

基于 Abaqus 软件的砂土弹塑性本构实现及验证

彭芳乐^{1,2}, Chattonjai P^{1,2}, 华 针^{1,2}

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 基于能量型砂土的硬化弹塑性本构模型, 结合 Abaqus 软件提供的用户材料子程序 umat 接口, 提出了调整步长及限制屈服面滑移的向前欧拉显式积分算法, 并将其嵌入到 Abaqus 软件中, 实现了本构模型的程序化。数值模拟结果与室内试验结果的比较表明, 提出的模型可以较好地模拟砂土加载过程中的应力-应变关系, 从而也验证了算法程序的有效性。

关键词: 弹塑性本构; Abaqus 软件; 软化; 显式积分算法
中图分类号: TU473 **文献标志码:** A

Implementation and Validation of Elasto-plastic Constitutive of Sands by Abaqus Tool

PENG Fangle^{1,2}, Chattonjai P^{1,2}, HUA Zhen^{1,2}

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: On the basis of the proposed model which can describe the whole damage progress from hardening to softening for sandy soils and the UMAT materials program interface provided by Abaqus, a program is implemented to embed the proposed model to the Abaqus in which the forward Euler integral algorithm is applied. In this program the measures, such as subbing the step size and limiting drift of the yield surface, are taken to ensure the error to be controlled within the tolerance. The comparison between the numerical simulation results and laboratory experimental results show that the constitutive model can reasonably simulate the whole stress history, accordingly, the effectiveness of the algorithm program is verified.

Key words: elasto-plastic constitutive; Abaqus tool; softening; explicit integration algorithm

岩土的本构模型一直是岩土理论的重要组成部分。对此, 龚晓南^[1]曾经指出, 求解岩土工程的关键问题是工程实用本构方程的建立。而砂土的本构, 国内外都做了许多研究, 除比较著名的 Lade-Duncan 模型^[2]外, 国内的郭瑞平等^[3-5]引入了砂土的塑性功作为硬化参数来构建砂土的本构模型。马险峰等^[6-7]还提出了一种修正塑性功作为砂土的硬化参数。而砂土的力学特性受应力历史和应力路径的影响很大, 因此要找到真正满足这种唯一性要求的硬化参数(函数)还存在一定难度。姚仰平等^[8-9]对岩土材料的应力路径无关硬化参量做了比较广泛的探讨。而基于一系列高精度、多应力路径下的丰浦砂平面应变试验的试验数据, Yasin 等^[10]发现对塑性功、剪应变、体应变等参量的应力路径存在相关性, 这些作为塑性阶段的硬化参数不满足唯一性要求, 依据上述试验结果分析, 彭芳乐等^[11-12]提出了应力路径不相关的修正塑性功硬化函数, 并在此基础上建立了丰浦砂剪切硬化弹塑性本构模型, 且基于完整的砂土加载试验, 通过将硬化参数分为三部分, 完整描述了在加载条件下砂土从硬化至软化直至破坏的渐进过程。

本构模型的数值实现方法一般为显式和隐式积分算法^[13-15]: 基于广义梯形积分算法或广义中心积分的隐式积分算法, 不需要进行初始交界屈服面的判断, 且其塑性应力的修正需要通过非线性方程组的迭代^[16], 从而在一定的容许精度内保证一致性的条件。然而, 此方法对于复杂模型方程的建立比较困难, 且方程收敛性不容易得到保证; 显式积分算法虽易实现, 但精度较低, 且当应力状态从弹性阶段进入弹塑性阶段时需要进行交界屈服面的判断, 预测应力易偏离当前的屈服面。2 种算法各有优缺点, 在以往的文献中, 隐式算法经常被用在简单本构模型中。但 Sloan^[13]和 Abbo 等^[15]提出了能够控制误差的显

收稿日期: 2013-04-14

基金项目: 国家自然科学基金(51279132); 长江学者和创新团队发展计划(IRT1029)

第一作者: 彭芳乐(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为岩土力学、地下空间与工程等。

E-mail: pengfangle@tongji.edu.cn

式积分算法,改善了显式积分算法的精度。

本文采用控制步长及限制屈服面漂移的显式算法,利用 Abaqus 软件提供的用户材料子程序 umat 接口,实现本构模型的程序化,并对室内平面应变压缩试验的等向固结和不等向固结进行相应的数值模拟,验证了本构模型及程序的合理和可靠性。

1 砂土的弹塑性本构模型

1.1 亚弹性模型

E. Hoque 和 F. Tatsuoka 通过对砂土的三轴试验对砂土的横观各项同性进行了研究,得知砂土在自重或垂直压密时会表现其固有的各向异性,同时,某应变增量方向的弹性模量是此方向上对应主应力的函数,砂土弹性形变的各向异性程度随应力状态而变化,在平面应变条件下可表示为

$$\begin{cases} d\epsilon_{xx} = \frac{1}{E_h} d\sigma_{xx} - \frac{\nu_{hh}}{E_h} d\sigma_{yy} - \frac{\nu_{vh}}{E_v} d\sigma_{zz} \\ d\epsilon_{zz} = -\frac{\nu_{hv}}{E_h} d\sigma_{xx} - \frac{\nu_{hv}}{E_h} d\sigma_{yy} + \frac{1}{E_v} d\sigma_{zz} \\ d\gamma_{xy} = \frac{1}{2G_{vh}} d\tau_{xy} \end{cases} \quad (1)$$

式中: ϵ_{xx} 为 x 方向主应变; E_h 为水平向弹性模量, $E_h = E_{h0} \left(\frac{\sigma_h}{\sigma_0} \right)^m$, E_{h0} 为初始侧向弹性模量, σ_h 为加载过程中的水平应力, σ_0 为加载时的初始应力, m 为材料常数; σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} 分别为 x , y , z 方向主应力; ν_{hh} , ν_{vh} 和 ν_{hv} 均为泊松比, $\nu_{hh} = \nu_0$, ν_0 为初始泊松比, $\nu_{vh} = \nu_0 \sqrt{\frac{E_{v0}}{E_{h0}}} \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_h} \right)^{m/2}$, E_{v0} , E_{h0} 分别为初始轴向、初始侧向弹性模量, σ_v , σ_h 分别为加载过程中的竖向应力与水平应力, $\nu_{hv} = \nu_0 \sqrt{\frac{E_{h0}}{E_{v0}}} \left(\frac{\sigma_h}{\sigma_v} \right)^{m/2}$; E_v 为竖向弹性模量, $E_v = E_{v0} \left(\frac{\sigma_v}{\sigma_0} \right)^m$; ϵ_{zz} 为竖直方向主应变; γ_{xy} 为剪切应变; G_{vh} 为剪切模量, $G_{vh} = \frac{1-\nu_0}{1+\nu_0} \cdot \left\{ \frac{1-\nu_{vh}}{E_v} + \frac{1-\nu_{hv}}{E_h} \right\}^{-1}$; τ_{xy} 为 xy 方向剪应力。

1.2 基于能量的硬-软化塑性模型

本文塑性模型采用非关联的等向硬-软化来描述,其硬化参数采用与应力路径无关的不可恢复应变能,其屈服函数和势函数分别表示为 Mohr-Coulomb 和 Drucker-Prager 形式。

本模型选取的屈服函数 F 为 Mohr-Coulomb 形式,以应力不变量形式表示的剪切型屈服准则为

$$F = -\eta I_1 + \frac{1}{g(\theta)} \sqrt{J_2} - k_1 = 0 \quad (2)$$

式中: η 为 π 平面上 $\theta = 30^\circ$ 时的偏应力, θ 为罗德角; I_1 为第一应力不变量; J_2 为第二应力偏量; k_1 为岩土材料的黏性参数,对于砂土它的值为零; $g(\theta)$ 为罗德角函数,其表达式为

$$g(\theta) = \frac{3 - \sin\phi_{mob}}{2\sqrt{3}\cos\theta - 2\sin\theta \sin\phi_{mob}} \quad (3)$$

式中: ϕ_{mob} 为发挥内摩擦角。 η 可表示为

$$\eta = \frac{2\sin\phi_{mob}}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi_{mob})} \quad (4)$$

塑性势函数 G 表示为 Drucker-Prager 形式。

$$G = -\alpha' I_1 + \sqrt{J_2} - k_2 = 0 \quad (5)$$

式中: k_2 为岩土材料的黏性参数,对于砂土它的值为零; α' 为势函数因子,对平面应变状态,则有

$$\alpha' = \frac{\tan\psi_{mob}}{\sqrt{9 + 12\tan^2\psi_{mob}}} \quad (6)$$

式中: ψ_{mob} 为发挥剪胀角,P. W. Rowe 和 F. Tatsuoka 对应力-剪胀关系进行了较为系统的研究,提出了较多的剪胀方程,但应力路径对应力-剪胀关系的影响研究较有限。随后根据室内试验研究发现,除掉等向压缩变形部分,剪切变形部分的流动法则与应力路径基本无关,具体剪胀关系见文献[12]。

1.3 基于能量的硬化参数

通过对室内试验结果的研究,在平面应变条件下提出与应力路径无关的修正塑性功状态量^[11-12],可以作为弹塑性本构建模的硬化参数,即

$$\begin{cases} W_p^* = \int \sigma d\epsilon_p / (s/p_a')^n = \\ \int \left[(td\gamma_p + s d\epsilon_{vol,p}) / (s/p_a')^n \right] \\ t = (\sigma_v' - \sigma_h')/2 \\ s = (\sigma_v' + \sigma_h')/2 \end{cases} \quad (7)$$

式中: W_p^* 为修正塑性功; σ 为应力张量; $d\epsilon_p$ 为塑性应变增量; p_a' 为大气压强; n 为待定材料常数; $d\gamma_p$ 为塑性剪应变增量; $d\epsilon_{vol,p}$ 为塑性体积应变增量; σ_v' 为竖向有效应力; σ_h' 为水平有效应力。

定义应力状态函数 X 。

$$X = t/s + r \ln(s/p_a') \quad (8)$$

式中: r 为待定材料常数,假定硬化函数形式为

$$X = Y(W_p^*) \quad (9)$$

在不同应力路径下,为了满足该式应力状态 X 和硬化参数 W_p^* 的唯一对应,对 r 和 n 进行了调整试算达到硬化参数与应力状态参数唯一对应^[12],从而得到不受应力路径影响的状态量。

根据文献[12]的阐述,塑性功硬化函数可以分为 3 部分,峰值前、峰值及峰值附近以及峰值后. 其中峰值前、峰值附近以及峰值后的硬化函数的具体表达形式如下.

砂土强度峰值前 $X-W_{p^*}$ 硬化函数的形式为

$$X = a[\ln(W_{p^*}/p'_a)b + h] \quad (10)$$

式中: a, b, h 均为材料常数[12].

峰值前硬化函数与峰值后软化函数平滑地连接起来.

$$X(W_{p^*}) = X_{\max} \left(\frac{2.0 \sqrt{W_{p^*} W_f}}{W_{p^*} + W_f} \right)^K \quad (11)$$

式中: X_{\max} 为峰值应力状态参数(它是 X 在峰值状态时的值); W_f 为峰值修正塑性功参数, 为 W_{p^*} 在峰值状态时的值; K 为幂指数, 引入 K 是为了保证式(11)能够通过峰值前硬化函数的一个固定点, 由于从 $X=0.8X_{\max}$ 开始, 式(10)得出的峰值前硬化函数与试验数据发生偏离, 所以选择该点作为分界点(如图 1 所示)用三点拟合法可得到参数 K 的值为

$$K = \lg\left(\frac{X_1}{X_{\max}}\right) / \lg\left(\frac{2\sqrt{W_1 W_f}}{W_1 + W_f}\right) \quad (12)$$

式中: W_1 是 $X_1=0.8X_{\max}$ 对应的 W_{p^*} 值, X_{\max} 的取值见文献[12].

砂土峰值后软化时的应力-应变关系可假设为

$$X(W_{p^*}) = X_r + (X_{\max} - X_r) \exp\left[-\left(\frac{W_{p^*} - W_f}{W_r}\right)^2\right] \quad (13)$$

式中: X_r 为砂土处于残余强度时的应力状态参数; W_r 为不可恢复软化参量, 两者取值见文献[12].

综上可以得到完整的砂土修正塑性功硬化-软化函数, 如图 1 所示, 图中 $X=t/s+r\ln(sp'_a)$.

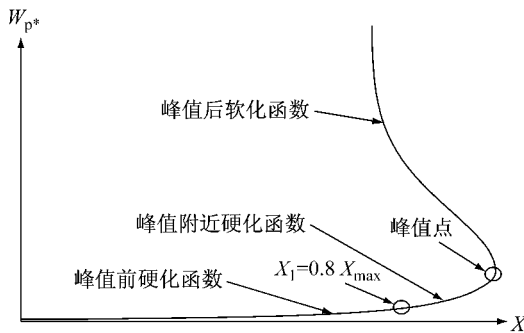


图 1 砂土的修正塑性功硬化-软化函数

Fig.1 Strain energy-based hardening function for dense Toyoura sand

1.4 显式算法的应力更新

在前面所述的修正塑性功硬化-软化的砂土弹塑性模型中, 屈服函数 F 可以写成如下形式:

$$F = F(\boldsymbol{\sigma}, W_{p^*}) \quad (14)$$

当发生塑性变形时, 式(14)应该满足连续性条件, 即

$$dF(\boldsymbol{\sigma}, W_{p^*}) = 0 \quad (15)$$

展开为

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial W_{p^*}} dW_{p^*} = 0 \quad (16)$$

在非相关联流动法则中假定塑性势函数为 G , 根据正交法则塑性应变增量 $d\boldsymbol{\varepsilon}_p$ 可表达为

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (17)$$

式中: λ 为塑性因子.

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial W_{p^*}} \boldsymbol{\sigma} d\boldsymbol{\varepsilon}_p / (s/p'_a)^n = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial F}{\partial W_{p^*}} \boldsymbol{\sigma} \lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} / (s/p'_a)^n = H' \lambda \quad (19)$$

式中: H' 为硬化-软化模量, 可以表示为

$$H' = -\frac{\partial F}{\partial W_{p^*}} \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} / (s/p'_a)^n \quad (20)$$

而对于 Abaqus 软件中的用户子程序平台, 当前增量步内的应变增量为

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}_e + S d\boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (21)$$

式中: $d\boldsymbol{\varepsilon}_e$ 为弹性应变增量; $d\boldsymbol{\varepsilon}_p$ 为塑性应变增量; S 为应变局部化参数.

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{D}_e)^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + S \lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (22)$$

式中: \mathbf{D}_e 为弹性刚度矩阵. 令 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a}$, $\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{b}$, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon} &= H' \lambda + S \lambda \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b} \\ &= \lambda (H' + S \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (23)$$

求得

$$\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon}}{H' + S \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}} \quad (24)$$

在式(23)两边乘以 \mathbf{D}_e 并将式(24)的 λ 代入得

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon} &= d\boldsymbol{\sigma} + \lambda S \mathbf{D}_e \mathbf{b} = \\ &= d\boldsymbol{\sigma} + \frac{S \mathbf{D}_e \mathbf{b} \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e d\boldsymbol{\varepsilon}}{H' + S \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}} \end{aligned} \quad (25)$$

综上可得到修正塑性功硬化-软化弹塑性应力-应变增量关系.

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left[\mathbf{D}_e - \frac{S \mathbf{D}_e \mathbf{b} \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e}{H' + S \mathbf{a}^T \mathbf{D}_e \mathbf{b}} \right] d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (26)$$

在 Abaqus 软件中当前步长内的应力增量的计算由式(26)进行更新, 且基于上一增量步的应力-应变及硬化参数历史.

2 本构显式积分程序化算法

本文采用的显式积分算法是条件稳定的, 必须

在计算时控制积分步长,且当应力更新后,可能屈服函数不为零,而导致屈服面的漂移,为减小上述算法导致的误差,采用确定弹塑性交界屈服面、细化增量步、屈服面修正等措施。

2.1 初始屈服面的确定

应力增量的更新如图 2 所示,其中横坐标表示应变 ϵ ,纵坐标表示应力 σ ,第 $N+1$ 步的初始应力来自第 N 步的计算结果,第 N 步的计算结果对应图中的点 A ,此时 $f_A = f(\sigma_A, W_{p^*}, A) \leq 0$ (如图 2 所示),随后假设当前增量步的应变增量全部为弹性应变,然后计算弹性试探应力,对应图中点 B ,计算此应力状态下的屈服函数,如此时 $f_B = f(\sigma_B, W_{p^*}, B) \leq 0$,那么此时试探应力即为真实应力,此增量步中的应变增量全为弹性应变。如果经计算后点 B 有 $f_B = f(\sigma_B, W_{p^*}, B) > 0$,说明此时应变增量由弹性和塑性两部分组成。此时,需要确定弹塑性交界面的应力状态,即图 2 所示点 C 。首先需要判断点 A 的应力状态与屈服面的关系:如果正好处于屈服面上,即 $f_A = f(\sigma_A, W_{p^*}, A) = 0$,那么在图 2 中,点 C 和点 A 重合;如果点 A 在屈服面以内,那需要确定一个比例参数 α ($0 < \alpha < 1$) 来确定点 C 的应力状态,从而确定应力状态从点 A 到点 B 过程中的弹性应变增量。

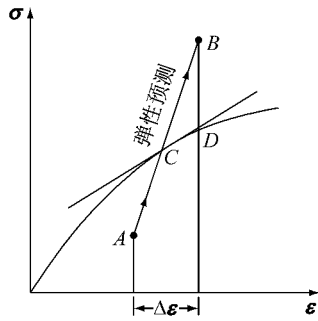


图 2 增量步内应力更新示意

Fig.2 Schematic illustration of stress update

如图 3,点 A 的 $f_A = f(\sigma_A, W_{p^*}, A) < 0$,点 B 的 $f_B = f(\sigma_A + D_{e,A} \cdot \Delta \epsilon, W_{p^*}, B)$,点 C 应满足屈服面 $f_C = f(\sigma_A + \alpha D_{e,A} \cdot \Delta \epsilon, W_{p^*}, C) = 0$,而 α 的初始值 α_0 可通过简单的线性计算获得,即由下式确定:

$$\alpha_0 = -\frac{f_A}{f_B - f_A} \quad (27)$$

由 α_0 确定的应力状态一般不满足屈服函数,通过 α_0 得到的应力状态对应于图 3 中的点 E ,那可以通过在点 E 进行泰勒展开可以得到更精准的 α 值。

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{f_E}{(\partial f_A / \partial (\sigma_A + \alpha_0 \cdot \Delta \sigma_e))^T \cdot \Delta \sigma_e} \quad (28)$$

式中: $\Delta \sigma_e$ 为弹性应变增量,由式 $\Delta \sigma_e = D_e \cdot \Delta \epsilon$ 计算

获得。那么处在屈服面上的点 C 的应力状态为

$$\sigma_C = \sigma_A + D_e(1 - \alpha)\Delta \epsilon \quad (29)$$

则在本增量步中的应变分量分为弹性和塑性两部分,分别为

$$\Delta \epsilon_e = (1 - \alpha)\Delta \epsilon \quad (30)$$

$$\Delta \epsilon_p = \Delta \epsilon - \Delta \epsilon_e \quad (31)$$

经过上述数值求解,就可以得到弹塑性交界面点 C 的应力状态,将其作为进行应力更新计算的起点。综上,弹塑性交界面计算流程下所示:①初始应力, $\sigma_0 = \sigma_B$ 和 $\Delta W_{p^*}, D = \Delta W_{p^*}, B$; ②如果 $f_B = f(\sigma_B, W_{p^*}, B) > 0$,则计算初始 $\alpha_0, \alpha_0 = -\frac{f_A}{f_B - f_A}$; ③开始进入迭代, $i = 1, 2, \dots, i_{\max}$, 其中 i 为迭代次数, i_{\max} 为最大迭代次数; ④计算应力状态: $\sigma_i = \sigma_{i-1} + \alpha D_e \Delta \epsilon$; ⑤计算 α 增量, $\Delta \alpha_i = -\frac{f(\sigma_i, W_{p^*}, i)}{(\partial f / \partial \sigma_i)^T \alpha D_e \Delta \epsilon}$; ⑥更新 α 值, $\alpha_i = \alpha_{i-1} + \Delta \alpha_i$; ⑦当 $f_C = |f(\sigma_i, W_{p^*}, i)| < T$ 迭代结束,其中 T 为容许误差; ⑧得到交界应力状态 $\sigma_C = \sigma_i$ 和 $W_{p^*}, C = W_{p^*}, i$ 。

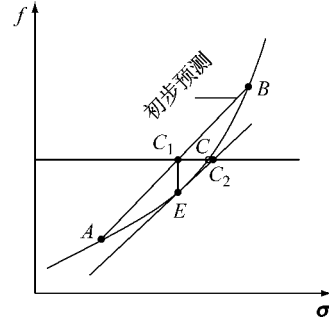


图 3 交界屈服面计算示意

Fig.3 Schematic illustration of technique for finding intersection with yield surface

2.2 应力更新及屈服面漂移修正

当确定应变增量含有塑性增量并且确定弹塑性交界屈服面后,就要进行最终应力状态的更新,本文通过式(26)进行应力状态的更新。

由于本构方程中的弹性刚度矩阵是基于本步长初始应力状态,因此弹塑性的刚度矩阵也取决于应力-应变的历史,那么在小应变增量条件下对矩阵进行线性近似才能保持较高的准确度。因此把本步长的应变增量分为更小的应变增量可以有效地控制误差。即

$$\delta \epsilon = \frac{\Delta \epsilon}{m} \quad (32)$$

则每一小应变增量后的应力增量为

$$\delta \sigma = D_{ep}(\sigma_0 + \Delta \sigma_{i-1}, W_{p^*}, 0 + \Delta W_{p^*}, i-1) \delta \epsilon \quad (33)$$

每一小增量步都通过式(26)进行应力更新。

虽然应变的细分可以减小屈服面的漂移,但是随着计算结果的误差累计,也可能导致超出允许误差结果。因此,在得到点 D 的应力状态以后(如图 2),需要判断点 D 是否满足屈服条件,如果不满足,那么屈服面产生漂移,要对点 D 的应力状态进行修正。而在修正过程中,总的应变增量保持不变,即

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = -d\boldsymbol{\varepsilon}_e = -|\mathbf{D}_e|^{-1} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_{D'} - \boldsymbol{\sigma}_D) \quad (34)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{D'} = \boldsymbol{\sigma}_D - \lambda \mathbf{D}_e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_B} \quad (35)$$

同时硬化参数可以表示为

$$W_{p^*,D'} = W_{p^*,D} + \Delta W_{p^*} \quad (36)$$

经过修正后的点 D 的应力状态应该满足屈服条件

$$f(\boldsymbol{\sigma}_{D'}, W_{p^*,D'}) = f(\boldsymbol{\sigma}_D - \lambda \mathbf{D}_e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_B}, W_{p^*,D} + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_B} \right)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_D) = 0 \quad (37)$$

而其中参数 λ 的取值可以在点 B 进行泰勒展开

$$\lambda = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}_D, W_{p^*,D})}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_D} \right)^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_D} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial W_{p^*,D}} \right) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_D} \right)^T \boldsymbol{\sigma}_D} \quad (38)$$

综上所述,屈服面漂移修正流程为:假定初始应力状态为 $\boldsymbol{\sigma}_D = \boldsymbol{\sigma}_B$ 和 $\Delta W_{p^*,D} = \Delta W_{p^*,B}$, 计算增量步结束时的应力及参数状态 $\boldsymbol{\sigma}_{D'}$ 和 $W_{p^*,D'}$, 步骤为:①初始应力, $\boldsymbol{\sigma}_D = \boldsymbol{\sigma}_B$ 和 $\Delta W_{p^*,D} = \Delta W_{p^*,B}$; ②屈服面漂移在允许误差外,则进入迭代: $i=1, 2, \dots, i_{\max}$; ③计算塑性应变参数 $\lambda = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}_D, W_{p^*,D})}{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_D} \right)^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_D} \right) - \left(\frac{\partial f}{\partial W_{p^*,D}} \right) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_D} \right)^T \boldsymbol{\sigma}_D}$; ④更新应力状态, $\boldsymbol{\sigma}_{D'} = \boldsymbol{\sigma}_D - \lambda \mathbf{D}_e \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_B}$; ⑤更新塑性功增量, $\Delta W_{p^*} = \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}_D} \right)^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_D$; ⑥更新塑性功, $W_{p^*,D'} = W_{p^*,D} + \Delta W_{p^*}$; ⑦当 $f_c = |f(\boldsymbol{\sigma}_i, W_{p^*,i})| < T$ 迭代结束; ⑧得到最终应力状态, $\boldsymbol{\sigma}_{D'} = \boldsymbol{\sigma}_D$ 和 $W_{p^*,D'} = W_{p^*,D}$ 。如上所述,应力更新算法流程如图 4。

3 模型及 umat 程序的验证

3.1 室内试验及数值模型的建立

如图 5 所示,平面应变压缩试样的尺寸为 $96 \text{ mm} \times 120 \text{ mm} \times 62 \text{ mm}$, 试验砂为饱和 Toyoura 砂, 其平均粒径 $D_{50} = 0.21$, 比重 $G_s = 2.65$, 最大孔隙比 $e_{\max} = 0.98$, 最小孔隙比 $e_{\min} = 0.62$ 。制备试样采用将

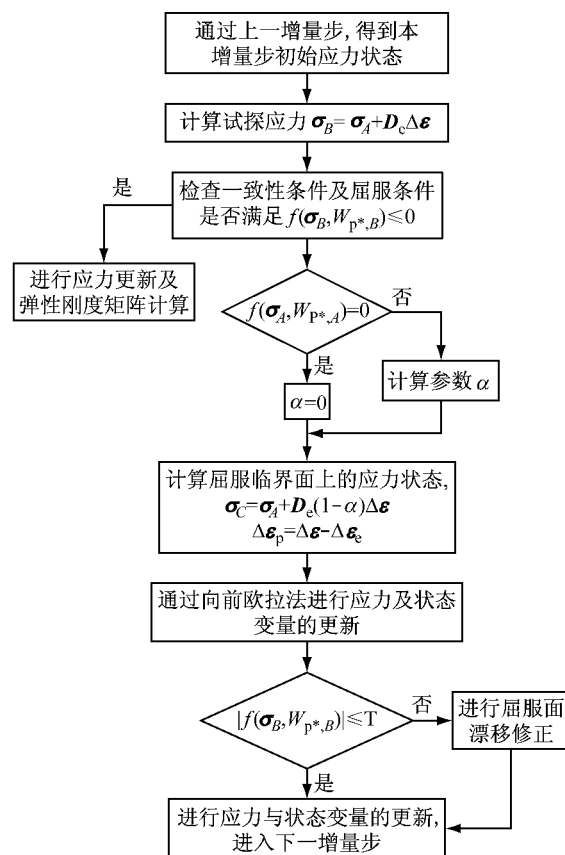


图 4 增量步应力更新流程

Fig.4 Flow chart for implementation of stress update

风干的砂土颗粒从空中自由落下的方式, 形成的试样初始孔隙比 $e_0 = 0.665$, 相对密度 $D_r = 87.39\%$ 。随后进行的试验有 2 种: 试验 1 是在试样饱和后施加 29.4 kPa 的围压, 然后在竖直方向施加位移载荷进行平面应变压缩试验; 试验 2 是在试样饱和后先施加 29.4 kPa 围压进行等压固结, 然后增加竖直方向即 σ_1 方向的压力, 使应力比 $R = \sigma_1 / \sigma_3$ 分别达到比值 $2, 3, 4, 5, 6$, 然后在竖直方向施加位移载荷进行平面应变压缩试验。

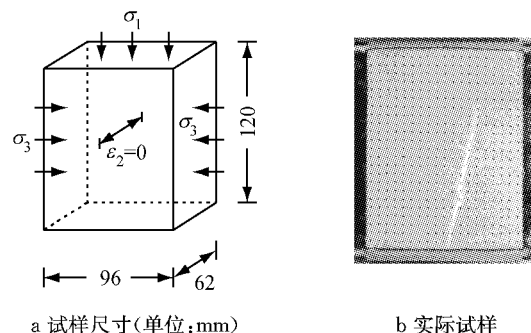


图 5 平面应变压缩砂土试样

Fig.5 Sand specimen for PSC test

对上述 2 种试验进行有限元数值模拟。根据砂土平面压缩试验, 在二维空间选择同种尺寸的有限

元模型,即 $96\text{ mm} \times 120\text{ mm}$;进行网格划分时,水平和竖直方向分别分成 16 和 20 等分,共有 320 个网格单元,选择单元类型为平面应变单元 CPE4R;模型边界条件为:左右边界限制水平方向位移,底部边界限制水平及竖直方向位移,上部为自由边界条件,用于位移载荷的施加.模型及网格划分见图 6(未显示边界条件).

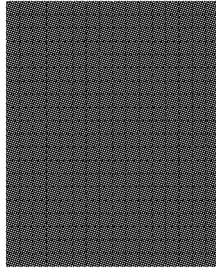


图6 有限元网格

Fig.6 FEM meshes

有限元的计算中需要 umat 子程序进行应力更新,而程序中的模型参数取值需要预先设定.本文采用文献[12]中的参数值,具体数值如表 1、表 2.

表1 弹性横观各向同性参数

Tab.1 Elastic isotropic parameters

σ_0	E_{v0}	E_{h0}	ν_0	m
98.1	1 820	1 638	0.163	0.494

表2 修正塑性功硬化参数

Tab.2 Modified plastic work hardening parameters

a	b	h	n	r	w_r
0.128 8	3.5×10^{-5}	0.431	0.9	0.09	0.28

3.2 单应力路径的有限元分析

对试验 1,有限元分析中也采用相同的加载步骤:先在左右边界和上端自由边界上分别施加 29.4 kPa 的压力,进行内外应力平衡,随后在上端自由边界上施加竖直方向位移载荷.

图 7 所示为饱和 Toyoura 砂平面应变压缩试验应力比 R 与竖直位移 ϵ_v 关系的有限元模拟与试验结果比较.从图 7 中可以看出,有限元模拟和试验所得的应力-应变关系基本一致,峰值强度也基本接近,峰值后的软化效果也基本吻合,从而实现了砂土材料的硬化-峰值-软化的全过程模拟.

3.3 多应力路径的有限元分析

对试验 2,有限元分析采用相同的步骤:先在左右边界和自由边界分别施加 29.4 kPa 的压力,进行内外应力平衡后,在上部自由边界施加与应力比相对应的 σ_1 ,进行内外应力平衡,随后在上部自由边界

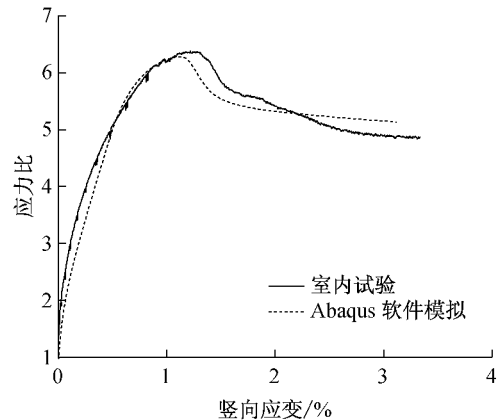


图7 应力比与竖向应变的关系

Fig.7 Relationship between the stress ratio and the vertical strain

施加竖直方向的位移载荷.

图 8 为饱和 Toyoura 砂平面应变不同应力路径下的压缩试验 $R-\gamma$ (其中 γ 为剪应变)关系有限元与试验结果的比较.图 9 为饱和 Toyoura 砂平面应变不同应力路径下的压缩试验 $R-\epsilon_{vol}$ (ϵ_{vol} 为体积应变)关系有限元与试验结果的比较.由图 8、图 9 可知,有限元的模拟与试验所得的应力-应变关系基本吻合,但是在应力路径发生变化时导致应力-应变曲线的突变从而不能较好地模拟,此现象需进一步研究.

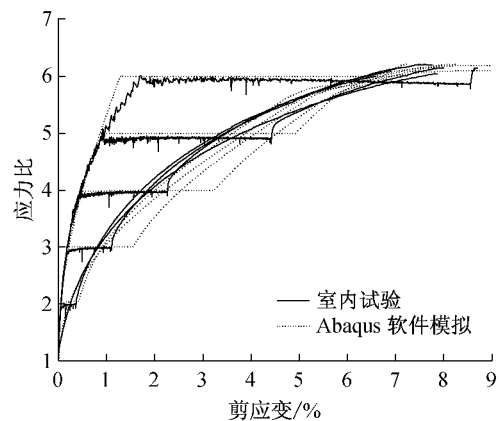


图8 应力比与剪应变的关系

Fig.8 Relationship between the stress ratio and the shear strain

4 结论

(1) 采用基于塑性功的砂土硬-软化弹塑性本构模型能够完整地描述砂土完整的应力加载过程,对不同应力比下的加载过程都能进行较为准确的模拟,验证了本构模型的准确性.

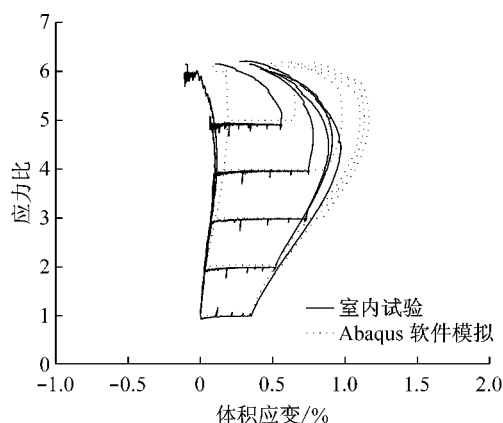


图 9 应力比与体积应变的关系

Fig. 9 Relationship between the stress ratio and volumetric strain

(2) 基于 Abaqus 软件平台, 显式算法能有效将硬-软化弹塑性模型嵌入, 说明了应力更新算法的实用性以及有效性。

(3) 基于显式积分算法的 umat 分析方法能够对砂土材料的应力-应变特性进行较为准确的模拟, 实现了从硬化→峰值→软化→残余的全过程模拟, 并对多应力路径下砂土的变形响应也有较好的模拟。

致谢: 本文所用室内试验结果来源于东京大学和东京理科大学的龙冈文夫研究室, 在此深表感谢。

参考文献:

- [1] 龚晓南. 对岩土工程数值分析的几点思考[J]. 岩土力学, 2011, 32(2): 321.
GONG Xiaonan. Reflections on numerical analysis of geotechnical engineering[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(2): 321.
- [2] Lade P, Duncan J M. Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1975, 101(GT10): 1037.
- [3] 郭瑞平, 李广信. 以塑性功函数为硬化参数的土的弹塑性模型[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2000, 40(5): 125.
GUO Ruiping, LI Guangxin. Elasto-plastic model of soil with a function of plastic work as the hardening function[J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2000, 40(5): 125.
- [4] 郭瑞平, 李广信, 阪上最一. 土的应变软化模型及其在边值问题中的应用[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2000, 40(8): 106.
Guo Ruiping, Li Guangxin, Sakajo S. Constitutive model for soil with strain-softening behavior and its application to boundary value problems[J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology, 2000, 40(8): 106.
- [5] 李亮, 赵成刚. 基于 SMP 破坏准则的饱和砂土弹塑性本构模型[J]. 应用力学学报, 2004, 21(4): 84.
LI Liang, ZHAO Chenggang. Elastoplastic constitutive model of

saturated sands based on the SMP failure criterion[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2004, 21(4): 84.

- [6] 马险峰, 望月利秋, 温玉君. 基于改良型平面应变仪的砂土特性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(9): 1745.
Ma Xianfeng, Mochizuki A, Wen Yujun. Study on properties of sand based on improved plane strain test apparatus[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(9): 1745.
- [7] 马险峰, 望月利秋, 蔡敏. 基于平面应变试验的修正塑性功硬化软化模型[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(6): 887.
Ma Xianfeng, Mochizuki A, Cai Min. Development elastoplastic model with revised plastic work function hardening function based on plane strain tests[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(6): 887.
- [8] 姚仰平, 周安楠, 侯伟. 砂土硬化特征的描述及其试验验证[J]. 北京航空航天大学学报, 2006, 32(10): 1186.
YAO Yangping, ZHOU Annan, HOU Wei. Description of hardening characteristics of sand and its confirmation[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2006, 32(10): 1186.
- [9] 罗汀, 姚仰平. 岩土材料应力路径无关硬化参量的构成方法[J]. 岩土力学, 2007, 28(1): 69.
LUO Ting, YAO Yangping. Method for developing hardening parameter independent of stress path for geomaterials[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007, 28(1): 69.
- [9] Yasin S J M, U Met S U K, Tatsuoka F, et al. Plane strain strength and deformation of sands affected by batch variations and different apparatus types[J]. Geotechnical Testing Journal, ASTM, 1999, 21(1): 80.
- [10] Yasin S J M, Tatsuoka f. Stress history-dependent deformation characteristics of dense sand in plane strain[J]. Soil and Foundations, 2000, 40(2): 77.
- [11] 彭芳乐, 白晓宇, 亚辛, 等. 砂土应力路径不相关的修正塑性功硬化参量与函数[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(6): 1171.
Peng Fangle, Bai Xiaoyu, Yasin S J M, et al. Modified plastic-work hardening parameter and function independent of stress path for sandy soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(6): 1171.
- [12] 彭芳乐, 白晓宇, 谭轲等. 基于修正塑性功函数的砂土硬-软化本构模型[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2009, 37(6): 720.
PENG Fangle, BAI Xiaoyu, TAN Ke, et al. An elastoplastic constitutive model with hardening-softening behavior for sandy soil based on the modified-plastic work state function[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2009, 37(6): 720.
- [13] Sloan S W. Substepping schemes for the numerical integration of elasto-plastic stress-strain relations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1987, 24: 893.
- [14] Ortiz M, Simo JC. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 23: 353.
- [15] Sloan S W, Abbo A J, Sheng D. Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control[J]. Engineering Computations, 2001, 18(1/2): 121.
- [16] Crisfield M A. Non-linear finite element analysis of solids and structures[M]. Chichester: Wiley, 1991.