文章编号：0253-374X(2013)09-1442-05
DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2013.09.026

考虑数量折扣的易逝品两阶段价格机制

张玲红，尤建新，薛奕曦，邱国华
(同济大学 经济与管理学院，上海 200092)

摘要：研究了有限库存情况下带有全量数量折扣的易逝品动态定价问题.假定顾客的保留价格服从均匀分布，厂商采取两阶段动态定价，并且当第二阶段剩余库存大于零时采取数量折扣策略.首先，考虑厂商未采取数量折扣策略，建立基本模型，给出厂商最优两阶段价格的表达式；其次，基于基本模型给出第二阶段最优数量折扣的表达式.最后，假设第二阶段采取的价格折扣与购买 2 个单位产品的顾客数量比例为一次函数关系的情况下，利用 Matlab 进行模拟计算并给出灵敏度分析.结果表明，采取数量折扣策略后，有效地降低了厂商的剩余库存，提高了厂商利润；并且顾客保留价格相差越大，厂商利润增加越明显.

关键词：易逝品；两阶段动态定价；数量折扣策略
中图分类号：F224.31　　**文献标志码**：A

Optimal Two-phase Pricing of Perishable Product Based on a Consideration of Quantity Discount Policy

ZHANG Linghong, *YOU Jianxin*, *XUE Yixi*, *QIU Guohua*
(College of Economics and Management, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The perishable products' dynamic pricing with quantity discount was studied on the basis of the assumption that the consumer's reservation price drawed from a uniform distribution. The seller adopted two-phase pricing, and the all-quantity discount policy was employed when the remaining inventory was bigger than zero in the second phase. When the quantity discount was not considered, the basic model was given to present the optimal two-phase pricing strategy. Based on the basic model, the extension model gave the optimal quantity discount strategy. Finally, Matlab was introduced into a numerical simulation and sensitive tests were made when the relationship was a linear function between the second phase's price discount and the proportion of consurmers who purchased two units of products. As a result, the seller's profit increased obviously by reducing inventories. The profit increment rate increased significantly when consumers' reservation prices varied significantly.

Key words: perishable products; two-phase dynamic pricing; quantity discount

随着技术进步和市场竞争的加剧，产品更新换代速度加快，越来越多的产品呈现出易逝品的特征.如各类电子产品和信息产品都具有易逝品的特征，易逝品在商场、超市的货架上所占的比例也越来越大[1].易逝品根据价格随销售时间的变化主要分为两大类[2]：一类是随销售时间的推迟，价格越来越高，例如航空机票；另一类是随着销售时间的缩短，价格不断减小，例如电子商品.本文的研究对象为第二类，考虑随销售时间的缩短，价格不断减小的产品，并且明显具有生产提前期长，销售时间短，期末残值低，受价格影响需求波动明显的产品，例如衣服、电子产品；由于在销售时间内未被销售出去的剩余产品，零售商将会以低于成本的价格进行清仓处理，因此零售商在销售时间内需要根据市场需求的波动性来动态调整价格，降低剩余库存.近年来动态定价已经成为学术界的研究热点，在易逝品的销售中得到广泛应用，如航空公司的机票，时装以及生鲜食品等.因此研究易逝品的动态定价策略，有很强的理论与现实意义.

1992 年 Weatherford 和 Bodyily[3] 从收益管理的角度系统阐述了易逝品的动态定价问题.近年来关于易逝品的动态定价研究在收益管理中得到广泛应用，比如航空机票、报纸、蔬菜、衣服的价格设置等. Gallego 和 van Ryzin[4] 研究了单产品动态定价问题，假设顾客到达服从泊松过程，构造了连续时间随机动态规划模型，证明了最优值函数是库存水平

收稿日期：2012-11-30
基金项目：上海市优秀学术带头人计划(11XD1405100)；上海市重点学科建设项目(B310)
第一作者：张玲红(1986—)，女，博士生，主要研究方向为管理理论与方法. E-mail:zhanglinghong2005@126.com
通讯作者：尤建新(1961—)，男，教授，博士生导师，管理学博士，主要研究方向为管理理论与工业工程. E-mail:yjx2256@vip.sina.com

和时间的严格凹函数,并且得到随着销售数量的增加最多改变一次价格的策略是渐近最优的. 基于此,Feng 和 Gallego[5]把价格改变的次数设定为1,并预先设定价格改变前后的价格大小,得到了价格改变的最佳时刻. Chatwin[6]考虑了需求依赖于库存水平下的动态定价策略,假定易逝商品的市场需求服从泊松分布且到达强度仅依赖商品的价格,在此基础上分析了连续时间函数下易逝商品的最优定价方法. Aviv 和 Pazgal[7]考虑了消费者在随机到达的情形下,保留价格随时间变化,给出固定折扣与临时打折两种策略,最后比较分析了这两种定价策略. 我国学者也在动态定价方面做了大量的工作. 杨慧和周晶[8-9]构建了两种竞争性产品降价时点设定问题的博弈模型,根据竞争对手决策时间的先后,分别研究了 Cournot 博弈与 Stackelberg 博弈. 刘晓峰和黄沛[10]讨论了面对策略消费者时,厂商如何在确定性和不确定性需求情形下,决定相应的库存和价格. 李根道等[11]研究了随机情况下库存和价格影响需求的价格决策问题,给出了最优价格策略唯一的充分条件并分析了解的结构. 然而上述文献的大部分研究在实施最优定价策略后直接对剩余的库存以低于产品成本价的清仓价进行抛售,并没有考虑其他策略进一步减少剩余库存.

由于销售时期内没有售出的产品,厂商将以低于成本的价格抛售产品,因此本文考虑在产品销售的低谷期引入数量折扣策略来增加销售量,降低剩余库存. 数量折扣在供应商与零售商的订货模型中非常常见,为了激励零售商增加订货量,供应商通常会采用数量折扣策略从而达到供应链协调. Chiang, James, Huang 等[12]利用博弈论分析了卖方的数量折扣问题,并用数值算例验证了数量折扣策略能有效提高交易双方利润;Li 等[13]研究了市场需求服从正态分布时,供应商与零售商组成的两级供应链的协调问题,证明了数量折扣策略可以改进供应链整体绩效;然而在现实生活中有很多零售商对终端消费者采取数量折扣,商场中经常会看到购买一件产品全价,购买两件享受九折优惠,超市中食品的此类促销也很常见. Weng[14]假设市场需求是商品价格的函数得出数量折扣可以有效刺激市场需求.

基于上述文献研究,本文重点在于将数量折扣应用到动态定价中,考虑在有限库存的情况下,易逝品的最优动态定价策略与数量折扣策略. 本文首先从两阶段定价的基本模型出发,确定厂商的最优两阶段价格策略;其次,利用数量折扣与由此增加的需求量的关系,得到扩展模型的最优数量折扣策略;最后,利用 Matlab 进行数值分析,给出了相应的管理实践方面的应用.

1 基本模型

垄断厂商初始库存为 K,产品成本为 c. 产品销售期 T 分为两个阶段:第一阶段,销售高峰期$[0,H]$;第二阶段,销售低谷期$[H,T]$. 两阶段价格分别为 p_1,p_2,且 $p_1\geqslant p_2$;模型不考虑由于顾客到达时间的不同引起的异质性,假设顾客在销售初期就已到达并且数量为 N[15],每个顾客对产品都存在一个保留价格 V,如果产品的价格不大于顾客的保留价格,顾客就会购买产品. 顾客对产品的保留价格 V 是独立同分布的随机变量,并且只有消费者自身知道自己的保留价格,厂商和其他的消费者都无法知道. 假设顾客保留价格的分布函数 $R(V)$ 服从$[V_L,V_H]$上的均匀分布,其中 V_L 为顾客保留价格的最小值且 $V_L\geqslant c$,V_H 为顾客保留价格的最大值. 第二阶段价格满足 $p_2\geqslant V_L$,因为当厂商在第二阶段的价格为最小保留价格 V_L 时,降低价格并不会增加销售量,反而会减少厂商收入;利用 $x(t)$ 表示 t 阶段结束时厂商的剩余库存. 在第二阶段销售结束时,如果厂商剩余库存不为零,则厂商将采用低于成本的价格 δ 抛售产品,此时大量顾客进入市场,剩余库存全部售罄. 厂商根据销售期内顾客的数量及保留价格,决定两阶段价格 p_1,p_2.

由于在销售结束时厂商库存不会小于零,即 $x(2)\geqslant 0$,此时第二阶段销售价格 p_2 需满足 $p_2\geqslant V_H-(V_H-V_L)K/N$.

由上述分析可得厂商的利润函数如下:

$$\Pi(p_1,p_2)=\frac{V_H-p_1}{V_H-V_L}Np_1+\frac{p_1-p_2}{V_H-V_L}Np_2+x(2)\delta-cK \tag{1}$$

其中 $p_2\leqslant p_1\leqslant V_H$, $\max\{V_L,V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{N}\}\leqslant p_2$.

由于目标函数是严格二次凸函数,可行域是非空闭凸集,所以解存在且唯一. 下述定理给出了上述二次规划的解析解.

定理1 如果第二阶段结束时厂商剩余库存 $x(2)=0$, 则厂商的最优定价 $p_1^*=V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{2N}$, $p_2^*=V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{N}$.

证明 如果 $x(2)=0$,则 $x(2)=K-\frac{V_H-p_2}{V_H-V_L}N=$

$0, p_2=V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{N}$.

由 $x(2)=0$ 可得 $K\leqslant N$,从而 $p_2\geqslant V_L$,因此最优第二阶段价格 $p_2^*=V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{N}$.

厂商利润函数转化为 $\pi=\frac{V_H-p_1}{V_H-V_L}Np_1+\frac{p_1-p_2}{V_H-V_L}Np_2-cK$,令 $\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}p_1}=\frac{N(V_H-2p_1+p_2)}{(V_H-V_L)}=0$,代入 p_2^* 可得 $p_1=V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{2N}$,其中 $p_1\geqslant V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{N}$,因此 $p_1^*=V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{2N}$.

定理2 如果第二阶段结束时厂商剩余库存 $x(2)>0$,则最优价格为

(1) 如果 $\delta\geqslant\frac{3V_L-V_H}{2}$,则 $p_1^{**}=\frac{2V_H+\delta}{3}$,$p_2^{**}=\frac{V_H+2\delta}{3}$.

(2) 如果 $\delta<\frac{3V_L-V_H}{2}$,则 $p_1^{**}=\frac{V_H+V_L}{2}$,$p_2^{**}=V_L$.

证明 若 $x(2)>0$,即 $K-\frac{V_H-p_2}{V_H-V_L}N>0$,可得 $p_2>V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{N}$,则厂商利润函数 $\Pi(p_1,p_2)=\frac{V_H-p_1}{V_H-V_L}Np_1+\frac{p_1-p_2}{V_H-V_L}Np_2+x(2)\delta-cK$,其中$x(2)=K-\frac{V_H-p_2}{V_H-V_L}N$.

对 p_1,p_2 求偏导数,有

$$\frac{\partial\pi}{\partial p_1}=\frac{N(V_H-2p_1+p_2)}{(V_H-V_L)}=0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial p_2}=\frac{N(p_1-2p_2+\delta)}{(V_H-V_L)}=0$$

$$p'_1=2p_2-\delta,p'_2=\frac{V_H+2\delta}{3}$$

(1) 如果 $\delta\geqslant\frac{3V_L-V_H}{2}$,则满足 $p'_2>V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{N}$并且 $p'_2\geqslant V_L$,所以 $p_1^{**}=\frac{2V_H+\delta}{3}$,$p_2^{**}=\frac{V_H+2\delta}{3}$.

(2) 如果 $\delta<\frac{3V_L-V_H}{2}$,则 $p_1^{**}=\frac{V_H+V_L}{2}$,$p_2^{**}=V_L$,此时满足 $p_2>V_H-\frac{(V_H-V_L)K}{N}$.

结论1 如果厂商的初始库存为 K,在确定了顾客的最高保留价格与最低保留价格后,厂商的最优价格 $(\hat{p}_1,\hat{p}_2)=\arg_{p_1,p_2}\{\max\{\Pi(p_1^*,p_2^*),\Pi(p_1^{**},p_2^{**})\}\}$.

厂商在利润最大化过程中存在着价格与剩余库存的博弈:高的价格对应着高的剩余库存,低的价格与低剩余库存相对应;厂商在何种情况下宁愿选择高的剩余库存也要维持高的价格,在何种情况下宁愿降低价格来减少剩余库存,定理1,2给出了相对应的条件.

2 扩展模型

考虑到厂商在采取最优价格策略后,第二阶段剩余库存不为零,则剩余产品将以低于成本的价格 δ 销售.为了提高利润,增加季节性产品在淡季时的需求,在销售的第二阶段厂商采取全量数量折扣策略,不计采取折扣策略增加的厂商成本.假设第二阶段顾客的购买数量为1个或者2个单位,如果顾客购买产品的数量为2个单位时,顾客可享受折扣价格 $\theta p_2,\theta\in[c/p_2,1]$,其中,$1-\theta$ 称为第二阶段厂商采取的价格折扣.假设 α 为采取数量折扣策略吸引的购买2个单位产品的顾客数量比例,则 α 为 θ 的单调减函数.由于单调函数在闭区间上必存在反函数,记 $\theta=f(\alpha)$,其中 $\alpha\in[0,f^{-1}(c/p_2)]$;厂商根据第一阶段的剩余库存,确定第二阶段产品的价格折扣以期利润最大化.

厂商利润函数如公式(2)所示.

$$\begin{aligned}\Pi_1(p_1,p_2,\theta)=&\frac{N}{V_H-V_L}[(V_H-p_1)p_1+(1-\alpha)\cdot\\&(p_1-p_2)p_2+2\alpha\theta(p_1-p_2)p_2]+\\&x'(2)\delta-cK\end{aligned}\tag{2}$$

其中 $x'(2)=K-\frac{N(V_H-p_2)+N\alpha(p_1-p_2)}{(V_H-V_L)}$,由于 $x'(2)\geqslant0$,α 的取值需满足

$\alpha\leqslant\frac{K(V_H-V_L)-N(V_H-p_2)}{N(p_1-p_2)}$,因此 $\alpha\in\left[0,\frac{K(V_H-V_L)-N(V_H-p_2)}{N(p_1-p_2)}\right]\cap[0,f^{-1}(c/p_2)]$.

定理3 如果第二阶段剩余库存 $x(2)>0$,假设 $\theta=f(\alpha)$为一次函数,厂商采取最优价格 $\hat{p}_1,\hat{p}_2$,则第二阶段厂商采取的最优价格折扣为 $\theta(\alpha^*)$.

证明 对公式(2)求 α 的偏导数得

$\frac{\partial\Pi_1(p_1,p_2,\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{N(p_1-p_2)}{V_H-V_L}[p_2(2\theta+2\alpha\theta'-1)-\delta]$,记 $g(\alpha)=p_2(2\theta+2\alpha\theta'(\alpha)-1)-\delta$,则 $g(0)=p_2-\delta>0$,$g(b)=p_2(2\theta(b)+2b\theta'(b)-1)-\delta$,其中 $b=\min\left\{\frac{K(V_H-V_L)-N(V_H-p_2)}{N(p_1-p_2)},f^{-1}(c/p_2)\right\}$.

因为$\theta=f(\alpha)$为一次函数，易知$\Pi_1(p_1,p_2,\alpha)$为α的二次函数，因此，如果$g(b)\geqslant 0$，则在区间$[0,b]$上必存在唯一的最优折扣$\theta(b)$；如果$g(b)<0$，则在区间$[0,b]$上必存在唯一的最优折扣$\theta(\alpha^*)$，其中α^*满足$g(\alpha^*)=0$.

结论 2　采取数量折扣策略后厂商的利润增加值如公式 3 所示.

$$\Delta\Pi=\frac{N}{V_H-V_L}[(2\alpha^*\theta^*-\alpha^*)(\hat{p}_1-\hat{p}_2)\hat{p}_2-\delta\alpha^*(\hat{p}_1-\hat{p}_2)] \tag{3}$$

3　数值分析

3.1　数值实例

假设$\alpha=1-\theta$，$\delta=0.2V_L$，$c=1$，$K=50$，$V_L=1$，$V_H=3$，$\Delta\Pi/\Pi$表示厂商利润的增加率，用来反映数量折扣策略的有效性.

由表 1 可知，厂商采取两阶段动态定价策略，当$54\leqslant N\leqslant 60$时，厂商选择适当的两阶段价格，清除库存使得利润最大化. 当$50\leqslant N\leqslant 53$时，厂商有机会出售掉所有产品，但是厂商选择了制定较高的价格来弥补剩余库存所带来的损失，最大化利润. $N\leqslant 53$时，产品价格的确定与顾客数量无关，因此两阶段价格并没有任何变化. 此时厂商采取数量折扣策略，有效降低了第二阶段库存并且使得厂商利润增加；随着N的减小，第二阶段价格折扣不断降低；由于折扣价格不小于成本，最终折扣趋于 0.88. 采取数量折扣策略后，厂商的利润明显增大，但利润增加率随着N的减小先增加后减小.

3.2　灵敏度分析

由于信息的不对称性，厂商对消费者的最低保留价格与最高保留价格的估计可能会产生波动，在此假设最低保留价格在 0.8～1.2 之间波动，最高保留价格在 2.6～3.5 之间波动，应用给出的算法可以得到图 1，图 2.

表 1　顾客数量 N 的变化对价格及利润的影响

Tab.1　Optimal price, discount factor and profit as a function of N

N	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$	θ	$x(2)$	$x'(2)$	Π	Π_1	$(\Delta\Pi/\Pi)\%$
60	2.07	1.33	1.00	0	0	37.20	37.20	0
55	2.07	1.18	1.00	0	0	31.80	31.80	0
54	2.07	1.15	1.00	0	0	30.55	30.55	0
53	2.07	1.13	0.98	0.53	0.04	29.25	29.69	1.50
52	2.07	1.13	0.94	1.47	0.01	27.95	29.11	4.15
51	2.07	1.13	0.90	2.40	0.02	26.64	28.32	6.31
50	2.07	1.13	0.88	3.33	0.53	25.33	27.19	7.31
49	2.07	1.13	0.88	4.27	1.52	24.03	25.84	7.16
48	2.07	1.13	0.88	5.20	2.51	22.72	24.50	7.01
45	2.07	1.13	0.88	8.00	5.48	18.80	20.47	6.58
40	2.07	1.13	0.88	12.67	10.43	12.27	13.75	5.84

当$c=1$，$K=N=50$，$V_L=1$，$\delta=0.2$，$\alpha=1-\theta$时，由图 1 可以得出，随着V_H的增大，最优的两阶段价格$\hat{p}_1$，$\hat{p}_2$及厂商利润不断增加，第二阶段购买产品的价格折扣力度$1-\theta$不断增加；采取数量折扣后厂商利润的增加率随着V_H的增大先增加后减小.

当$c=1$，$K=N=50$，$V_H=3$，$\delta=0.2$，$\alpha=1-\theta$时，从图 2 可得到，随着V_L的增大，$\hat{p}_1$，$\hat{p}_2$和厂商利润不断增大；第二阶段购买产品的价格折扣力度$1-\theta$不断减小；采取数量折扣后的厂商利润增加率随V_L的增大不断减小.

通过图 1，2 可以得出，V_H-V_L值越大，采取数量折扣策略厂商利润增加越明显.

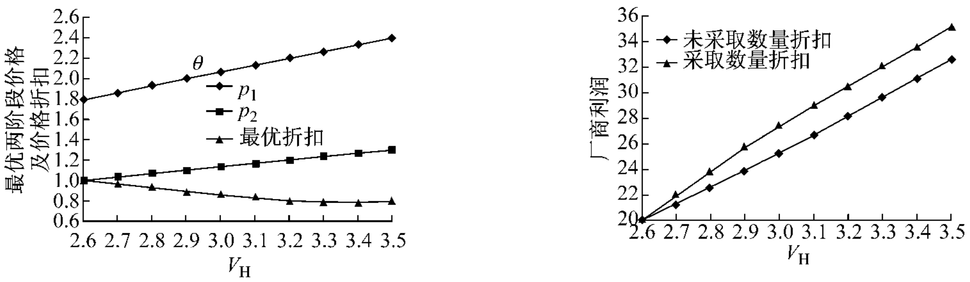
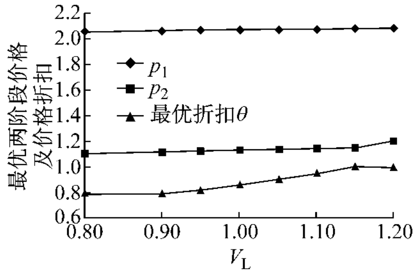


图 1　最高保留价格 V_H 的变化对价格及利润的影响

Fig.1　The optimal pricing policy, price discount factor and profit as a function of V_H



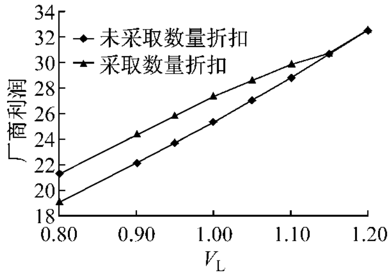


图2 最低保留价格 V_L 的变化对价格及利润的影响

Fig.2 The optimal pricing policy, price discount factor and profit as a function of V_L

4 结论

讨论了库存有限情况下,厂商采取两阶段定价策略,并且当第二阶段剩余库存大于零时,在第二阶段引入全量数量折扣策略的易逝品的动态定价问题.假设顾客享有的价格折扣与购买2个单位的顾客数量比例为一次函数关系的情况下给出了算例,得出的结论为:① 采取数量折扣策略后,厂商利润增加;随着潜在顾客数量的减少,第二阶段采取的价格折扣力度不断变大,最终趋于常数. ② 第二阶段采取的价格折扣,随着顾客最低保留价格增大而增大;随着最高保留价格的增大而减小. ③ 随着顾客最低保留价格的增大,厂商利润增加率不断越小;随着最高保留价格的增大,厂商利润的增长率先减少后增加. ④ 当顾客之间的保留价格有较大差异时,厂商采取数量折扣策略后利润增加明显.

参考文献:

[1] Hennessy T. Where category management really counts[J]. Progressive Grocer,1998, 77(2): 63.

[2] Talluri K T, van Ryzin G J. The theory and practice of revenue management[M]. New York: Springer, 2005.

[3] Weatherford R, Bodily S. Ataxonomy and research overview of perishable asset revenue management: yield management, overbooking and pricing [J]. Operations Research, 1992, 40: 831.

[4] Gallego G, van Ryzin G J. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons [J]. Management Science, 1994, 40: 999.

[5] Feng Y, Gallego G. Optimal starting times for end of season sales and optimal stopping times for promotional fares [J]. Management Science, 1995, 41: 1371.

[6] Chatwin R E. Optimal dynamic pricing of perishable products with stochastic demand and a finite set of prices [J]. European Journal of Operational Research, 2000, 125: 149.

[7] Aviv Y, Pazgal A. Optimal pricing of seasonal products in the presence of forward-looking consumers [J]. Manufacturing & Service Operations Management, 2008, 10(3): 339.

[8] 杨慧,周晶.易逝品降价时点设定问题的Cournot博弈模型[J].中国管理科学, 2006, 14(4):45.
YANG Hui, ZHOU Jing. A Cournot game of setting optimal markdown timing for perishable products[J]. Chinese Journal of Management Science, 2006, 14(4): 45.

[9] 杨慧,周晶.易逝性产品降价时点的Stackelberg博弈[J].管理工程学报, 2007,21(3): 155.
YANG Hui, ZHOU Jing. A Stackelberg game of optimal markdown timing for perishable products [J]. Journal of Industrial Engineering/Engineering Management, 2007, 21 (3): 155.

[10] 刘晓峰,黄沛.基于策略型消费者的最优动态定价与库存决策[J].管理科学学报,2009,12(5):18.
LIU Xiaofeng, HUANG Pei. Optimal dynamic pricing and inventory policy under strategic customers [J]. Journal of Management Sciences in China, 2009,12(5):18.

[11] 李根道,熊中楷,聂佳佳.库存和价格影响需求的易逝品动态定价[J].系统管理学报,2009,18,(4),402.
LI Gendao, XIONG Zhongkai, Nie Jiajia. Dynamic pricing for perishable products with inventory and pricing sensitive demand[J]. Journal of Systems & Management, 2009,18(4): 402.

[12] Chiang W C, James F, Huang Z M. et al. A game theoretic approach to quantity discount problems [J]. Decision Sciences, 1994, 25: 153.

[13] Li J L, Liu L W. Supply chain coordination with quantity discount policy [J]. International Journal of Production Economics, 2006, 101: 89.

[14] Weng Z K. Modeling quantity discounts under general price sensitive demand functions: optimal policies and relationships [J]. European Journal of Operational Research, 1995, 86: 300.

[15] Besanko D, Winston W. Optimal price skimming by a monopolist facing rational consumers [J]. Management Science, 1990, 36(5):555.