

面内变刚度矩形薄板自由振动问题的辛弹性分析

何建璋, 褚福运, 仲 政, 聂国隽

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要: 基于辛弹性的方法分析了变刚度矩形薄板的自由振动问题. 假设矩形板的弯曲刚度沿板的长度方向呈指数函数变化而泊松比为常数, 利用变分原理将其导入辛体系, 并应用分离变量法和本征值展开给出了求解面内变刚度矩形薄板自振频率的一种解析方法. 这种方法不同于传统的逆解法或者半逆解法, 它不需要提前假设试函数, 是一种更为理性的正向的求解方法. 通过这种方法可以得到变刚度板自由振动的频率方程, 数值算例表明该方法计算简便、结果精确, 可以得到变刚度板的各阶自振频率. 在此基础上, 详细研究了不同边界条件下, 梯度指数、泊松比以及长宽比对变刚度板自振频率的影响.

关键词: 面内变刚度; 自由振动; 矩形薄板; 辛弹性

中图分类号: O343.7

文献标志码: A

Symplectic Elasticity Approach for Free Vibration of a Rectangular Plate with In-plane Material Inhomogeneity

HE Jianzhang, CHU Fuyun, ZHONG Zheng, NIE Guojun

(College of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: This paper presents a symplectic elasticity approach for the analysis of the free vibration problems of rectangular plates with in-plane variable stiffness. Based on the Hamiltonian variational principle, the problem is formulated within the framework of state space and solved by the method of separation of variables along with the eigenfunction expansion technique based on the assumption that the flexural stiffness of plate varies exponentially with the length coordinate and the Poisson ratio is constant. Unlike the classical semi-inverse methods where a trial shape function is required to satisfy the geometric boundary conditions, this symplectic approach proceeds without any shape functions and it is a more rational and forward solution method. Exact frequency equations of a Kirchhoff rectangular plate with in-

plane variable stiffness are derived. Numerical results are given and the effects of different boundary conditions, the gradient index, Poisson's ratio and aspect ratio on natural frequency are studied through numerical examples.

Key words: in-plane variable stiffness; free vibration; rectangular plate; symplectic elasticity

功能梯度材料是指材料的组分沿某一方向连续变化, 从而导致材料的宏观性质随空间位置梯度变化. 功能梯度材料结构的力学研究越来越受关注.

目前的研究多集中在材料参数沿厚度方向变化的情况, 给出了功能梯度材料结构在弯曲、振动、屈曲以及断裂等方面的解析解^[1-4], 而对功能梯度板刚度面内变化的研究则很少. 尚新春^[5]研究了两对边简支两对边任意支撑的双向线性变刚度矩形板弯曲问题的解析解; 杨杰^[6]提出了单向变刚度矩形板结构分析的伽辽金线法; Liu 等^[7]提出了面内变刚度矩形板自由振动问题的半解析法. Bahar 等^[8]通过假设面内变刚度板的位移函数为切比雪夫多项式, 利用里兹法研究了变刚度板自由振动问题. 于天崇等^[9]假设板的挠度具有 Levy 解的形式得到了抗弯刚度沿板宽度方向按幂函数形式变化的矩形板弯曲问题的解.

上述解法一般都需要假设试函数, 然后利用逆解法或者半逆解法得到问题的解, 而近年来发展起来的辛弹性力学解法^[10], 不需要假设试函数, 为弹性力学问题的解析求解提供了一种新途径. 目前, 运用辛弹性的方法在板和功能梯度材料的力学问题求解上已取得了一些成果. Lim^[11]利用辛弹性理论求解了各向同性基尔霍夫板的自由振动; Lim^[12]和 Li^[13]利用辛弹性理论分别求解了各向同性简支板和正交各向异性固支板的弯曲问题; Hu^[14]应用同样的方法

收稿日期: 2012-12-23

基金项目: 国家自然科学基金 (11072177)

第一作者: 何建璋 (1976—), 男, 博士生, 主要研究方向为固体力学. E-mail: hjz1976123@126.com

通讯作者: 仲 政 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为固体力学. E-mail: zhongk@tongji.edu.cn

求解了正交各向异性薄板的自由振动和强迫振动问题. Zhao^[15-16]采用辛弹性的方法求解了功能梯度材料及功能梯度压电电压磁材料的平面问题. 本文通过假设板的刚度沿板的长度方向呈指数变化, 利用变分原理将其导入辛体系, 并应用分离变量法和本征值展开给出了求解面内变刚度矩形薄板自振频率的一种解析方法.

1 变刚度薄板的变分原理及哈密顿对偶方程

1.1 变刚度薄板的变分原理

考虑一变刚度基尔霍夫板的自由振动问题, 其弯曲刚度 $D(x, y)$ 是空间坐标的函数. 利用 Hellinger-Reissner 变分原理^[14], 定义如下泛函:

$$\Pi_2 = \iint_{\Omega} \left\{ -M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - U - \frac{1}{2} \rho(x, y) h \omega^2 w^2 \right\} dx dy - \int_{C_1+C_2} \left(\frac{\partial M_n}{\partial s} + Q_n \right) w ds + \int_{C_1} M_n \frac{\partial w}{\partial n} ds \quad (1)$$

式中: Ω 表示板在 xy 平面上所占的区域; M_x, M_y, M_{xy} 为板的内力矩; w 为板的挠度; $\rho(x, y)$ 为板的密度; h 为板厚; ω 为板的自振频率; n 和 s 分别表示边界的外法线和切线方向; M_n, M_s, Q_n 分别为板边界的弯矩、扭矩和剪力; C_1, C_2 分别代表固支和简支边界; U 为应变余能密度

$$U = \frac{M_x^2 - 2\nu M_x M_y + M_y^2 + 2(1+\nu)M_{xy}^2}{2D(x, y)(1-\nu^2)} \quad (2)$$

式中: ν 为材料的泊松比; $D(x, y)$ 为板的弯曲刚度.

对式(1)关于 M_x, M_y, M_{xy}, w 进行变分, 同时结合如下恒等式对 w 变分:

$$\iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) w - M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} dx dy = \int_C \left\{ \left(\frac{\partial M_s}{\partial s} + Q_n \right) w - M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right\} ds \quad (3)$$

可以得

$$\begin{aligned} \delta \Pi_2 = & \iint_{\Omega} \left\{ \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial U}{\partial M_x} \right) \delta M_x + \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial U}{\partial M_y} \right) \delta M_y + \right. \\ & \left. \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial U}{\partial M_{xy}} \right) \delta M_{xy} \right\} dx dy - \\ & \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \rho(x, y) h \omega^2 w \right) \delta w dx dy + \end{aligned}$$

$$\int_{C_3} \left(\frac{\partial M_s}{\partial s} + Q_n \right) \delta w ds - \int_{C_2+C_3} M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - \int_{C_1+C_2} \left(\frac{\partial \delta M_s}{\partial s} + \delta Q_n \right) w ds + \int_{C_1} \delta M_n \frac{\partial w}{\partial n} ds \quad (4)$$

式中: Q_x, Q_y 为板内截面上的剪力; C_3 代表自由边界.

精确解能使 $\delta \Pi_2 = 0$, 从而可导出变刚度板的平衡方程、物理方程以及边界条件.

定义等价剪力为

$$T_n = \frac{\partial M_s}{\partial s} + Q_n \quad (5)$$

则基尔霍夫板的几种典型边界条件可以表示为

$$\begin{cases} \text{固支边界 } C_1 & \frac{\partial w}{\partial n} = 0 & w = 0 \\ \text{简支边界 } C_2 & M_n = 0 & w = 0 \\ \text{自由边界 } C_3 & M_n = 0 & T_n = 0 \end{cases} \quad (6)$$

1.2 变刚度板的哈密顿对偶方程

引入约束条件

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (7)$$

由变分原理式(4)可得

$$\begin{cases} M_y = \nu M_x - D(x, y)(1-\nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{xy} = -D(x, y)(1-\nu) \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases} \quad (8)$$

在式(1)的域内部分增加 $T_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)$ 项, 并将式(8)带入到式(1), 同时只考虑变分方程的域内部分, 原来的变分原理就可以改写为如下的混合能变分原理:

$$\delta \iint_{\Omega} \left\{ -M_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + T_x \frac{\partial w}{\partial x} + H \right\} dx dy = 0 \quad (9)$$

式中:

$$\begin{aligned} H = & -T_x \theta - \nu M_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{D(x, y)}{2} (1-\nu^2) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \\ & D(x, y)(1-\nu) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 - \\ & \frac{1}{2} \rho(x, y) h \omega^2 w^2 - \frac{1}{2D(x, y)} M_x^2 \end{aligned} \quad (10)$$

对式(10)关于 w, θ, T_x, M_x 执行变分得

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left\{ \delta T_x \frac{\partial w}{\partial x} + T_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \delta M_x \frac{\partial \theta}{\partial x} - M_x \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} - \right. \\ \delta T_x \theta - T_x \delta \theta - \nu \delta M_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + \\ 2D(x, y)(1-\nu) \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \delta \theta}{\partial y} + D(x, y)(1-\nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \\ \left. \rho(x, y) h \omega^2 w \delta w - \frac{M_x}{D(x, y)} \delta M_x \right\} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

对式(11)分部积分,只保留域内部分,并令 $V_x = -T_x$,从而可以得到辛对偶方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{M_x}{D(x,y)} \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} = \rho(x,y)h\omega^2 w + \nu \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} - D(x,y) \cdot \\ (1-\nu^2) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial D(x,y)}{\partial y} (1-\nu^2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \\ \frac{\partial^2 D(x,y)}{\partial y^2} (1-\nu^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} = -V_x + 2D(x,y)(1-\nu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \\ 2 \frac{\partial D(x,y)}{\partial y} (1-\nu) \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases} \quad (12)$$

现考虑如图1所示的各向同性变刚度矩形薄板,板的弯曲刚度 D 和密度 ρ 只沿 x 方向变化,即 $D(x) = D_0 f(x)$, $\rho(x) = \rho_0 f(x)$,其中 D_0, ρ_0 分别为板在 $x=0$ 处的弯曲刚度和密度,则方程(12)退化为

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{M_x}{D(x)} \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} = D(x)(\nu^2 - 1) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2} + \rho(x)h\omega^2 w \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} = 2D(x)(1-\nu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - V_x \end{cases} \quad (13)$$

这时的对偶方程组是变系数的常微分方程组,无法利用分离变量法直接求解.若设面内刚度按照指数函数变化,即 $D(x) = D_0 e^{\gamma x}$, $\rho(x) = \rho_0 e^{\gamma x}$,可引入新的内力分量 \hat{M}_x, \hat{V}_x ,令

$$M_x = e^{\gamma x} \hat{M}_x \quad V_x = e^{\gamma x} \hat{V}_x \quad (14)$$

便能得到常系数的常微分方程组为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{H} \mathbf{v} \quad (15)$$

式中:

$\mathbf{H} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{D_0} \\ D_0(\nu^2 - 1) \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \rho_0 h \omega^2 & 0 & -\gamma \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \\ 0 & 2D_0(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} & -1 & -\gamma \end{bmatrix} \quad (16)$$

$\mathbf{v} = (w \quad \theta \quad \hat{V}_x \quad \hat{M}_x)^T$ 是状态向量. 尽管状态向量

和均匀材料板相同,但矩阵算子 \mathbf{H} 有了变化.只要状态向量 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 满足 $y = \pm b$ 处的任意一种齐次边界条件和约束方程(7)在边界 $y = \pm b$ 的条件

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} - \theta_i \right) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (17)$$

则有下面的恒等式:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{H} \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{H} \mathbf{v}_1 \rangle - \gamma \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \quad (18)$$

和传统 Hamilton 矩阵相比,式(18)多出了一项 $\gamma \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$,所以算子矩阵 \mathbf{H} 并非辛几何空间的 Hamilton 变换,但其性质和 Hamilton 算子矩阵非常相似,称为移位 Hamilton 矩阵^[15],可以证明该矩阵的本征值和本征向量与 Hamilton 矩阵有相似性质.

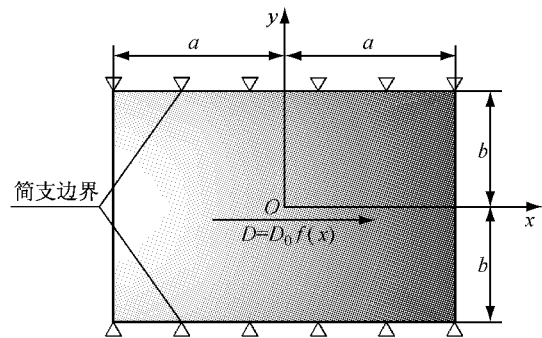


图1 面内变刚度薄板

Fig.1 Thin plate with in-plane material inhomogeneity

2 辛本征值分析

对于自由振动问题,式(15)是一个齐次常微分方程组,利用分离变量法,状态向量可写成

$$\mathbf{v} = \mathbf{X}(x) \mathbf{Y}(y) \quad (19)$$

将式(19)代入式(15)可得

$$\frac{d\mathbf{X}(x)}{dx} = \mu \mathbf{X}(x) \quad \mathbf{H} \mathbf{Y}(y) = \mu \mathbf{Y}(y) \quad (20)$$

式中: μ 为待求本征值; $\mathbf{Y}(y) = [W(y) \quad \theta(y) \quad \hat{V}_x(y) \quad \hat{M}_x(y)]^T$ 为与 μ 对应的本征向量.对于式(15)对应的辛本征值问题,可以证明它不存在零本征值.对于非零本征值的本征解,由于本征方程(15)是关于 y 联立的常微分方程组,应首先找到 y 方向的特征值 λ ,其对应的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -\mu & 1 & 0 & 0 \\ -\nu \lambda^2 & -\mu & 0 & -\frac{1}{D_0} \\ D_0(\nu^2 - 1) \lambda^4 + \rho_0 h \omega^2 & 0 & -\mu - \gamma & \nu \lambda^2 \\ 0 & 2D_0(1-\nu) \lambda^2 & -1 & -\mu - \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

展开上式可得

$$\lambda^4 + 2\lambda^2\mu^2 + \mu^4 + 2\gamma\lambda^2\mu + \gamma^2\mu^2 + 2\gamma\mu^3 + \gamma^2\lambda^2\nu - \frac{\rho_0 h \omega^2}{D_0} = 0 \quad (22)$$

当 $\gamma^3\mu\nu + \gamma^2\mu^2\nu + \frac{\gamma^4\nu^2}{4} + \frac{\rho_0 h \omega^2}{D_0} \neq 0$ 时,求解方程(22)可以得到特征值 λ 的 4 个成对的单根

$$\lambda_{1,2} = \pm\alpha \quad \lambda_{3,4} = \pm\beta \quad (23)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{-\gamma\mu - \mu^2 - \frac{\gamma^2\nu}{2} - \sqrt{\gamma^3\mu\nu + \gamma^2\mu^2\nu + \frac{\gamma^4\nu^2}{4} + \frac{\rho_0 h \omega^2}{D_0}}} \\ \beta = \sqrt{-\gamma\mu - \mu^2 - \frac{\gamma^2\nu}{2} + \sqrt{\gamma^3\mu\nu + \gamma^2\mu^2\nu + \frac{\gamma^4\nu^2}{4} + \frac{\rho_0 h \omega^2}{D_0}}} \end{cases} \quad (24)$$

于是辛本征向量的通解可以表达为

$$\mathbf{Y}(y) = \begin{cases} A_1 \cosh(\lambda_1 y) + \\ B_1 \cosh(\lambda_1 y) + \\ C_1 \cosh(\lambda_1 y) + \\ D_1 \cosh(\lambda_1 y) + \\ A_2 \sinh(\lambda_1 y) + A_3 \cosh(\lambda_3 y) + A_4 \sinh(\lambda_3 y) \\ B_2 \sinh(\lambda_1 y) + B_3 \cosh(\lambda_3 y) + B_4 \sinh(\lambda_3 y) \\ C_2 \sinh(\lambda_1 y) + C_3 \cosh(\lambda_3 y) + C_4 \sinh(\lambda_3 y) \\ D_2 \sinh(\lambda_1 y) + D_3 \cosh(\lambda_3 y) + D_4 \sinh(\lambda_3 y) \end{cases} \quad (25)$$

式(25)的 16 个常数并不是彼此独立的,独立的常数只有 4 个,这里选择 A_1, A_2, A_3, A_4 作为独立常数,并将其带入式(20)的第 2 式可得

$$\begin{cases} B_i = \mu A_i & i=1,2,3,4 \\ C_i = [2D_0(1-\nu)\lambda_i^2\mu + D_0(\mu+\gamma)(\nu\lambda_i^2+\mu^2)]A_i & i=1,2 \\ C_i = [2D_0(1-\nu)\lambda_i^2\mu + D_0(\mu+\gamma)(\nu\lambda_i^2+\mu^2)]A_i & i=3,4 \\ D_i = -D_0(\nu\lambda_i+\mu^2)A_i & i=1,2 \\ D_i = -D_0(\nu\lambda_i+\mu^2)A_i & i=3,4 \end{cases} \quad (26)$$

对于其他有重根的情况,其求解过程和有 4 个互不相等的根的情况求解过程完全类似,这里对其他情况就不再讨论。

3 对边简支变刚度薄板自由振动的通解

方程(23)中有 3 个未知量 $\lambda_i, \mu, \omega, \lambda_i$ 要通过 $y = \pm b$ 的边界条件来确定,这样 μ 就可以用 λ_i 和 ω 来表示,令其通解满足 $x = \pm a$ 的边界条件,可得到频率方程。在频率方程中只有 ω 是未知的,求解频率方

程就可以得到面内变刚度板的各阶自振频率。

$y = \pm b$ 为简支边界条件时,其边界条件的方程可以表示为

$$w = 0 \quad M_y = 0 \quad (27)$$

可用 w, M_x 表示为

$$w=0, \quad M_y = \nu M_x - D(x)(1-\nu^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (28)$$

将式(25)带入式(28),并要求其对称部分和反对称部分均满足边界条件,可以得到如下方程组:

$$\begin{cases} (\nu\mu^2 + \lambda_1^2) \cosh(\lambda_1 b) A_1 + (\nu\mu^2 + \lambda_3^2) \cosh(\lambda_3 b) A_3 = 0 \\ \cosh(\lambda_1 b) A_1 + \cosh(\lambda_3 b) A_3 = 0 \\ (\nu\mu^2 + \lambda_1^2) \sinh(\lambda_1 b) A_2 + (\nu\mu^2 + \lambda_3^2) \sinh(\lambda_3 b) A_4 = 0 \\ \sinh(\lambda_1 b) A_2 + \sinh(\lambda_3 b) A_4 = 0 \end{cases} \quad (29)$$

要使该方程组有解,要求关于 A_i 的系数矩阵的行列式为零,可得

$$\cosh(\lambda_1 b) \cosh(\lambda_3 b) \sinh(\lambda_1 b) \sinh(\lambda_3 b) = 0 \quad (30)$$

特征方程(30)的根为 $\lambda_1 = \pm i \frac{n\pi}{2b} (n=0, 1, 2, 3, \dots)$

或 $\lambda_3 = \pm i \frac{n\pi}{2b}$, 将其带入式(22),可得

$$\begin{cases} \mu_n^1 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 - 4\sqrt{\frac{\rho_0 h \omega^2}{D_0} + \nu\gamma^2\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2}}}{2} \\ \mu_n^2 = -(\mu_n^1 + \gamma) \\ \lambda_3 = \sqrt{-\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{\rho_0 h \omega^2}{D_0} + \nu\gamma^2\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2} - \gamma^2\nu} \\ \left(\lambda_1 = \pm i \frac{n\pi}{2b}\right) \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \mu_n^3 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 + 4\sqrt{\nu\gamma^2\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 + \frac{\rho_0 h \omega^2}{D_0}}}}{2} \\ \mu_n^4 = -(\mu_n^3 + \gamma) \\ \lambda_1 = \sqrt{-\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{\rho_0 h \omega^2}{D_0} + \nu\gamma^2\left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2} - \gamma^2\nu} \\ \left(\lambda_3 = \pm i \frac{n\pi}{2b}\right) \end{cases} \quad (32)$$

对于均匀材料板,即 $\gamma=0$ 的情况,从式(31), (32)可以看出,其本征值和特征值均和泊松比无关,而对 $\gamma \neq 0$ 的变刚度板,其本征值和特征值均和材料的泊松比有关。解出本征值后,将其代入方程(29)就可以得出 A_1, A_2, A_3, A_4 的一组非平凡解。

$$\begin{aligned} A_1 &= \cosh(\lambda_3 b) & A_2 &= \sinh(\lambda_3 b), \\ A_3 &= -\cosh(\lambda_1 b) & A_4 &= -\sinh(\lambda_1 b) \end{aligned} \quad (33)$$

从而可以得到本征向量

$$W(y) = \cosh(\lambda_3 b) \cosh(\lambda_1 y) + \sinh(\lambda_3 b) \sinh(\lambda_1 y) - \cosh(\lambda_1 b) \cosh(\lambda_3 y) - \sinh(\lambda_1 b) \sinh(\lambda_3 y) \quad (34)$$

其余的状态参量 $\theta(y)$, $\hat{V}(y)$, $\hat{M}(y)$ 可根据式(25)及(26)得到. 根据移位 Hamilton 矩阵的性质, 在求出所有本征值和本征向量后便可利用展开定理给出原问题的通解

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} [f_1(n) e^{\mu_n^1 x} Y_n^1(y) + f_2(n) e^{-(\mu_n^1 + \gamma)x} Y_n^2(y) + f_3(n) e^{\mu_n^3 x} Y_n^3(y) + f_4(n) e^{-(\mu_n^3 + \gamma)x} Y_n^4(y)] \quad (35)$$

其中函数 $f_i(n)$ ($i=1, 2, 3, 4$) 是取决于边界 $x=\pm a$ 的待定参数. 在方程(35)中只有待定参数 $f_i(n)$ 和结构的自振圆频率 ω 是未知的, 令式(35)满足 $x=\pm a$ 的边界条件, 就可以得到频率方程, 进而求得各阶自振圆频率.

4 变刚度板的频率方程

对于边界 $x=\pm a$ 的边界条件可以是简支边界条件和固支边界条件的任意组合, 因此可以给出如下 4 种边界条件:

(1) 四边简支 (SSSS)

$$w(a, y) = w(-a, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(-a, y) = 0 \quad (36)$$

(2) $x=-a$ 边固支, 其余三边简支 (SCSS)

$$w(-a, y) = w(a, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(-a, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(a, y) = 0 \quad (37)$$

(3) $x=a$ 边固支, 其余三边简支 (SSSC)

$$w(-a, y) = w(a, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(-a, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a, y) = 0 \quad (38)$$

(4) $x=\pm a$ 对边固支, 其余两对边简支 (SCSC)

$$w(-a, y) = w(a, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(-a, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(a, y) = 0 \quad (39)$$

由于板的非均匀性导致边界 SCSS 和 SSSC 所对应的频率方程不再一致, 其固有频率也有较大差异, 需要分别计算. 将式(35)分别代入式(36)~(39), 取 $f_1(n)W_n^1$, $f_2(n)W_n^2$, $f_3(n)W_n^3$ 及 $f_4(n)W_n^4$ 作为待定系数, 由系数矩阵的行列式为零, 可得到 4 种边界条件下的频率方程.

(1) SSSS 的频率方程

$$8(\mu_n^1 - \mu_n^3)^2 (\mu_n^1 + \mu_n^3) (\mu_n^1 + \mu_n^3 + 2\gamma) \cdot$$

$$\cosh\left[\left(\mu_n^1 + \frac{\gamma}{2}\right)a\right] \sinh\left[\left(\mu_n^1 + \frac{\gamma}{2}\right)a\right] \cdot$$

$$\cosh\left[\left(\mu_n^3 + \frac{\gamma}{2}\right)a\right] \sinh\left[\left(\mu_n^3 + \frac{\gamma}{2}\right)a\right] =$$

$$\gamma^2 (\gamma + 2\mu_n^1) (\gamma + 2\mu_n^3) (1 - \cosh[2(\mu_n^1 - \mu_n^3)a]) \quad (40)$$

(2) SCSS 的频率方程

$$(\mu_n^1 - \mu_n^3)^2 (\mu_n^1 + \mu_n^3) \sinh[2(\gamma + \mu_n^1 + \mu_n^3)a] - (\mu_n^1 - \mu_n^3) (\gamma + \mu_n^1 + \mu_n^3)^2 \sinh[2(\mu_n^1 - \mu_n^3)a] + \gamma (\gamma + \mu_n^1 + \mu_n^3)^2 \cosh[2(\mu_n^1 - \mu_n^3)a] = \gamma (\gamma + 2\mu_n^1) (\gamma + \mu_n^3) + \gamma (\mu_n^1 - \mu_n^3)^2 e^{-2a(\gamma + \mu_n^1 + \mu_n^3)} \quad (41)$$

(3) SSSC 的频率方程

$$(\mu_n^1 - \mu_n^3)^2 (\mu_n^1 + \mu_n^3) \sinh[2(\gamma + \mu_n^1 + \mu_n^3)a] - (\mu_n^1 - \mu_n^3) (\gamma + \mu_n^1 + \mu_n^3)^2 \sinh[2(\mu_n^1 - \mu_n^3)a] - \gamma (\gamma + \mu_n^1 + \mu_n^3)^2 \cosh[2(\mu_n^1 - \mu_n^3)a] = -\gamma (\gamma + 2\mu_n^1) (\gamma + \mu_n^3) - \gamma (\mu_n^1 - \mu_n^3)^2 e^{2a(\gamma + \mu_n^1 + \mu_n^3)} \quad (42)$$

(4) SCSC 的频率方程

$$2(\mu_n^1 - \mu_n^3)^2 \sinh\left[2\left(\mu_n^1 + \frac{\gamma}{2}\right)a\right] \sinh\left[2\left(\mu_n^3 + \frac{\gamma}{2}\right)a\right] = (\gamma + 2\mu_n^1) (\gamma + 2\mu_n^3) (\cosh[2(\mu_n^1 - \mu_n^3)a] - 1) \quad (43)$$

5 算例与讨论

算例以图 1 所示的变刚度板为研究对象, 表 1 给出了泊松比 $\nu=0.3$ 的变刚度板 ($a=b$) 在不同梯度指数及边界条件下的前 6 阶自振频率 f ($f=4b^2\omega\sqrt{\rho_0 h/D_0}$). 当变刚度板的梯度指数 $\gamma=0$ 时, 变刚度板退化成均匀板, 可以将此时板的自振频率与经典解对比, 计算结果表明退化后的结果和经典解吻合得很好, 也验证了这种方法的有效性. 同时在变刚度板的梯度指数较小时, 变刚度板的自振频率应该和均匀板非常接近, 这也和表 1 给出的计算结果一致.

人们更为关注的是板的变刚度性质对板自振频率的影响. 从表 1 和图 2 可以看出 SSSS, SSSC, SCSC 3 种边界条件下, 其自振频率随着梯度指数的增加而增加, 而对于 SCSS 边界条件下, 在梯度指数较小时其自振频率随着梯度指数的增加而减小, 但随着梯度指数的持续增加, SCSS 的各阶自振频率都会达到一个最小值, 之后其自振频率将随着梯度指数的增加而增加. 这主要是因为变刚度的存在使得控制方程中和刚度相关的项数增多, 而和质量相关的项数不变, 而结构的自振频率正比于弯曲刚度, 反比于质量, 所以不难理解 SSSS, SSSC 及 SCSC 板的自振频率随着梯度指数的增加而增加. 边界条件同样会对结构的自振频率产生显著影响, 对刚度大的边界施加更为严格的约束条件, 必然会导致 SSSC

的自振频率高于 SCSS,对刚度较小的边界施加更严格的约束,将导致刚度和约束在某种程度上的制约或抵消,从而出现了 SCSS 板自振频率随着梯度指数的增加反而减小的情况,但随着梯度指数的进一步增加,刚度对自振频率的控制作用将超过边界条件的制约,进而出现了自振频率随梯度指数增加而增加的现象.从上述角度也可以解释下面的规律.由于板的非均匀性导致边界组合 SCSS 和 SSSC 所对应的频率方程不再一致,结合图 2 可以看出,SSSC 的自振频率始终高于 SCSS,同时随着梯度指数的增加,SCSS 的自振频率会越来越接近 SSSC,SSSC 的自振频率也会越来越接近 SCSC.

表 1 不同边界条件及梯度指数变刚度方板的前 6 阶自振频率
Tab.1 Sixth-order natural frequency of variable stiffness square plate with different boundary conditions and gradient index

边界条件	梯度指数 γ	结果	$f=4b^2\omega\sqrt{\rho_0h/D_0}$					
			1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶	6 阶
SSSS	均匀板	Lim ^[1]	19.739	49.348	49.348	78.957	98.696	98.696
	0	本文解	19.739	49.348	49.348	78.957	98.696	98.696
	0.1		19.740	49.349	49.349	78.958	98.697	98.697
	1.0		19.776	49.440	49.444	79.063	98.797	98.836
	2.0		19.895	49.722	49.735	79.384	99.104	99.259
	5.0		21.053	51.877	51.945	81.730	101.364	102.300
SCSS	均匀板	Lim ^[1]	23.646	51.674	58.646	86.135	100.270	113.228
	0	本文解	23.646	51.674	58.646	86.135	100.270	113.228
	0.1		23.584	51.650	58.563	86.079	100.259	113.138
	1.0		23.096	51.525	57.935	85.702	100.255	112.478
	2.0		22.710	51.591	57.498	85.534	100.457	112.068
	5.0		22.689	53.218	57.920	86.657	102.450	112.934
SSSC	均匀板	Lim ^[1]	23.646	51.674	58.646	86.135	100.270	113.228
	0	本文解	23.646	51.674	58.646	86.135	100.270	113.228
	0.1		23.711	51.701	58.733	86.192	100.283	113.322
	1.0		23.096	51.525	57.935	85.702	100.255	112.478
	2.0		25.296	52.632	60.906	87.807	100.949	115.750
	5.0		29.733	55.999	66.592	92.507	103.743	122.161
SCSC	均匀板	Lim ^[1]	28.951	54.743	69.327	94.585	102.216	129.096
	0	本文解	28.951	54.743	69.327	94.585	102.216	129.096
	0.1		28.952	54.744	69.329	94.587	102.217	129.098
	1.0		29.090	54.868	69.506	94.746	102.331	129.294
	2.0		29.515	55.250	70.046	95.229	102.677	129.892
	5.0		32.807	58.115	73.922	98.705	105.218	134.117

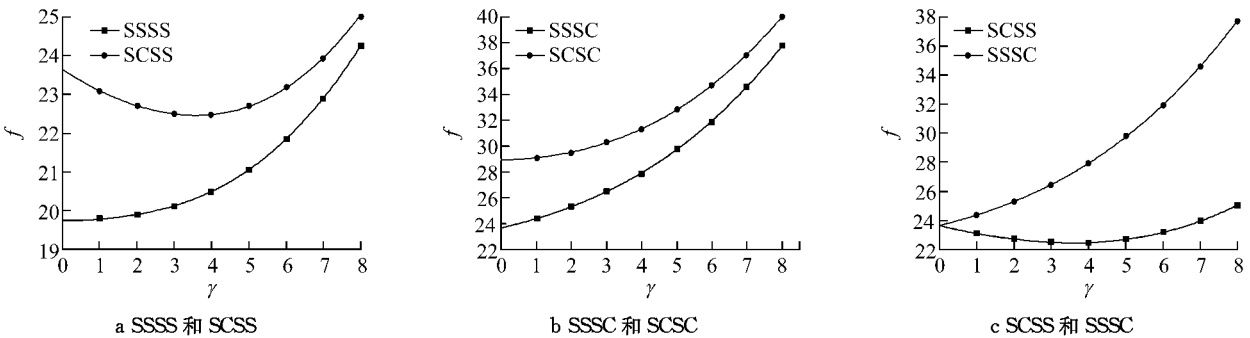


图 2 不同边界条件下 1 阶自振频率和梯度指数的关系

Fig.2 The relationship of first order natural frequency and gradient index with different boundary conditions

对于均匀板的 SSSS,SCSS,SSSC,SCSC 这 4 种典型的边界条件,其自振频率和材料的泊松比无关,但对于变刚度板而言,从式(31),(32)以及相应的频率方程可以看出,其自振频率和泊松比有关.图 3 给出了 4 种典型边界条件变刚度方板量纲一化的自振频率随泊松比 ν 的变化,由计算结果可以看出,对于变刚度板,其自振频率随着泊松比的增加而减小,当变刚度板退化成均匀板时,其自振频率和泊松比无关.

图 4 给出了变刚度板在 SSSS, SCSS, SSSC, SCSC 4 种边界条件下的量纲一化自振频率与长宽

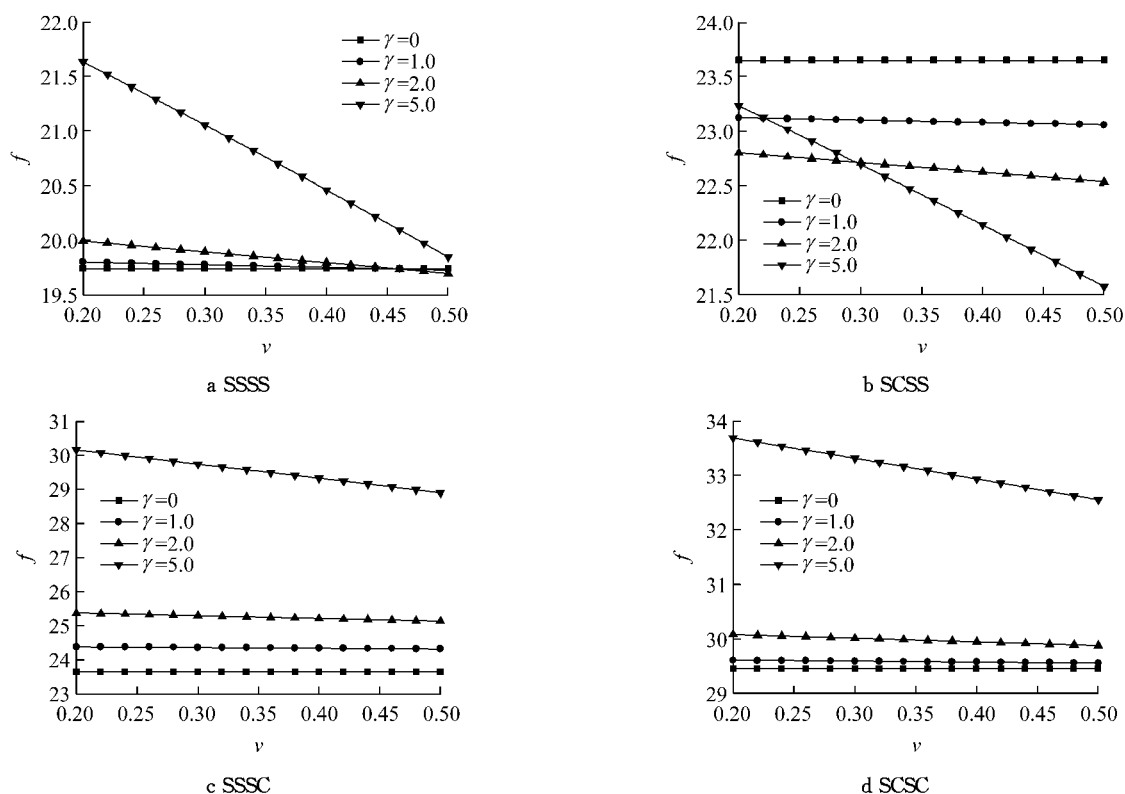


图3 4种典型边界变刚度板自振频率和泊松比的关系

Fig.3 The relationship of first order natural frequency and Poisson's ratio with different boundary conditions and gradient index

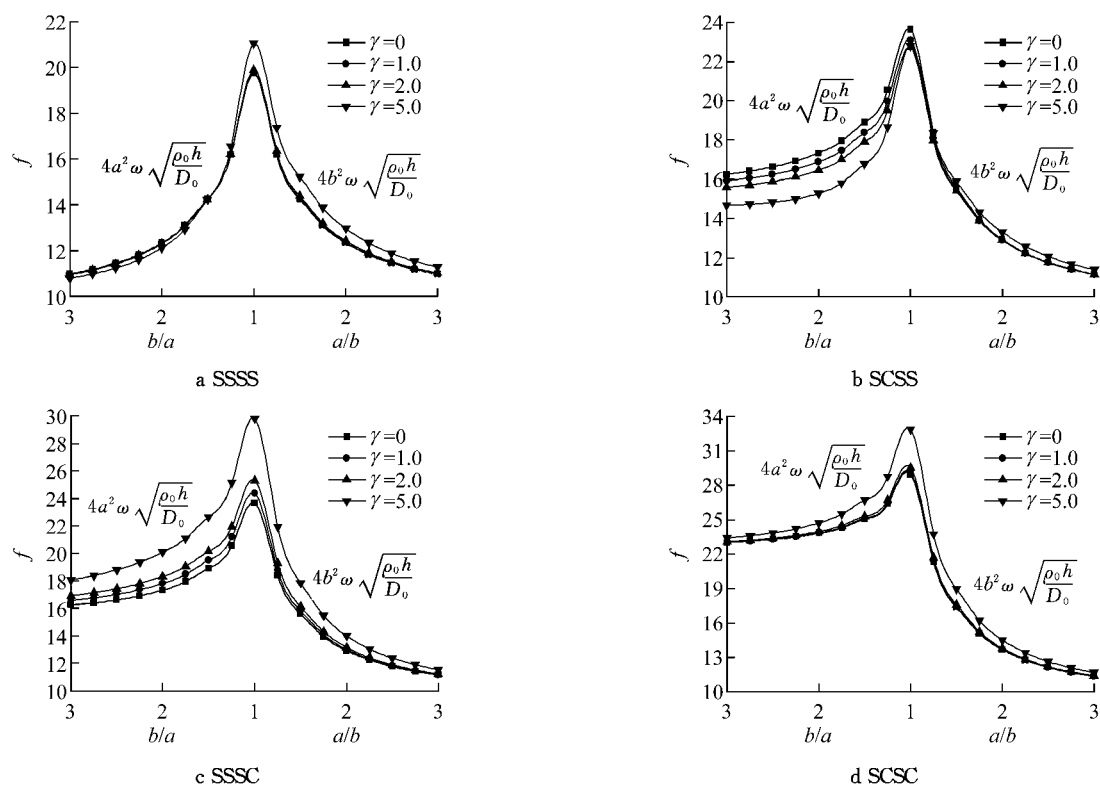


图4 4种典型边界变刚度板自振频率和长宽比的关系

Fig.4 The relationship of first order natural frequency and aspect ratio with different boundary conditions and gradient index

比的关系.横坐标的右半轴表示板的长宽比 a/b ,左半轴表示板的宽长比 b/a .从图中可以看出,对于SCSS宽长比 $b/a \geq 1.0$,会出现随着梯度指数的增加而自振频率减小的现象,其他边界和长宽比条件下,自振频率均随梯度指数的增加而增加.

6 结论

本文将辛弹性理论应用于求解非均匀材料板,假设矩形板的弯曲刚度沿板的长度方向呈指数函数变化,利用变分原理将其导入辛体系,并应用分离变量法和本征值展开给出了对边简支、另两边任意支撑的变刚度板的频率方程,通过求解频率方程可以得到变刚度板各阶自振频率的精确解.从求解过程可以看出,这种方法不同于传统的逆解法或者半逆解法,它不需要提前假设试函数,是一种更为理性的正向的求解方法.

算例表明,SSSS,SSSC,SCSC 3种边界条件下,其自振频率随着梯度指数的增加而增加,而对于SCSS边界条件下,在梯度指数较小时其自振频率随着梯度指数的增加而减小,达到一个最小值,然后其自振频率将随着梯度指数的增加而增加.

这种方法还可以进一步推广到求解弯曲刚度指数变化的任意边界条件的矩形薄板及中厚板的自由振动、屈曲和弯曲问题.

参考文献:

- [1] Zhong Z, Yu T. Vibration of a simply supported functionally graded piezoelectric rectangular plate [J]. *Smart Materials and Structure*, 2006, 15: 1404.
- [2] Zhong Z, Shang E. Closed-form solutions of three-dimensional Functionally Graded Plates [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2008, 15: 355.
- [3] Zhong Z, Cheng Z Q. Fracture analysis of a functionally graded strip with arbitrary distributed material properties [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45: 3711.
- [4] Thai H T, Choi D H. An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates [J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2012, 36: 1008.
- [5] 尚新春. 双向变刚度矩形板弯曲问题的精确解[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 1991, 27(2): 24.
- Shang X C. Exact solution on a problem of bending of double-direction rectangular elastic plates of variable rigidity [J]. *Journal of Lanzhou University: Natural Sciences*, 1991, 27(2), 24.
- [6] 杨杰. 单向变刚度板结构分析的伽辽金线法[J]. 武汉化工学院学报, 1996, 8(1): 57.
- YANG Jie. The structural analysis of plates with unidirectionally varying rigidity on Galerkin line method [J]. *Journal of Wuhan Institute of Chemical Technology*, 1996, 18(1), 57.
- [7] Liu D Y, Wang C Y, Chen W Q. Free vibration of FGM plates with in-plane material inhomogeneity [J]. *Composite Structures*, 2010, 92(5): 1047.
- [8] Bahar U, Metin A, Seckin F. Vibration analyses of FGM plates with in-plane material inhomogeneity by Ritz method [J]. *Composite Structures*, 2012, 94: 1398.
- [9] 于天崇, 聂国隽, 仲政. 变刚度矩形板弯曲问题的 Levy 解 [J]. 力学季刊, 2012, 13(1): 15.
- YU Tianchong, NIE Guojun, ZHONG Zheng. Levy-type solution for the bending of rectangular plate with variable stiffness [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2012, 13(1): 15.
- [10] Yao W A, Zhong W X, Lim C W. *Symplectic elasticity* [M]. Singapore: World Scientific, 2009.
- [11] Lim C W, Lü C F, Xiang Y, et al. On new symplectic elasticity approach for exact free vibration solutions of rectangular Kirchhoff plates [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2009, 47: 131.
- [12] Li R, Zhong Y. On a new symplectic geometry method for exact bending solutions of orthotropic rectangular plates with two opposite sides clamped [J]. *Acta Mechanica*, 2011, 216: 333.
- [13] Hu X F, Yao W A, Fang Z X, et al. Vibration solutions of rectangular orthotropic plates by symplectic geometry method [J]. *The IES Journal. Part A: Civil & Structural Engineering*, 2012, 5(4): 211.
- [14] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- HU Haichang. *Variational principles of theory of elasticity with applications* [M]. Beijing: Science Press, 1981.
- [15] Zhao L, Chen W Q. Symplectic analysis of plane problems of functionally graded piezoelectric materials [J]. *Mechanics of Materials*, 2009, 41: 1330.
- [16] Zhao L, Chen W Q, Lü C F. Symplectic elasticity for bi-directional functionally graded materials [J]. *Mechanics of Materials*, 2012, 54: 32.