

岩体品质因子与动态黏弹性本构

王志亮^{1, 2}, 陈 强²

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 为了选取合适的黏弹性本构来描述节理岩体, 首先通过评述文献指出岩体的品质因子(Q 值)在一定频率范围内均不随频率变化; 接着详细推导了三参数标准线性固体和朱-王-唐(ZWT)模型的 Q 值与频率的关系, 发现 ZWT 模型在一定频率范围内能得到稳定的 Q 值, 较适宜于描述岩体特性; 最后探讨了 ZWT 模型参数的计算方法, 指出利用 ZWT 模型各个构件的物理意义来计算模型参数是一种比较合理的方法。

关键词: 岩体; 黏弹性模型; 品质因子; 频率; 朱-王-唐模型

中图分类号: TU457

文献标志码: A

Quality Factor and Dynamic Viscoelastic Model of Rock Mass

WANG Zhiliang^{1, 2}, CHEN Qiang²

(1. Key Laboratory of Geotechnical & Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: This paper points out the quality factor Q of rock mass is independent of wave frequency in certain frequency range through reference reviewing. Then, the relationships between Q value and the frequency for the three-parameter standard linear solid model and the Zhu-Wang-Tang (ZWT) Model are derived in detail. ZWT Model, which can get a constant Q in certain frequency scope, is more suitable to simulate the property of rock mass. Finally, the calculation method for the ZWT Model parameters is explored. Results show that it's a reasonable way to evaluate the model parameters by using the physical meaning of each element.

Key words: rock mass; viscoelastic model; quality factor; frequency; Zhu-Wang-Tang Model

岩体中的结构面对其动力学特性具有强烈的影响。应力波透过节理后, 波的强度降低, 波相变化, 波的频率成分也会改变^[1]。而应力波在岩石力学、地球物理和地震工程中都有重要的作用, 所以研究节理中应力波的传播规律具有很大意义。

按节理在波动方程中是显式或者隐式的表示将节理岩体中应力波传播的研究方法分为 2 类: ①位移不连续模型; ②等效介质模型。分别介绍这 2 种方法, 并进行对比分析。

在位移不连续模型中, 节理是以边界条件的形式出现在波动方程中。其假设应力波透过节理时节理两侧的应力是连续的, 位移是不连续的。节理两侧位移差等于节理两侧应力与节理刚度的比值。位移不连续模型是由 Mindlin 首先提出的, Schoenberg 给出了 P 波和 Sv 波通过位移不连续界面时的解析解^[1-3], 文献[1-4]对应力波透过单个节理的情形做了比较充分的研究。而在自然条件下, 节理往往是以多条平行或近似平行的节理组的形式存在的。应力波透射过节理组时, 会产生多次反射和透射, 这与单组节理有较大的差别。对于多条平行节理的情况, 文献[5]利用特征线法, 采用位移不连续模型, 对一维条件下的情况进行了研究。随后文献[6]提出了以位移不连续模型为基础的虚拟波源法。文献[7]认为节理间岩块表现出黏弹性的性质, 提出了扩展的位移不连续方法。

在等效介质模型中, 通常采用代表单元体的概念来进行分析。代表单元体是指在选取合适的本构模型基础上, 用岩块力学参数和节理参数计算出代表单元体力学参数, 使应力波透过代表单元体时的效果与透过节理岩体的效果相同。等效介质模型一般采用连续介质力学的方法进行分析。早期一般将节理岩体等效为弹性介质, 但文献[8]指出随着岩石孔隙度的增加、黏土类矿物含量的增高、围压的减

小,岩石中波的衰减将增加.而处于地表附近的节理岩体,其围压较小,且由于风化作用,岩体中的微裂隙和黏土矿物都将增多,所以近地表岩体表现出显著的黏弹性性质.文献[9]采用等效黏弹性模型并结合虚拟波源法来分析包含平行节理组的岩体中应力波的传播规律;文献[10]又将这种方法从节理线性变形的情况推广到非线性的情况.

上述 2 种计算模型都能得到比较满意的结果,但两者的复杂程度不一样.位移不连续模型由于节理是体现在边界条件中,其波动方程较简单.但随着节理数目的增多,其边界条件的数目将随之增多,方程的复杂性将大幅度提高,故位移不连续模型不适用于处理节理数目较多的情况.而对于等效介质模型,节理是隐性的体现在本构参数中,所以其波动方程一般都比较复杂.但由于采用了连续介质力学的方法来进行研究,一旦方程建立,问题就容易解决.所以,对于节理数目较多的情况,等效介质模型的计算效率将高于位移不连续模型.

等效介质模型最主要的就是黏弹性本构的选择,不少研究者采用不同的线性黏弹性本构来进行研究.文献[11]曾采用朱-王-唐(ZWT)模型关系来模拟混凝土等材料的力学性能,文献[9]采用三参数标准线性固体来模拟节理岩体中应力波的传播,都得到了不错的结果,但是并未全面地分析上述本构能否较好地表现节理岩体的非弹性性质.品质因子 Q 是一个描述固体非弹性性质的重要参数.由于岩体的 Q 值主要受自身的特性如微裂隙的密度、分布、构造等和其中流体的性质决定,所以采用品质因子来讨论岩石(体)的非弹性性质是合适的.

1 岩体品质因子及其影响因素

1.1 品质因子及其计算方法

品质因子 Q 是描述固体非弹性性质的重要参数.其定义为:在一个周期内或者一个波长距离内所储存的弹性能的最大值 E 与耗散的能量 ΔE 的比值的 2π 倍^[12].

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \quad (1)$$

对于完全弹性体, Q 值为无穷大. Q 值越小,固体就越表现为非弹性性质^[8].

设一复柔量为 $G = G_1 + iG_2$ 的黏弹性材料承受震荡应力 $\sigma = \sigma_0 \cos \omega t$ 的作用, ω 为角频率, G_1 为 G 实部, G_2 为 G 虚部, σ_0 为应力的幅值.可得到材料的应变 ϵ .

$$\epsilon = \sigma_0 (G_1 \cos \omega t - G_2 \sin \omega t) \quad (2)$$

于是应变率 $\dot{\epsilon}$ 为

$$\dot{\epsilon} = -\sigma_0 \omega (G_1 \sin \omega t + G_2 \cos \omega t) \quad (3)$$

一个周期内由于弹性部分回复,所以外力在一个周期内做的功都耗散为热能,则 ΔE 可由下式求得:

$$\begin{aligned} \Delta E &= - \int_0^T (\sigma_0 \cos \omega t) \cdot \\ &\quad [\sigma_0 \omega (G_1 \sin \omega t + G_2 \cos \omega t)] dt \\ &= -\sigma_0^2 \omega G_1 \int_0^T \cos^2 \omega t dt = -\pi \sigma_0^2 G_2 \end{aligned}$$

式中: T 为周期, $T = 2\pi/\omega$; t 为时间变量.则可知, G_1 表示与弹性势能相关的能量, G_2 表示黏弹性材料在一个周期中所耗散能量.

由于 E 是指弹性势能最大值,可知在 $T/4$ 时弹性能达到最大值,为

$$\begin{aligned} E &= - \int_0^{T/4} (\sigma_0 \cos \omega t) (\sigma_0 \omega G_1 \sin \omega t) dt \\ &= \frac{1}{2} G_1 \sigma_0^2 \end{aligned} \quad (4)$$

则可以得出品质因子的计算式为^[13]

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = -2\pi \cdot \frac{G_1 \sigma_0^2}{2\pi \sigma_0^2 G_2} = -\frac{G_1}{G_2} \quad (5)$$

1.2 岩体品质因子的影响因素

目前对于完整岩体的 Q 值研究比较充分,但对于节理岩体的相关研究则较少.对于完整岩体,其 Q 值受频率、孔隙流体的黏度及饱和度等因素的影响,此外也受压力和温度的影响.对于近地表的干燥岩体,无需考虑流体,也无需考虑压力和温度的影响;而研究表明,对于干燥的完整岩体, Q 值与频率无关,此时的衰减系数与频率成正比^[8,12,14].对于含有节理的岩体的 Q 值,文献[1-2]在室温条件下采用频谱振幅比法测量了不同轴向压力下干燥的完整岩体和节理岩体在不同频率下的 Q 值,如图 1 所示.

图 1 中相关的压力值表示测量时试样所受的压力大小.从图中可见:①在频率变化时,节理岩体和完整岩体 Q 值变化规律基本相似,但节理岩体的 Q 值比完整岩体的 Q 值要小;②在频率变化时,完整岩体和节理岩体的 Q 值有小幅度波动,在低频范围内波动较大,在高频范围内波动较小,可认为在高频范围内 Q 值与频率无关.

2 几种黏弹性本构品质因子随频率的关系

综上所述,无论是完整岩体还是节理岩体,其 Q

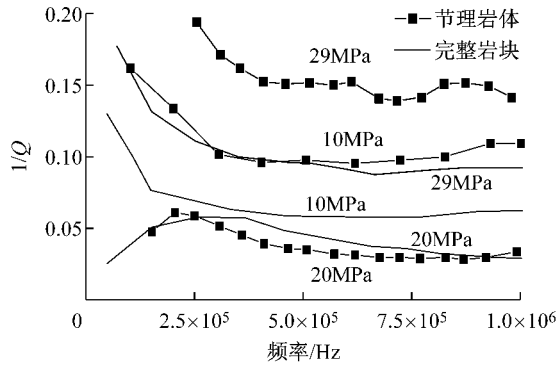


图 1 节理岩体和完整岩块在不同压力下品质因子与频率的关系^[1]

Fig.1 $1/Q$ as a function of frequency for fractured and intact rocks under different pressures^[1]

值随频率的变化规律基本相同,这样就能采用同一种本构来描述它们的动力学行为;由于两者在一定频率范围内 Q 值不随频率变化,则可用这一特性来分析和评价现有的几种用来描述岩体的黏弹性本构。

2.1 三参数标准线性固体模型

标准线性固体如图 2,是将胡克弹簧与牛顿黏壶通过线性组合而成,有 2 种比较常见的形式。图中, E, η 表示弹簧的杨氏模量和黏壶的黏性系数,下标 M 表示麦克斯韦体,下标 v 表示开尔文体,下标 a, b 分别表示 2 个单独弹簧的杨氏模量。

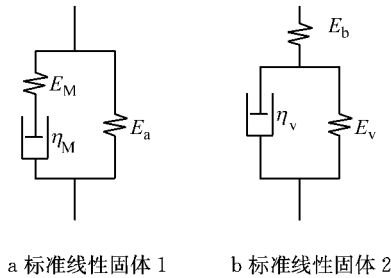


图 2 标准线性固体模型示意

Fig.2 Schematic of standard linear solid model

图 2a 是由麦克斯韦体和胡克弹簧并联而成的,其本构方程为式(6);图 2b 是将开尔文体与胡克弹簧串联而成,其本构方程为式(7)^[15]:

$$E_M \sigma + \eta_M \dot{\sigma} = E_M E_a \epsilon + (E_M + E_a) \eta_M \dot{\epsilon} \quad (6)$$

$$(E_b + E_v) \sigma + \eta_v \dot{\sigma} = E_b E_v \epsilon + E_b \eta_v \dot{\epsilon} \quad (7)$$

式中: σ 为应力; ϵ 为应变。

实际上,式(6)、式(7)是等价的,如果令 $E_b = E_a + E_M, E_v = E_a (1 + E_a/E_M), \eta_v E_M E_a = \eta_M E_v E_b$, 则可以发现式(6)、式(7)变为同一式子^[15]。

由于文献[8]中采用图 2b 所示模型模拟节理岩

体,本文采用图 2b 的形式来计算 Q 值。首先,其复柔量为

$$G = \frac{(E_b + E_v) + \eta_v i \omega}{E_b E_v + E_b \eta_v i \omega} = \frac{[(E_b + E_v) E_b E_v + E_b (\eta_v \omega)^2] - i E_b^2 \eta_v \omega}{(E_b E_v)^2 + (E_b \eta_v \omega)^2}$$

则可以得到品质因子为

$$Q = -\frac{G_1}{G_2} = \frac{(E_b + E_v) E_b E_v + E_b (\eta_v \omega)^2}{E_b^2 \eta_v \omega} \quad (8)$$

因 $f = \omega/2\pi$, Q 随频率 f 变化规律如图 3 所示。即刚开始随着频率的增加逐渐减小到最小值,然后又开始逐渐增大,其间并没有一个稳定的平台。所以,采用标准线性固体来描述岩体的动力学性质时,会对波的低频和低频部分存在衰减不足的情况。

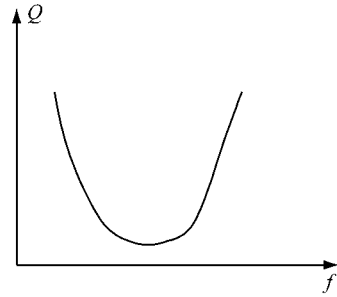


图 3 标准线性固体品质因子与频率的关系

Fig.3 Values of Q as a function of frequency

2.2 朱-王-唐模型

朱兆祥、王礼立、唐志平等分析总结了 20 多年有关工程塑料力学试验成果,提出了用于模拟高聚物等黏弹性材料在大变形条件下的力学行为的朱-王-唐(ZWT)模型。ZWT 模型最初主要针对高聚物材料。由于混凝土类材料具有较强的应变率效应,在准静态和高应变率下表现出明显的黏弹性行为。因此,该模型也被扩展用来模拟混凝土、水泥砂浆等脆性材料在不同应变率型下的力学行为^[11,15]。

ZWT 模型由一个非线性弹簧、一个低频麦克斯韦体和一个高频麦克斯韦体三者并联而成(图 4)。共有 7 个参数,图中 E_0, α, β 表示非线性弹簧的参数, E_1, η_1 表示低频麦克斯韦体的弹性常数和黏性常数, E_2, η_2 表示高频麦克斯韦体的弹性常数和黏性常数^[15]。其微分形式的本构方程为

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = \left[\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} + E_1 + E_2 \right] \frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{\sigma_1}{\theta_1} - \frac{\sigma_2}{\theta_2} \quad (9)$$

式中: $f(\epsilon) = E_0 \epsilon + \alpha \epsilon^2 + \beta \epsilon^3$; σ_1, σ_2 分别表示 2 个麦克斯韦体分担的应力; θ_1, θ_2 分别为 2 个麦克斯韦体

的松弛时间, $\theta_1 = \eta_1/E_1$, $\theta_2 = \eta_2/E_2$.

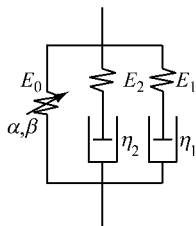


图 4 ZWT 模型非线性黏弹性模型

Fig. 4 ZWT nonlinear viscoelastic constitutive model

由于地震波在岩体中传播时所引起的应变一般较小, 在小应变的情况下, 应力-应变试验曲线的初始段表现为近似线性. 在这种情况下 ZWT 模型非线性弹性响应项 $f(\epsilon)$ 可以近似简化成线性项 $f(\epsilon) = E_0\epsilon$, 这样可以大大简化模型的复杂性, 使模型的参数也从 7 个减少到 5 个, 即为 $E_0, E_1, \theta_1, E_2, \theta_2$.

下面来讨论 ZWT 模型的 Q 值. 首先推导 ZWT 模型的复数型本构关系. 由于 3 个构件是并联关系, 所以三者的应变相同, 总应力为各个构件应力之和, 即有

$$\begin{cases} \sigma_0 = E_0\epsilon \\ \sigma_1 + \theta_1\dot{\sigma}_1 = E_1\theta_1\dot{\epsilon} \\ \sigma_2 + \theta_2\dot{\sigma}_2 = E_2\theta_2\dot{\epsilon} \\ \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 \end{cases} \quad (10)$$

对式(10)进行拉普拉斯变换, 可得变换后的应力 $\bar{\sigma}$ 与应变 $\bar{\epsilon}$ 间关系为

$$\bar{\sigma} = \left(E_0 + \frac{E_1\theta_1 s}{1 + \theta_1 s} + \frac{E_2\theta_2 s}{1 + \theta_2 s} \right) \bar{\epsilon} \quad (11)$$

式中, s 为拉普拉斯变换的自变量, 整理可得

$$[\theta_1\theta_2 s^2 + (\theta_1 + \theta_2)s + 1]\bar{\sigma} = [(E_0 + E_1 + E_2) \cdot$$

$$\theta_1\theta_2 s^2 + (E_0\theta_1 + E_0\theta_2 + E_1\theta_1 + E_2\theta_2)s + E_0]\bar{\epsilon}$$

进行拉普拉斯逆变换可得

$$\sigma + (\theta_1 + \theta_2)\dot{\sigma} + \theta_1\theta_2\ddot{\sigma} = E_0\epsilon + (E_0\theta_1 + E_0\theta_2 + E_1\theta_1 + E_2\theta_2)\dot{\epsilon} + (E_0 + E_1 + E_2)\theta_1\theta_2\ddot{\epsilon} \quad (12)$$

则 ZWT 模型的复柔量为

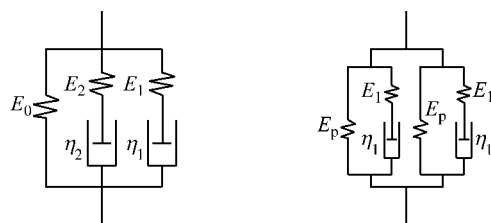
$$G(i\omega) = P(i\omega)/Q(i\omega) \quad (13)$$

其中, $P(i\omega) = 1 + (\theta_1 + \theta_2)i\omega + \theta_1\theta_2(i\omega)^2$, $Q(i\omega) = E_0 + (E_0\theta_1 + E_0\theta_2 + E_1\theta_1 + E_2\theta_2)i\omega + (E_0 + E_1 + E_2)\theta_1\theta_2(i\omega)^2$.

由于 Q 为复柔量的实部与虚部的商与 -1 的乘积, 所以 ZWT 模型的品质因子将是一个 ω 的 4 次方式子除以 3 次方式子的形式, 其与 f 的关系不容易显示清楚, 故需将其化为其他容易分析的形式.

在 ZWT 模型中, 如果将弹性常数为 E_0 的弹簧拆分成 2 个弹性常数为 E_p, E_q ($E_0 = E_p + E_q$) 的弹

簧, 则 ZWT 模型可以认为是由 2 个三参数标准线性固体并联而成(图 5).



a 线性 ZWT 模型

b 线性 ZWT 模型等价形式

图 5 ZWT 模型及其等价形式

Fig. 5 An equivalent form of ZWT constitutive model

文献[16]指出, 对于由一组标准线性固体组成的黏弹性模型, 其中每个标准线性固体的应力松弛时间 $\tau_\sigma = \eta_1/E_1$ 和应变松弛时间 $\tau_\epsilon = (\eta_1/E_1 + \eta_1/E_2)$, 若 $\tau \ll 1$ ($\tau = \tau_\epsilon/\tau_\sigma - 1$), 则总的黏弹性模型的 Q 值与各个标准线性固体 Q 值满足如下关系^[17]:

$$Q^{-1} \approx \sum_{i=1}^n Q_n^{-1} \quad (14)$$

式中: n 为标准线性固体的个数. 则可知 ZWT 模型的品质因子的倒数等于 2 个标准线性固体的 Q 值的倒数和. 由于标准线性固体 Q 值随频率的变化关系已经得到. 如果调整 2 个标准线性固体的关系, 使两者的最低 Q 值相近, 则能在频率 $f_1 \sim f_2$ 范围内得到相对稳定的 Q 值, 如图 6 所示. 文献[17]利用以上思路推导出形如图 5b 的在一定频率范围具有常 Q 值的黏弹性模型. 则可以得到, 采用 ZWT 模型, 如果控制好参数, 也能够一定频率范围内得到所需的稳定 Q 值.

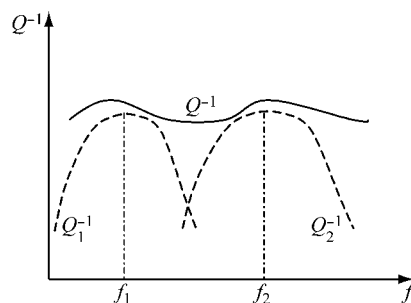


图 6 ZWT 模型品质因子与频率的关系

Fig. 6 Q of ZWT Model as a function of frequency

3 朱-王-唐模型参数的计算方法

经过简化的 ZWT 模型具有 5 个待定参数. 文献[17]指出, 若给定岩体的 Q 值、 Q 所考虑的频率范

围、材料的密度与地震波波速,就可以确定5个材料参数.以上几个条件,材料的密度与波速比较容易测量,但材料 Q 值测量操作比较困难,导致文献[17]提出的参数确定方法可行性较差,必须发展新的参数计算方法.

ZWT模型每个参数的物理意义虽然不是很明确,但其每个构件都具有特定的作用.可以考察ZWT模型各个构件的作用,对模型进行相应的简化后再来确定各个参数的值.

(1) 对于准静态情况,黏性项可以忽略,则可以根据准静态情况下的应力-应变曲线来确定弹簧组件 E_0 的值.

(2) 在准动态情况下,高频麦克斯韦体的影响很小,可只考虑弹簧和低频麦克斯韦体作用.

(3) 在高频情况下,低频麦克斯韦体将没有足够的时间来松弛,所以对于低频麦克斯韦体可以只考虑其弹性项的作用.

这样,只需要采用岩石的单轴压缩试验、动态压缩试验就能比较好地确定ZWT模型的参数,并且各个参数的物理意义比较明确^[11,18].

文献[11]利用ZWT模型对素混凝土的动态单轴压缩应力-应变关系进行了拟合,得到了比较好的拟合效果.本文采用文献[11]中的参数来近似讨论品质因子与频率的关系,相关参数为 $E_0 = 28.4$ GPa, $E_1 = 7.2$ GPa, $\theta_1 = 0.1$ s, $E_2 = 26.2$ GPa, $\theta_2 = 8 \times 10^{-5}$ s^[11].其 Q 在100~400 Hz的变化规律如图7所示,其中 Q 最大值为45,最小值为36,可以看到在图中频率范围内,混凝土的 Q 保持在40左右.

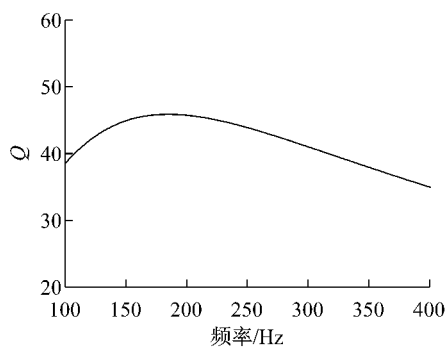


图7 本文参数求取方法所得品质因子与频率的关系

Fig. 7 Q , obtained by the parameter acquisition method, as a function of frequency

最后必须指出,本文所考虑的都是二维情况下的黏弹性本构关系,如需获取其他参数,则要将其推广到三维的情形.对于各向同性材料,文献[13]给出了一种构建三维本构的方法.假设应变球张量只与

应力球张量有关,而应变偏量只与应力偏量有关.在以上假设的基础上,就能得到用卷积形式表示的材料三维的松弛型本构关系,通过变量代换,就能得到与弹性参数形式类似的黏弹性参数.

4 结论

在总结节理岩体中应力波传播分析的2种主要模型基础上,阐述了品质因子 Q 值的概念并利用它讨论了描述节理岩体黏弹性本构的适用性.通过介绍标准线性固体和ZWT模型这2种被用于描述岩石等脆性材料的黏弹性模型的 Q 值与频率间关系并对它们的适用性进行对比分析,得出如下几点结论:

(1) 在进行节理组中应力波传播特性的研究中,由于等效介质模型在节理数增多的情况下其复杂程度要低于位移不连续模型,故等效介质模型适宜于处理节理组的情况.

(2) 三参数标准线性固体的 Q 值随频率先减小到最小值,然后增大,这会导致其对低频波和高频波的衰减比实际情况小;ZWT模型由于采用了1个低频与1个高频2个麦克斯韦体来描述衰减,通过调整各个参数值,在一定频率范围能得到一个相对稳定的 Q 值,所以ZWT模型更加适合描述节理岩体的动力学性质.

(3) 通过考虑ZWT模型各个参数的物理意义对模型进行简化再求解ZWT模型的中各个参数的值是一种比较合理的方法.

参考文献:

- [1] Pyrak-Nolte J L. Seismic visibility of fractures[D]. Berkeley: University of California, Berkeley, 1988.
- [2] Pyrak-Nolte J L, Myer R L, Cook N G W. Transmission of seismic waves across single natural fractures[J]. Journal of Geophysical Research, 1990, 95(B6): 8617.
- [3] Schoenberg M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1980, 68(5): 1516.
- [4] Gu Boling, Suárez-Rivera, Nihei T K, et al. Incidence of plane waves upon a fracture [J]. Journal of Geophysical Research, 1996, 101(B11): 25337.
- [5] Zhao J, Cai J G. Transmission of elastic P -waves across single fractures with a nonlinear normal deformational behavior[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2001, 34(1): 3.
- [6] Perino A, Zhu J B, Li J C, et al. Theoretical methods for wave propagation across jointed rock masses [J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2010, 43: 799.

(下转第428页)