第 41 卷第 12 期
2013 年 12 月
同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)
Vol. 41 No. 12
Dec. 2013

文章编号：0253-374X(2013)12-1898-05　　DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2013.12.022

非线性稳定解析系统最优控制的迭代法

刘国华[1,2]，朱经浩[1]
（1. 同济大学 数学系，上海 200092；2. 上海理工大学 理学院，上海 200093）

摘要：研究非线性稳定解析系统的最优控制问题. 推广线性稳定系统最优控制的 Kleinman 迭代法，构造非线性稳定反馈控制序列，使得相应的评价泛函序列单调下降和一致收敛，并证明非线性稳定反馈控制序列一致收敛到非线性最优控制问题的最优反馈控制. 同时，建立一个待定幂级数算法，计算迭代序列，逼近非线性最优控制问题的最优反馈控制，并给出一个例子加以演示.

关键词：非线性稳定解析系统；Kleinman 迭代法；非线性稳定最优反馈控制
中图分类号：O 232　　**文献标志码**：A

An Iterative Technique for Nonlinear Optimal Control

LIU Guohua[1,2], *ZHU Jinghao*[1]
(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Science, University of Shanghai for Science & Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: We focus on nonlinear optimal control to stabilizable analytic systems. By generalizing Kleinman iteration for linear system, we construct a sequence of nonlinear stabilizing feedback control, which is uniformly converging to an optimal feedback control. We present an algorithm for computing the control sequence. An example is illustrated.

Key words: nonlinear analytic system; Kleinman iteration; nonlinear optimal feedback control

本文考虑非线性解析系统

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)),\quad t\in[0,+\infty)$$
$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1}$$

这里，$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times m}$，假设$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$是稳定对[1-2]，即存在$\boldsymbol{K}\in\mathbf{R}^{m\times n}$使得$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$是稳定阵；而$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$为实解析函数，在$\mathbf{R}^{n\times m}$的原点的邻域内按$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$展开式中每项的次数都大于或等于 2. 另外，考虑容许的控制函数$\boldsymbol{u}(\cdot)\in L^2([0,\infty);\mathbf{R}^m)$和初始状态$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$.

接着定义如下泛函：

$$J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})]\mathrm{d}t \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{W}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{U}\in\mathbf{R}^{m\times m}$都是对称正定矩阵，而$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$是实解析函数，按$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$展开式中每项的次数都大于或等于 3.

由于$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$是稳定对，并注意到$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$按$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$的展开式仅包含次数大于或等于 2 的项，对于反馈控制$\boldsymbol{u}(\cdot)=\boldsymbol{K}x(\cdot)$($\boldsymbol{K}\in\mathbf{R}^{m\times n}$使得$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$是稳定阵)，当$\|\boldsymbol{x}_0\|$适当小时，由常微分方程经典理论[1]可知，方程(1)以$\boldsymbol{x}_0$为初始状态的解$\boldsymbol{x}_u(\cdot)$在$[0,\infty)$上是惟一存在且稳定的，同时泛函$J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})$取有限值. 这样就可提出以下非线性稳定解析系统最优控制问题[1]：当$\|\boldsymbol{x}_0\|$适当小时，寻求$\dot{\boldsymbol{u}}(\cdot)\in L^2([0,\infty),\mathbf{R}^m)$，使得对任意$\boldsymbol{u}(\cdot)\in L^2([0,\infty);\mathbf{R}^m)$，有

$$J(\boldsymbol{x}_0,\hat{\boldsymbol{u}})\leqslant J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}) \tag{3}$$

与上述非线性系统最优控制问题相应的线性系统最优控制问题为

$$\min J(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u})=\int_0^\infty[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t$$
$$\text{s.t. } \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t$$
$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{4}$$

这里矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{W},\boldsymbol{U}$满足前述要求. 由经典的 LQ(线性二次)最优控制理论可知，线性稳定系统最优控制问题(4)的最优控制取反馈形式：$\hat{\boldsymbol{u}}=-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$，其中正定对称矩阵$\boldsymbol{P}$是下面 Riccati 方程的解：

收稿日期：2013-01-07
第一作者：刘国华(1974—)，女，讲师，博士生，主要研究方向为最优控制. E-mail:liugh265@163.com
通讯作者：朱经浩(1949—)，男，教授，博士生导师，主要研究方向为最优控制和数学规划. E-mail: jinghaok@online.sh.cn

$$\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{W}-\boldsymbol{PBU}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=0 \tag{5}$$

定理 1[1]　设在 $\mathbf{R}^n$ 的原点附近定义的实解析函数 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$ 和 $h(\boldsymbol{x})$，其按 $\boldsymbol{x}$ 展开式中分别只含次数大于 1 和 2 的项，记向量函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$ 和函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}+h(\boldsymbol{x})$. 若 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}),V(\boldsymbol{x})$ 满足下列偏微分方程：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{f}_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}V_x(\boldsymbol{x})+2\boldsymbol{Uu}+\boldsymbol{g}_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0,\\(\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}V_x(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Wx}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Uu}+\\\qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0\end{cases} \tag{6}$$

则 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$ 为非线性稳定解析系统最优控制问题的最优反馈控制，而 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}+h(\boldsymbol{x})$ 为非线性稳定解析系统最优控制问题的值函数. 进而，若记 $\boldsymbol{x}(t)$ 为方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})),\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

的解，则当 $\|\boldsymbol{x}_0\|$ 适当小时，$\hat{\boldsymbol{u}}(t)=-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Px}(t)+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}(t))$ 是非线性稳定解析系统最优控制问题(3)的最优控制.

本文旨在给出求解上述偏微分方程(6)的迭代法. 首先介绍了线性稳定系统最优控制问题的 Riccati 方程的迭代法[3]. 然后，给出求解问题(3)的非线性迭代法. 为了把非线性迭代法付诸实施，在第 3 节给出一个待定幂级数算法. 最后，给出计算实例.

1　线性系统最优控制 Riccati 方程的迭代法

这里简单介绍求解 Riccati 矩阵代数方程(5)的解 $\boldsymbol{P}$ 的 Kleinman-Newton 迭代方法[2-3].

由于 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 是稳定对，可选取矩阵 $\boldsymbol{K}_0\in\mathbf{R}^{m\times n}$，使得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_0$ 为稳定阵，令

$$\boldsymbol{P}_0=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_0)^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{K}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{UK}_0)\mathrm{e}^{t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_0)}\mathrm{d}t$$

一般地，当 $i\geqslant 1$ 时，取 $\boldsymbol{K}_i(t)=-\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i-1})$，可得稳定阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_i$，计算

$$\boldsymbol{P}_i=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_i)^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{UK}_i)\mathrm{e}^{t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_i)}\mathrm{d}t$$

由此得到矩阵序列 $\{\boldsymbol{P}_i\}$ 满足 $\boldsymbol{P}_i\geqslant\boldsymbol{P}_{i+1}>0$，$\lim\limits_{i\to\infty}\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{P}$，其中正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足 Riccati 矩阵方程

$$\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{W}-\boldsymbol{PBU}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=0$$

2　非线性系统最优控制问题的迭代法

本节把线性稳定系统最优控制问题的 Riccati 矩阵代数方程的迭代法推广到非线性系统最优控制问题(3).

由前面已得到的 Riccati 矩阵代数方程的解 $\boldsymbol{P}$ 的迭代序列，构造以下若干辅助函数：取 $D_0(\boldsymbol{x})$ 恒为零，对 $i=1,2,\cdots$

$$\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{x}+D_{i-1}(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

$$V_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}+h_i(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

和

$$H_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\frac{\partial^{\mathrm{T}}V_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Wx}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Uu}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \tag{9}$$

其中 $D_i(\boldsymbol{x}),h_i(\boldsymbol{x})$ 待定，使得 $D_i(\boldsymbol{x})$ 按 $\boldsymbol{x}$ 展开式中每项的次数大于 1，而 $h_i(\boldsymbol{x})$ 的按 $\boldsymbol{x}$ 分量的展开式中每项的次数大于 2.

以上 $D_i(\boldsymbol{x}),h_i(\boldsymbol{x}),i=1,2,\cdots$ 可按如下步骤得到：

(1) 对于 $i=1,2,\cdots$，当 $D_{i-1}(\boldsymbol{x})$ 已得到，由以下方程得到 $h_i(\boldsymbol{x})$

$$\begin{aligned}H_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}))&=\frac{\partial^{\mathrm{T}}V_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x})))+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Wx}+\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Uu}_i(\boldsymbol{x})+\\&\quad\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}))=\left(2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\frac{\partial^{\mathrm{T}}h_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right)(\boldsymbol{Ax}+\\&\quad\boldsymbol{Bu}_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x})))+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Wx}+\\&\quad\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Uu}_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}))=0\end{aligned} \tag{10}$$

上式可用如下积分表示：对于 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{Bu}_i(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}(t)))$，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}$

$$V_i(\boldsymbol{x})=\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Wx}(t)+\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{Uu}_i(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}(t)))]\mathrm{d}t \tag{11}$$

(2) 对于 $i=1,2,\cdots$，当 $h_i(\boldsymbol{x})$ 已得到，在下面方程中令

$$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}+D_i(\boldsymbol{x})$$

可得到 $D_i(\boldsymbol{x})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}&=\frac{\partial^{\mathrm{T}}V_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{B}+\frac{\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}\right)+2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}+\\\frac{\partial\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}&=\left(2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\frac{\partial^{\mathrm{T}}h_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{B}+\frac{\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}\right)+\\2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}&+\frac{\partial\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}=0\end{aligned} \tag{12}$$

记 $\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}+D_i(\boldsymbol{x})$，就有

$$\frac{\partial H_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x}))}{\partial\boldsymbol{u}}=0 \tag{13}$$

引理 1[4-5]　当 $\|\boldsymbol{x}\|$ 适当小，存在正数 α，使得对 $i=1,2,\cdots$，一致有 $\|D_i(\boldsymbol{x})\|\leqslant\alpha\|\boldsymbol{x}\|$.

定理 2　在原点的一个邻域内，$\{V_i(\boldsymbol{x})\}$ $i=1$,

2,…是一列单调下降的正定函数列,并且一致收敛.

证明 由于$\boldsymbol{W},\boldsymbol{U}$都是正定矩阵，而$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}(-\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i-1}))$是稳定阵，由引理1可知，当$\|\boldsymbol{x}\|$适当小时，$V_i(\boldsymbol{x})$的积分表达式(11)有定义，并且当$\boldsymbol{x}\neq 0$，$V_i(\boldsymbol{x})>0$. 同时因$\boldsymbol{U}>0$，利用式(12)，当$\|\boldsymbol{x}\|$适当小时，有

$$\frac{\partial^2 H_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{u}^2}=2\boldsymbol{U}+\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x}))>0$$

其中$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x}))=o(\|\boldsymbol{x}\|)$. 这样，当$\|\boldsymbol{x}\|$适当小时，有

$$H_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x}))\leqslant 0$$

从而由$H_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x}))$的表达式，当$\|\boldsymbol{x}\|$适当小时，有

$$\begin{aligned}V_{i+1}(\boldsymbol{x})=&\int_0^{\infty}[\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}(t)+\\&\boldsymbol{u}_{i+1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x}(t))+\\&\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x}(t)))]\mathrm{d}t\leqslant\\&-\int_0^{\infty}\frac{\partial^{\mathrm{T}}V_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x})+\\&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_{i+1}(\boldsymbol{x})))\mathrm{d}t=V_i(\boldsymbol{x})\end{aligned}\tag{14}$$

所谓当$\|\boldsymbol{x}\|$适当小，即逐步圈定原点的一个邻域. 由式(14)和(8)知，在原点的一个邻域内$\{V_i(\boldsymbol{x})\}$是一列单调下降的正定函数列. 根据$V_i(\boldsymbol{x})$的积分表达式(11)，利用引理1可得到，在这个邻域内$\{V_i(\boldsymbol{x})\}$是等度连续的[5]. 这样经由分析方法[5]可得到，$\{V_i(\boldsymbol{x})\}$在原点的一个邻域内是一致收敛的. 证毕.

定理3 由式(12)得到的反馈控制序列$\{\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x})\}$在原点的一个邻域内是一致收敛的.

证明 利用文献[5]中的压缩映像方法可得到$\left\{\frac{\partial^{\mathrm{T}}h_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right\}$在原点的一个邻域内一致收敛. 再利用引理1，注意到$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$按$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$的展开式中仅包含高于一次的项，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$按$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$的展开式中的每项都高于二次，由于$\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x})$满足等式(12)，即

$$\left(2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i-1}+\frac{\partial^{\mathrm{T}}h_{i-1}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right)\left(\boldsymbol{B}+\frac{\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}\right)+2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}+\frac{\partial\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial\boldsymbol{u}}=0$$

这样经分析方法的估计，可得定理结论. 证毕.

注 由定理2、定理3可知,存在函数$V^*(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$，使得在原点的一个邻域内，$\{V_i(\boldsymbol{x})\}$一致收敛到$V^*(\boldsymbol{x})$，$\left\{\frac{\partial^{\mathrm{T}}V_i(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\right\}$一致收敛到$\frac{\partial^{\mathrm{T}}V^*(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}$，而$\{\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x})\}$一致收敛到$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$. 由经典分析可知$V^*(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$满足方程

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{f}_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}V_x(\boldsymbol{x})+2\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{g}_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0,\\&(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}}V_x(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}+\\&\quad\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0\end{aligned}$$

并且由$\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x})$的表达式(7)以及$\lim\limits_{i\to\infty}\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{P}$，应用定理1可知$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$是原问题的最优反馈控制，而$V^*(\boldsymbol{x})$是原问题的值函数. 同时，若记$\boldsymbol{x}^*(t)$为微分方程$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}))$，$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$的解，则当$\|\boldsymbol{x}_0\|$适当小时，$\hat{\boldsymbol{u}}(t)=-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^*(t)+D(\boldsymbol{x}^*(t))$是非线性稳定解析系统最优控制问题(3)的最优控制.

3 一个待定幂级数算法

本节利用上一节得到的非线性稳定解析系统的最优控制问题的迭代求解方法，给出一个待定幂级数算法.

记号约定:为了叙述方便，以下对于$\mathbf{R}^n$上的实解析函数$q(\boldsymbol{x})$，$q(\boldsymbol{0})=0$，使用记号$q^{(j)}(\boldsymbol{x})$表示$q(\boldsymbol{x})$在原点的Taylor展开式中的j次齐次式，而对于$\mathbf{R}^{n\times m}$上的实解析函数$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=0$，使用记号$\boldsymbol{Q}^{(j)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$表示$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$在原点的Taylor展开式中的$j$次齐次式.

下面交叉利用上一节得到的迭代方程(10)和(12)，给出一个待定幂级数算法，以得到最优回馈控制及值函数.

(1) 计算$h_1(\boldsymbol{x})$.

取$\boldsymbol{D}_0(\boldsymbol{x})=0$则

$$\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_0(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{x}$$

将实解析函数$V_1(\boldsymbol{x})$按$\boldsymbol{x}$展开，即待定

$$V_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}+h_1(\boldsymbol{x})=V_1^{(2)}+V_1^{(3)}+\cdots+V_1^{(m)}+\cdots$$

其中二次项$V_1^{(2)}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}$，由式(10)及

$$\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1)+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{W}+\boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{K}_1=0$$

同时利用前述记号约定，可得到$V_1(\boldsymbol{x})$在原点的Taylor展开式中的m次齐次式$V_1^{(m)}(m\geqslant 3)$的计算公式如下:

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1)^{\mathrm{T}}(V_1^{(m)})_x=-\boldsymbol{g}^{(m)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_1)-\sum_{k=2}^{m-1}\boldsymbol{f}^{(m-k+1)^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_1)(V_1^{(k)})_x,\ m=3,4,\cdots$$

由此可得到函数

$$h_1(\boldsymbol{x})=V_1^{(3)}+\cdots+V_1^{(m)}+\cdots$$

及

$$V_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}+h_1(\boldsymbol{x})$$

(2) 计算$D_1(\boldsymbol{x})$.

利用前述记号约定，由式(12)，取

$$\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^{-1}[(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{f}_u^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_1))V_{1_x}+\boldsymbol{g}_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_1)]=\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{x}+D_1(\boldsymbol{x})=u_2^{(1)}+u_2^{(2)}+\cdots+u_2^{(m)}+\cdots$$

由于一次项 $u_2^{(1)}=\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{x}$，即有

$$D_1(\boldsymbol{x})=u_2^{(2)}+\cdots+u_2^{(m)}+\cdots$$

而 $m\geqslant2$ 次项 $u_2^{(m)}$ 的计算公式如下：

$$\boldsymbol{u}_2^{(m)}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^{-1}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(V_1^{(m+1)})_x+\sum_{k=1}^{m-1}\boldsymbol{f}_u^{(m+1-k)^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_1)(V_1^{(k+1)})_x+\boldsymbol{g}_u^{(m+1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_1)],\ m=2,3,\cdots$$

从而得到实解析函数 $D_1(\boldsymbol{x})$.

(3) 对于 $i\geqslant2$ 时，计算 $h_i(\boldsymbol{x})$.

令

$$V_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}+h_i(\boldsymbol{x})=V_i^{(2)}+V_i^{(3)}+\cdots$$

其中二次项 $V_i^{(2)}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}$，由式(10)及等式 $\boldsymbol{P}_i(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_i)+(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{W}+\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{UK}_i=0$，高次项 $V_i^{(m)}$ 的计算公式如下：

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_i)^{\mathrm{T}}(V_i^{(m)})_x=-\sum_{k=2}^{m-1}[\boldsymbol{u}_i^{(m+1-k)^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(V_i^{(k)})_x]-\sum_{k=2}^{m-1}\boldsymbol{f}^{(m+1-k)^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_i)(V_i^{(k)})_x-2\sum_{k=1}^{[(m-1)/2]}\boldsymbol{u}_i^{(k)^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_i^{(m-k)}-\boldsymbol{u}_i^{(m/2)^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_i^{(m/2)}-\boldsymbol{g}^{(m)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_i),\ m=3,4,\cdots \tag{15}$$

其中$[(m-1)/2]$表示$(m-1)/2$ 的整数部分，而当 m 为奇数时不出现$-\boldsymbol{u}_i^{(m/2)^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{u}_i^{(m/2)}$ 这一项. 由此得到函数

$$h_i(\boldsymbol{x})=V_i^{(3)}+\cdots+V_i^{(m)}+\cdots$$

及

$$V_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}+h_i(\boldsymbol{x})$$

(4) 对 $i\geqslant2$，计算 $D_i(\boldsymbol{x})$.

待定 $u_{i+1}(\boldsymbol{x})=u_{i+1}^{(1)}+u_{i+1}^{(2)}+\cdots$，由于一次项 $u_{i+1}^{(1)}=\boldsymbol{K}_{i+1}\boldsymbol{x}$，即有

$$D_i(\boldsymbol{x})=u_{i+1}^{(2)}+\cdots+u_{i+1}^{(m)}+\cdots$$

而高次项 $u_{i+1}^{(m)}$ 的计算公式如下：

$$u_{i+1}^{(m)}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{U}^{-1}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(V_i^{(m+1)})_x+\sum_{k=1}^{m-1}\boldsymbol{f}_u^{(m+2-k)^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{x},u_i)(V_i^{(k+1)})_x+\boldsymbol{g}_u^{(m+1)}(\boldsymbol{x},u_i)],\ m=2,3,\cdots \tag{16}$$

由此得到实解析函数 $D_i(\boldsymbol{x})$.

4　一个例子

例　用迭代法求解以下非线性稳定解析系统的最优控制问题：

$$\min J=\int_0^\infty(x^2+u^2)\mathrm{d}t$$

$$\text{s.t.}\ \dot{x}=u-ux^2,\ x(0)=x_0$$

本例中相应于(1)，(2)的矩阵 $\boldsymbol{A}=0,\boldsymbol{B}=1,\boldsymbol{U}=\boldsymbol{W}=1$. 易见当 $\|\boldsymbol{x}_0\|$ 适当小时，系统是稳定的. 而相应的非线性项 $\boldsymbol{g}(x,u)=0,\boldsymbol{f}(x,u)=-ux^2$.

(1) 首先对相应的线性稳定最优控制问题，计算 Riccati 矩阵代数方程解的逼近序列$\{\boldsymbol{P}_n\}$.

取 $\boldsymbol{K}_0=-2$，有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_0=-2<0$，得到

$$\boldsymbol{P}_0=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-4t}(1+4)\mathrm{d}t=\frac{5}{4}$$

于是 $\boldsymbol{K}_1=-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_0=-\frac{5}{4}$，再计算得到

$$\boldsymbol{P}_1=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}t}\left(1+\frac{25}{16}\right)\mathrm{d}t=\frac{41}{40}$$

对每个 $n>1$，令

$$\boldsymbol{K}_n=-\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{n-1}=-\boldsymbol{P}_{n-1}$$

计算

$$\boldsymbol{P}_n=\int_0^\infty\mathrm{e}^{2K_nt}(1+K_n^2)\mathrm{d}t$$

得序列$\{\boldsymbol{P}_n\}$，满足关系式 $\boldsymbol{P}_n=\dfrac{1+\boldsymbol{P}_{n-1}^2}{2\boldsymbol{P}_{n-1}}$，正序列$\{\boldsymbol{P}_n\}$单调递减且 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}=1$ 正是 Riccati 矩阵代数方程的解.

(2) 迭代计算非线性最优反馈控制.

① 取 $u_1(x)=\boldsymbol{K}_1x=-\frac{5}{4}x$，即 $u_1^{(1)}=-\frac{5}{4}x$，而 $u_1^{(m)}=0(m=2,\cdots)$. 令

$$V_1(x)=\boldsymbol{p}_1x^2+h_1(x)=V_1^{(2)}+\cdots+V_1^{(m)}+\cdots$$

其中 $V_1^{(2)}=\frac{41}{40}x^2$，而由式(15)可计算得到 $V_1^{(3)}=0$，其他项 $V_1^{(m)}$ 如下：

$$\left(-\frac{5}{4}x\right)(V_1^{(m)})_x=x^2u_1(x)(V_1^{(m-2)})_x=-\frac{5}{4}x^3(V_1^{(m-2)})_x$$

即

$$(V_1^{(m)})_x=x^2(V_1^{(m-2)})_x$$

所以当 m 是奇数时，有

$$(V_1^{(m)})_x=0$$

当 m 是偶数时，有

$$(V_1^{(m)})_x=x^2(V_1^{(m-2)})_x$$

因而得到

$$V_{1_x}(x)=2\boldsymbol{P}_1x(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k}+\cdots)=\frac{2\boldsymbol{P}_1x}{1-x^2},\ |x|<1$$

上式给出了确保系统稳定的邻域，即$|x|<1$.

② 取

$$u_2(x)=-\frac{1}{2}[(1-x^2)(V_1)_x]=\boldsymbol{K}_2x+D_1(x)$$

即$u_2^{(1)}=\boldsymbol{K}_2x$，而由式(16)计算可得$u_2^{(m)}=0$，从而得$D_1(x)=0$.

③ 对于$i\geqslant 2$时，令

$$V_i(x)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}+h_i(x)=V_i^{(2)}+V_i^{(3)}+\cdots$$

其中$V_i^{(2)}=P_ix^2$，由式(15)计算可得$(V_i^{(3)})_x=0$，而高次项$(V_i^{(m)})_x$满足

$$(\boldsymbol{K}_ix)(V_i^{(m)})_x=\boldsymbol{K}_ix^3(V_i^{(m-2)})_x$$

即

$$(V_i^{(m)})_x=x^2(V_i^{(m-2)})_x$$

从而可得到

$$(V_i(x))_x=2\boldsymbol{P}_ix(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k}+\cdots)=2\boldsymbol{P}_ix(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2k}+\cdots)=\frac{2\boldsymbol{P}_1x}{1-x^2},\ |x|<1$$

④ 计算$u_{i+1}(x)$按x的展开式. 记

$$u_{i+1}(x)=u_{i+1}^{(1)}+u_{i+1}^{(2)}+\cdots$$

其中$u_{i+1}^{(1)}=\boldsymbol{K}_{i+1}x$，而由式(16)，高次项$u_{i+1}^{(m)}$可计算如下：由于$(V_i^{(3)})_x=0$，由式(16)可得$u_{i+1}^{(2)}=0$及

$$u_{i+1}^{(m)}=-\frac{1}{2}[(V_i^{(m+1)})_x-x^2(V_i^{(m-1)})_x],\quad m=3,4,\cdots$$

从而可得

$$u_{i+1}^{(m)}=0,\ m=2,3,\cdots$$

即

$$u_{i+1}(x)=\boldsymbol{K}_{i+1}x=-\boldsymbol{P}_ix$$

综上可得，当$|x|<1$

$$(V_n)_x(x)=2\boldsymbol{P}_nx(1+x^2+\cdots+x^{2k}+\cdots)$$

$$u_n(x)=\boldsymbol{K}_nx=-\boldsymbol{P}_{n-1}x$$

由第3节末的注可知，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}=1$，所以在$|x|<1$内$u_n(x)$一致收敛到最优反馈控制：$u^*(x)=-x$以及$(V_n)_x(x)$一致收敛到函数$\frac{2x}{1-x^2}$. 再由积分得到非线性稳定解析系统的最优控制问题的值函数$V^*(x)=-\ln(1-x^2)$.

应用定理1、定理3及第3节末的注，当初始状态$\boldsymbol{x}_0$满足$0<|\boldsymbol{x}_0|<1$时，把最优反馈控制

$$u=u^*(x)=-x$$

代入非线性解析系统

$$\dot{x}=u-ux^2,\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

得到最优轨道

$$\hat{x}(t,x_0)=\sqrt{\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x_0^2}\right)\mathrm{e}^{2t}}}$$

及相应的最优开环控制

$$\hat{u}(t,x_0)=-\hat{x}(t,x_0)$$

由于$|x_0|<1$，有

$$\lim_{t\to+\infty}\hat{x}(t,x_0)=0$$

所以，最优开环控制$\hat{u}(t,x_0)$在评价泛涵取得最小值时使得非线性解析系统$\dot{x}=u-ux^2$得到稳定.

参考文献：

[1] Lukes D L. Optimal regulation of nonlinear dynamical systems [J]. SIAM Journal of Control and Optimization, 1969, 7: 75.

[2] Russell D L. Mathematics of finite dimensional control systems: theory and design[M]. New York: Marcel Dekker, 1979.

[3] Kleinman D L. On an iterative technique for Riccati equation computations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1968, 13:114.

[4] 朱经浩. 最优控制中的数学方法 [M]. 北京：科学出版社，2011.
ZHU Jinghao. Some mathematical methods to the optimal controls [M]. Beijing: Science Press, 2011.

[5] ZHU Jinghao. Some results on nonlinear optimal control[D]. Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University, 1996.