beta^{(k)}, \lambda^{(k)})$ ,  $f^*=f(p^{(k)})$ , 算法结束.

### 2.3 参数标定过程

在参数标定时, 可以用以下方法<sup>[3]</sup>缩小参数的搜索范围, 提高搜索速度.

目标函数(8)有惟一最优解的条件是2阶导数大于零, 即

$$\frac{\partial^2 F_5}{\partial L_{ij}^2} = \frac{1}{\beta L_{ij}^2} + \frac{\lambda C_{ij}}{\beta} > 0$$

式中:  $\beta$  表示物流量对费用的弹性, 在模型(11)中,  $\beta$  的系数为负, 因此  $\beta > 0$ ;  $C_{ij}$  表示物流费用, 故  $C_{ij} > 0$ ; 由此可以得到  $\lambda > -1/L_{ij}C_{ij}$ , 用  $O_{ij}$  代替  $L_{ij}$ , 计算出  $\lambda$  的最小值.

在每次代入  $p^{(k)}$  计算  $f(\rho, \beta, \lambda)$  时, 需要先通过弗尼斯法(Furness method)迭代运算确定  $M_i$  和  $N_j$  的值. 求得  $p=(\rho, \beta, \lambda)$  后, 将预测的目标年的物流生成量和吸引量代入模型(11)并不能直接算出规划年的  $L_{ij}$  分布, 因为  $M_i$  和  $N_j$  的表达式中含有  $L_{ij}$ , 可以使用以下迭代的方法.

首先, 用基年的  $M_i$  和  $N_j$  计算  $L_{ij}$ , 模型(11)中  $L_{ij}$  的表达式是等式形式, 因此可以用插值的方法; 求得  $L_{ij}$  后, 用弗尼斯法和求得的新  $L_{ij}$  计算  $M_i$  和  $N_j$  值; 如此反复, 最终使  $L_{ij}$  满足约束(9)和(10).

GM模型是CM模型的一种特殊形式, 所以只要令  $\lambda \in [0, 0], \rho \in [0, 0]$ , 标定CM模型参数的方法同样适用于GM模型的参数标定.

## 3 统一分布模型的应用

### 3.1 算例

使用文献[7]中泸州市物流发展规划的基年和规划年各物流小区的物流发生量和吸引量数据, 用GM模型和CM模型分别进行物流分布预测. 泸州市物流小区区划示意图如图1所示.



图1 泸州市物流小区区划示意图

Fig.1 The division of Luzhou logistics zones

在算例中, 综合物流成本  $C_{ij}$  取物流小区间的距离. 小区内部距离有多种处理方法, 通常不考虑小区内部的距离, 即  $C_{ii}=0$ , 但对于小区划分较少, 小区面积较大时, 这样的取法显然是不合理的. 因此, 本算例采用不考虑小区内部距离、圆内均距、矩形均距、综合距离4种小区内部物流成本的处理方法, 分别进行试算, 为具体的物流规划提供参考.

#### 3.1.1 不考虑小区内物流成本

第一种情况, 假设物流小区内的距离均为零, 即  $C_{ii}=0$ .

先进行参数标定, 再通过标定的参数预测规划年的PA分布.  $S_{ij}$  采用式(7)中的对数形式, 将标定的参数和规划年的物流产生量和吸引量代入模型(11)中, 如果收敛, 计算规划年的PA分布, 如果不收敛, 调整参数  $\lambda$  的定义域, 重新进行参数标定和规划年分布预测, 直到规划年分布收敛为止.

本文选取相关度  $r^2$ 、标准均方根误差 SRMSE 两个参数作为评价预测结果的指标, 除此之外, 极大似然估计函数的函数值  $\ln L$  本身也是一个天然的评价指标.

#### 3.1.2 圆内均距法

圆内均距假设小区形状基本都近似于圆形, 小区内部每点的物流产生和吸引量的可能性都是均等的, 小区内部的物流成本应该选择小区内任意两点之间距离的平均值.

圆是比较常见的几何图形, 一般认为圆内两点间的平均距离为半径, 发现实际值是略小于圆半径的<sup>[8]</sup>, 圆内任意两点间的距离的平均值  $E(r) = 129R/45\pi < R$ .

#### 3.1.3 矩形均距法

将所有的小区都假设成圆形不符合现实, 实际上, 近似于矩形的小区划分更多一些, 这里介绍矩形小区内两点间平均距离的算法.

用  $a, b$  表示矩形的两条边长, 且  $a=ab$ , 小区内

两点间的平均距离公式如下:

$$E(r) = \frac{b}{15} \left\{ \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^2} + (\alpha^2 + 1)^{1/2} \left( 3 - \alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{5}{2} \left[ \frac{1}{\alpha} \ln(\alpha + (\alpha^2 + 1)^{1/2}) + \alpha^2 \ln \frac{1 + (\alpha^2 + 1)^{1/2}}{\alpha} \right] \right\}$$

算例假设小区的长宽比为 1:2, 即  $\alpha=2$ , 根据各小区的面积, 计算各小区内两点间的平均距离。

### 3.1.4 综合距离法

考虑到小区的形状、地理、经济状况的差异等, 不能简单地假设所有的小区都符合同一种形状。应

该根据小区实际的形状、结合小区内部的经济状况来选取恰当的小区内部成本。

在本算例中, 小区 1 和小区 2 面积都比较小, 同时小区内部物流交换量又较大, 因此假设小区内部的物流产生和吸引是平均分布的, 小区 1 和小区 2 内部的物流成本都取圆均距。其余小区面积较大, 但内部的物流交换量相对不大, 可以看作是集中在小区中心的交换, 所以假设小区内部的物流成本为零。

### 3.2 算例结果总结

按照前文的步骤和指标, 分别计算 4 种条件下 2 种模型的参数值和指标, 结果如表 1。

表 1 参数标定结果

Tab.1 The results of parameter calibration

条件	模型	参数			指标		
		$\rho$	$\beta$	$\lambda$	$r^2$	SRMSE	$\ln L$
零内距	GM	—	0.722 525	—	0.639 3	0.069 12	-11 598.4
	CM	1.451 801	0.557 361	-0.000 36	0.690 6	0.063 85	-11 574.5
圆均距	GM	—	0.636 373	—	0.588 6	0.073 74	-11 613.4
	CM	1.691 209	0.577 362	-0.000 47	0.675 7	0.065 43	-11 578.6
矩形均距	GM	—	0.610 691	—	0.582 5	0.074 28	-11 615.2
	CM	1.703 042	0.578 719	-0.000 45	0.674 3	0.065 57	-11 579.2
综合均距	GM	—	0.688 321	—	0.620 0	0.070 92	-11 602.2
	CM	1.559 630	0.557 361	-0.000 47	0.692 9	0.063 61	-11 573.3

由表 1 可知, 在所有的预测结果中, CM 模型的指标总是优于 GM 模型 ( $\ln L$ ,  $r^2$  越大越好, SMRSE 越小越好); 对于 CM 模型, 小区内物流成本取综合距离时的预测结果最好, 也是所有预测结果中最好的, 不考虑小区内部物流成本时次好; 对于 GM 模型而言, 不考虑小区内部物流成本时的预测结果最好, 取综合距离时次好。

在选取综合成本下, GM 模型和 CM 模型预测的规划年 PA 分布如图 2、图 3 所示。

### 3.3 算例分析

分析参数指标和预测结果, 可以得到以下几方面信息:

(1) 两种模型预测的规划年分布相似, 表现为小

区 1 物流产生量和吸引量都较大, 每个小区内部的物流交换量也较大, 整体呈分布沿对角线对称的趋势。各指标中, CM 模型的相关性  $r^2$  在 (0.65, 0.70) 区间内, GM 模型的相关性  $r^2$  在 (0.55, 0.65) 区间内, 选取的数据是截面数据, 相关性在 0.6~0.8 区间内都可以接受。在该算例中, 各种成本取法下 CM 预测的规划年的 PA 分布都比较理想。

(2) 在选取的 4 种成本模式中, 统一分布模型 CM 的指标均优于双约束重力模型, CM 模型比 GM 模型考虑了更多的因素, 因此预测效果更好。

(3) 由表 1 可知, 两种模型各评价指标的差距不大, 这也验证了文献[1]中“在小区划分聚集度较高的情况下, 即划分的物流小区较大的情况下, 统一分

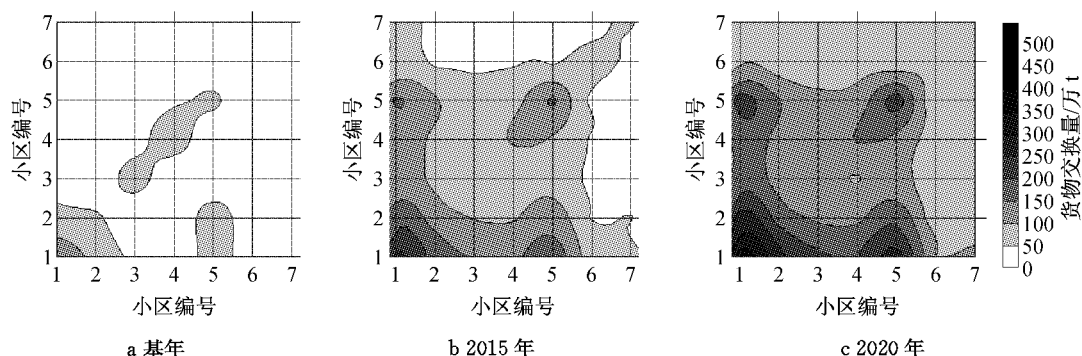


图 2 综合成本条件下 GM 模型预测的规划年 PA 分布

Fig.2 The PA distribution in planning years with the comprehensive interior cost by GM

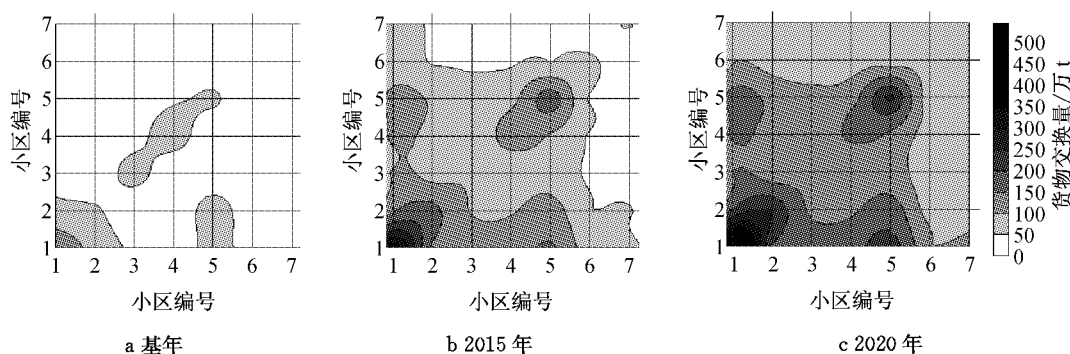


图3 综合成本条件下CM模型预测的规划年PA分布

Fig.3 The PA distribution in planning years with the comprehensive interior cost by CM

布模型的预测结果和重力分布模型相似”的结论;在实际的物流分布预测,若物流小区划分较少,小区面积较大,可以直接采用双约束重力模型,预测结果和统一分布模型相近。

(4)统一分布模型在4种形式的成本下标定的参数中均有 $\lambda < 0$ ,意味着物流分布具有规模效应,即物流成本会随物流量的增加而单位成本减小;这一点与文献[3]中的预测结果差别较大,这也正是客流分布和物流分布预测的重要区别,物流具有规模经济效应,而客流往往由于拥堵导致规模不经济。

(5)在以圆均距和矩形均距作为小区内部物流成本时,参数标定的指标比不考虑小区内部成本时要差,原因是当小区较大、内部差异性较强时,不能简单地假设物流交换量均匀分布;当选用综合成本时,参数标定的指标要比不考虑小区内部物流成本时的指标优;小区1和小区2的面积较小,内部的物流交换量又较大,可以当作小区内部的物流产生和吸引是平均分布的,这种做法比较适用于城市市区、工业区等物流发生和吸引比较密集的地区;在实际的规划中,如果划分的物流小区面积较大,而小区内部物流交换量不是很多时,可以不考虑小区内部的物流成本,仍然能够取得较为理想的预测效果。

## 4 结论与展望

统一分布模型继承了目前主要重力模型的特点,能够较好地预测规划年的物流分布。统一分布模型的缺点是参数较多,参数的标定比较复杂,本文设计了基于空间0.618搜索算法的极大似然估计参数标定方法,这一方法具有简单、高效的特点;最后通过案例分析,验证了统一分布模型的预测效果,对比不同内部成本选取模式下的预测结果,为实际规划中小区内部成本的选取提供了参考。

在实际的区域物流系统规划中,如果划分的物流小区的聚集度较低,即划分的物流小区较多时,双

约束重力模型的预测结果比较差,此时可以选择使用统一分布模型进行物流分布预测,通过合理的小区内部物流成本设置,得到可靠的物流分布预测结果。

## 参考文献:

- [1] 张锦. 物流系统规划[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2004.  
ZHANG Jin. Logistics system planning [M]. Beijing: China Railway Press, 2004.
- [2] 陈导. 基于L-OD的物流需求预测系统的研究与实现[D]. 成都: 西南交通大学交通运输学院, 2008.  
CHEN Dao. The research and implementation of logistical demand forecast system based upon L-OD [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2008.
- [3] Louis de Grange, Enrique Fernández, Joaquín de Cea. A consolidated model of trip distribution [J]. Transportation Research Part E, 2010 (46): 61.
- [4] 张兰, 彭国雄. 重力模型标定方法的分析及应用[J]. 交通科技与经济, 2009(1): 106.  
ZHANG Lan, PENG Guoxiong. Simple method and application on calibration of the gravity model [J]. Technology & Economy in Areas of Communications. 2009(1): 106.
- [5] 徐光杰, 韩建勋. 多维空间寻优的0.618法及在工程设计中的应用[J]. 炼油化工自动化, 1990(5): 17.  
XU Guangjie, HAN Jianxun. The 0.618 hyperspace optimizing algorithm and application in engineering [J]. Petroleum Refining Automation, 1990(5): 17.
- [6] 程宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.  
CHEN Baoling. Optimizing theory and algorithm [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.
- [7] 田丽娜. 基于L-OD法的地区间物流需求预测分析[J]. 商场现代化, 2006(3): 66.  
TIAN Lina. Regional logistics demand forecast based on L-OD [J]. Market Modernization, 2006(3): 66.
- [8] 程鹏. 计算凸域内两点间平均距离的普遍方法[D]. 武汉: 武汉科技大学理学院, 2006.  
CHENGPENG. The common reckon method about mean distance of two points of a convex domain [D]. Wuhan University of Science and Technology, 2006.