

# 基于 HouseHold 变换的全球卫星导航系统参数解算方法

段兵兵<sup>1</sup>, 王解先<sup>1,2</sup>, 王 成<sup>1</sup>

(1. 同济大学 测绘与地理信息学院, 上海 200092; 2. 现代工程测量国家测绘地理信息局重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 研究传统最小二乘和卡尔曼滤波方法求解 GNSS (Global Navigation Satellite System) 观测方程时接收机钟差参数的处理策略, 将失效的接收机钟差参数通过矩阵变换的方式消除. 针对计算机截断误差可能会造成卡尔曼滤波结果发散的现象, 将 HouseHold 变换用于 GNSS 观测方程参数求解中, 根据其建立的正交矩阵的特性, 导出求解公式. 结果表明, 该方法在理论上可消除计算机截断误差的影响, 且在存储空间上仅为传统方法的一半, 可有效节约计算机资源.

**关键词:** 全球卫星导航系统; 最小二乘; 卡尔曼滤波; HouseHold 变换

**中图分类号:** P228

**文献标志码:** A

## Algebraic Solution of GPS Equations Based on HouseHold Transformation

DUAN Bingbing<sup>1</sup>, WANG Jiexian<sup>1,2</sup>, WANG Cheng<sup>1</sup>

(1. College of Surveying and Geo-informatics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Advanced Engineering Surveying of National Administration of Surveying, Mapping and Geo-information, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Processing strategy of receiver clock error offset in least squares and Kalman filtering method for global navigation satellite system (GNSS) solution is mentioned. Disabled clock error offsets will be eliminated through matrix transformation. Due to the fact that Kalman filter algorithm is sensitive to computer foundoff, HouseHold transformation is put in GNSS parameter solution. According to the properties of its initial reflective matrix, this method is proved to be effectively. It is found that the computer roundoff can be eliminated, which is more elegant in theory. Plus, the solution using HouseHold transformation is more space saving and efficient.

**Key words:** global navigation satellite system(GNSS); least squares; Kalman filter; HouseHold transformation

最小二乘估计理论和卡尔曼滤波理论是目前常用的 GNSS (Global Navigation Satellite System) 参数解算方法. 与最小二乘估计理论相比, 卡尔曼滤波更适合于动态定位, 它是在线性无偏最小方差估计原理下推得的一种递推滤波方法, 引入了状态空间的概念, 借助系统的状态转移方程根据前一时刻的状态估值和当前时刻的观测值递推估计新的状态估值<sup>[1]</sup>. 然而, 对于非线性观测方程, 线性化处理时会引入模型误差, 且对于数值长度为  $n$  的元素, 相乘或相除结果后其数值长度应为  $2n$ , 但实际上计算机表示位数有限, 很难表示位数很长的数据, 因此权矩阵就有可能因为数据的舍去而失去正定和对称的特性, 从而导致计算结果发散<sup>[2]</sup>. 对此, 本文将 HouseHold 变换应用到参数解算中, 利用二范数和正交矩阵的特性, 导出一种 GNSS 参数计算方法, 消除计算机截断误差的影响, 并以 GPS (Global Positioning System) 伪距定位为例, 验证了该方法的正确性.

## 1 最小二乘定位算法

对 GPS 观测方程在  $X_k^0$  处进行线性化, 得到  $k$  历元时的误差方程. 观测方程及线性化具体步骤参照文献<sup>[3]</sup>.

$$v_k = A_k \delta x_k - l_k \quad (1)$$

式中:  $v_k$  为残差;  $A_k$  为系数矩阵;  $\delta x_k$  为待求参数;  $l_k$

收稿日期: 2013-05-09

基金项目: 国家自然科学基金(41174023); 精密工程与工业测量国家测绘地理信息局重点实验室开放基金(PF2012-10); 国家“九七三”重点基础研究发展计划(2013CB733304)

第一作者: 段兵兵(1985—), 男, 博士生, 主要研究方向为卫星大地测量与应用. E-mail: 410\_duanbingbing@tongji.edu.cn

通讯作者: 王解先(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 理学博士, 主要研究方向为卫星大地测量与应用.

E-mail: wangjiexian@tongji.edu.cn

为常数阵.

建立  $k$  时刻的法方程为

$$\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k \delta \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{l}_k \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{P}_k$  为  $k$  时刻观测值的权阵, 可根据卫星高度角确定<sup>[4]</sup>. 根据式(2)可得出  $k$  时刻的参数值  $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_k^0 + \delta \mathbf{x}_k$  和其协方差矩阵  $\mathbf{D}_{X_k} = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k)^{-1}$ .

在静态处理模式中, 可将  $k$  历元解出的参数  $\mathbf{X}_k$  作为第  $k+1$  历元时刻的虚拟观测值建立误差方程, 与第  $k+1$  历元观测值组成误差方程一起求解未知参数.

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k = \delta \mathbf{x}'_{k+1} - \mathbf{l}' \\ \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{A}_{k+1} \delta \mathbf{x}'_{k+1} - \mathbf{l}_{k+1} \end{cases} \quad (3)$$

式(3)中, 若要总体平差必须采用一致的初值, 将  $\mathbf{X}_{k+1}^0$  作为  $k+1$  历元参数的初值, 则  $\delta \mathbf{x}'_{k+1} = \delta \mathbf{x}_{k+1} - \delta \mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{l}' = \mathbf{X}_k^0 - \mathbf{X}_{k+1}^0$ . 建立  $k+1$  时刻的法方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{X_k}^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}'_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{k+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{X_k}^{-1} \\ \mathbf{P}_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l}' \\ \mathbf{l}_{k+1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{I}$  为单位阵. 则

$$\delta \mathbf{x}'_{k+1} = (\mathbf{D}_{X_k}^{-1} + \mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1})^{-1} \cdot (\mathbf{D}_{X_k}^{-1} \mathbf{l}' + \mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{l}_{k+1}) \quad (5)$$

解算过程中, 接收机钟差作为白噪声参数, 每个历元对应一个接收机参数. 对于第  $k+1$  历元来说, 无需计算之前历元的接收机钟差, 每个历元可以将上个历元失效的接收机钟差参数消去. 令  $a_{j,k}$  为式(4)法方程系数矩阵各位置上的元素,  $c_k$  为法方程常数阵各位置上的元素. 若要消去第  $i$  个参数, 则法方程系数阵和常数阵分别变为<sup>[5]</sup>:

$$\begin{cases} a_{j,k} = a_{j,k} - a_{j,i} a_{i,k} / a_{i,i} \\ c_k = c_k - c_i a_{k,i} / a_{i,i} \end{cases} \quad (6)$$

从第  $k+1$  历元起, 法方程中第  $i$  元素对应的新的参数.

## 2 卡尔曼滤波算法

动态定位中, 无法将  $k$  历元的观测值直接作为第  $k+1$  历元的虚拟观测值. 卡尔曼滤波理论根据接收机的运动状态建立  $k$  历元与  $k+1$  历元间的状态方程, 利用协方差传播定律求得  $k+1$  历元的初始协方差, 联合  $k+1$  历元的观测值, 更新其参数估计值和协方差阵.

记  $\mathbf{X}_k$  为  $k$  历元参数值,  $\bar{\mathbf{X}}_{k+1}$  为对历元的预报值.  $\bar{\mathbf{D}}_{X_{k+1}}$  为  $\bar{\mathbf{X}}_{k+1}$  的协方差阵.

$$\bar{\mathbf{X}}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{X}_k \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{X_{k+1}} = \Phi_k \mathbf{D}_{X_k} \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (8)$$

式中:  $\Phi_k$  为状态转移矩阵;  $\mathbf{Q}_k$  为过程噪声矩阵. 静态定位中, 接收机位置固定不动, 接收机钟差模拟为白噪声参数,  $\Phi_k = \text{diag}(1, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{Q}_k = \text{diag}(0, 0, 0, \sigma_{dt}^2)$ ; 低速运动中,  $\Phi_k = \text{diag}(1, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{Q}_k = \text{diag}(\mathbf{Q}'_{dx} \Delta t, \mathbf{Q}'_{dy} \Delta t, \mathbf{Q}'_{dz} \Delta t, \sigma_{dt}^2)$ .  $\text{diag}$  表示对角矩阵,  $\sigma_{dt}^2$  表示接收机钟差噪声,  $\mathbf{Q}'_{dx}$ ,  $\mathbf{Q}'_{dy}$ ,  $\mathbf{Q}'_{dz}$  表示接收机随机游走过程.

将  $\bar{\mathbf{X}}_{k+1}$  作为虚拟观测值, 建立  $k+1$  历元时刻法方程, 更新预报值和协方差阵.

$$(\bar{\mathbf{D}}_{X_k}^{-1} + \mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}) \delta \mathbf{x}_{k+1} = \bar{\mathbf{D}}_{X_k}^{-1} (\bar{\mathbf{X}}_{k+1} - \mathbf{X}_{k+1}^0) + \mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{l}_{k+1} \quad (9)$$

运用文献[6]的逆矩阵分解理论, 参数估计值和协方差矩阵可写为

$$\mathbf{D}_{X_{k+1}} = (\mathbf{I} - \mathbf{J}_{k+1} \mathbf{A}_{k+1}) \bar{\mathbf{D}}_{X_{k+1}} \quad (10)$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = \bar{\mathbf{X}}_{k+1} + \mathbf{J}_{k+1} \mathbf{l}_{k+1} \quad (11)$$

式(10), (11)中:  $\mathbf{J}_{k+1} = \bar{\mathbf{D}}_{X_{k+1}} \mathbf{A}_{k+1}^T (\mathbf{A}_{k+1} \bar{\mathbf{D}}_{X_{k+1}} \mathbf{A}_{k+1}^T + \mathbf{R})^{-1}$ . 式(7), (8)和(10), (11)为经典卡尔曼滤波递推公式, 其中初始权阵的选取比较困难, 可采用经验值或前两历元解算得出的先验权<sup>[1]</sup>.

通常, 卡尔曼滤波可获得较为理想的结果, 但在某些情况下, 滤波结果可能会发散. Mohinder 研究了导致滤波结果发散的几个主要原因, 其中有两个是由计算机截断误差引起. 如系数阵  $\mathbf{A}$  为近似奇异矩阵, 计算机截断误差可能使  $\mathbf{A}_{k+1} \bar{\mathbf{D}}_{X_{k+1}} \mathbf{A}_{k+1}^T$  变为奇异矩阵; 或  $\mathbf{A}$  为大数值矩阵且选取较大初始权阵  $\mathbf{D}_{X_0}$  和极小观测噪声矩阵  $\mathbf{R}$ , 计算机截断误差会使  $\mathbf{A}_{k+1} \bar{\mathbf{D}}_{X_{k+1}} \mathbf{A}_{k+1}^T + \mathbf{R} = \mathbf{A}_{k+1} \bar{\mathbf{D}}_{X_{k+1}} \mathbf{A}_{k+1}^T$ , 多历元累计后, 滤波结果将出错<sup>[7]</sup>.

## 3 基于 HouseHold 变换的参数求解方法

最小二乘估计理论的基本思想是:

$$\| \mathbf{A}_i \delta \mathbf{x} - \mathbf{l}_i \|_2 = \min \quad (12)$$

等式左边乘以一正交矩阵  $\mathbf{H}$ , 根据矩阵 2 范数的特性<sup>[8]</sup>  $\| \mathbf{H} \mathbf{z} \|_2 = \| \mathbf{z} \|_2$ , 式(12)等价于

$$\| \mathbf{H} \mathbf{A}_i \delta \mathbf{x} - \mathbf{H} \mathbf{l}_i \|_2 = \min \quad (13)$$

HouseHold 变换是通过建立初等反射矩阵  $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ , 使得对于任意实数矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  ( $m \geq n$ ), 有  $\mathbf{H} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是具有非负对角元上的三角阵.

将式(13)中  $\mathbf{H}l_i$  分解为  $\mathbf{H}l_i = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ ,  $z_1 \in \mathbf{R}^n$ ,  $z_2 \in \mathbf{R}^{m-n}$ , 则

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \delta \mathbf{x} - \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\|_2 = \min \quad (14)$$

要使得上式成立,则

$$\mathbf{R} \delta \mathbf{x} - z_1 = \mathbf{0} \quad (15)$$

若要得出参数  $\delta \mathbf{x}$ , 必须知道  $\mathbf{R}$  矩阵和  $\mathbf{H}l_i$  矩阵. 计算过程中,  $\mathbf{R}$  矩阵完全来自于  $\mathbf{A}$  矩阵, 无需计算和储存正定矩阵  $\mathbf{H}$ .  $\mathbf{H}l_i$  矩阵如果通过首先求得矩阵  $\mathbf{H}$ , 再由矩阵相乘得出, 则计算量较大, 且矩阵维数  $m$  越大, 计算越繁琐. 本文利用 HouseHold 变换, 计算  $\mathbf{H}l_i$  矩阵.

$$\mathbf{H}l_i = l_i - \gamma \mathbf{u} \quad (16)$$

式中:  $\gamma = 2\mathbf{y}^T \mathbf{u} / \mathbf{u}^T \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}$  为一非零向量, 可通过式(17)设定.

$$l_i = (l_i^T \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v} \quad (17)$$

式中:  $\bar{\mathbf{u}}$  为  $\mathbf{u}$  的单位向量;  $\mathbf{v}$  为  $\mathbf{u}$  的正交向量. 因此,  $\mathbf{H}l_i$  阵的计算也无需计算  $\mathbf{H}$  阵.  $\mathbf{R}$  矩阵和  $\mathbf{H}l_i$  矩阵的具体计算形式可参考文献[6].

GPS 伪距定位中, 假设在第  $k$  历元观测到  $m$  颗卫星, 并具有先验信息矩阵  $\mathbf{P}_{k-1}^0$ , 伪距定位中  $\mathbf{P}_{k-1}^0$  为  $4 \times 4$  对称正定矩阵, 可将其分解为  $\mathbf{P}_{k-1}^0 = \mathbf{R}_0^T \mathbf{R}_0$ ,  $\mathbf{R}_0$  为上三角矩阵. 将  $\mathbf{R}_0$  作为虚拟观测值, 与第  $k$  历元观测值组成观测方程.

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{(m+4) \times 4} \delta \mathbf{x}_k - \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k-1}^0 - \mathbf{X}_k^0 \\ \mathbf{l}_k \end{bmatrix}_{m+4} \quad (18)$$

若考虑观测值权阵, 式(18)为

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{(m+4) \times 4} \delta \mathbf{x}_k - \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k-1}^0 - \mathbf{X}_k^0 \\ \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{l}_k \end{bmatrix}_{m+4} \quad (19)$$

式中:  $\bar{\mathbf{P}}_k^T \bar{\mathbf{P}}_k = \mathbf{P}_k$  为  $k$  历元观测值的权阵. 对

$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \bar{\mathbf{P}}_k \mathbf{A}_k \end{bmatrix}$  进行 HouseHold 变换, 由式(11)至式(14)在

第  $k$  历元可得

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ & & r_{33} & r_{34} \\ & & & r_{44} \end{bmatrix} \delta \mathbf{x}_k - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (20)$$

式中:  $r_{i,j}$ ,  $b_i$  分别为  $k$  历元得出的上三角矩阵  $\mathbf{R}_k$  和常数阵  $z_1$  对应位置上的元素, 通过式(20)可以解出  $\delta \mathbf{x}_k$ , 其协方差为  $(\mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_k)^{-1}$ . 进一步考虑过程噪声, 建立滤波递推过程.

计算机截断误差的主要影响是由于计算机对数值位数的舍去导致滤波结果发散, HouseHold 变换可通过建立的初等反射矩阵将系数矩阵转换为上三角矩阵求解参数, 避免计算机截断误差的影响; 若不考虑过程噪声, 上三角矩阵  $\mathbf{R}$  可直接作为下一步观测量的先验信息, 数值范围大幅度降低, 可避免因数值范围较大引起的计算机截断误差.

## 4 算例分析

本文对上海 shao 站 2013 年 1 月 15 日 20 h 的数据进行处理. 电离层采用双频组合进行消除; 对流层采用 Saastmoinen 模型计算天顶方向延迟量, 映射函数采用 GMF<sup>[9]</sup>; 相对论效应通过卫星位置和速度信息计算得出; 卫星坐标和钟差通过广播星历计算.

图 1~3 为静态模式下最小二乘、卡尔曼滤波和基于 HouseHold 变换的参数求解方法得出的定位结果与 ITRF (International Terrestrial Reference Frame) 框架下已知值的差值, 横轴表示观测历元, 统计结果见表 1.

计算发现, 静态定位中, 最小二乘方法和基于 HouseHold 分解的参数解算方法得出的计算结果完全相同. 卡尔曼滤波方法得出的结果存在较小的差异, 这是因为卡尔曼滤波方法对接收机钟差的处理

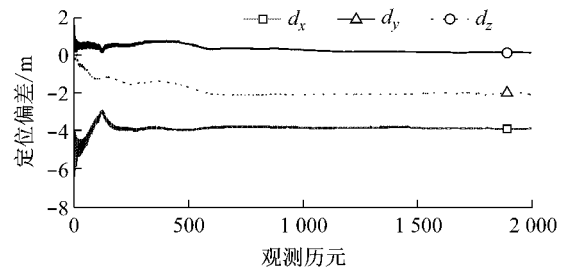


图 1 最小二乘静态定位结果

Fig.1 Least squares stationary positioning results

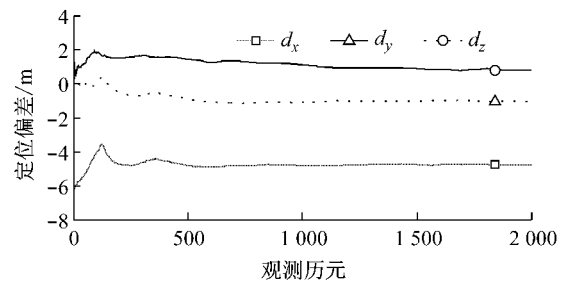


图 2 卡尔曼滤波静态定位结果

Fig.2 Kalman filter stationary positioning results

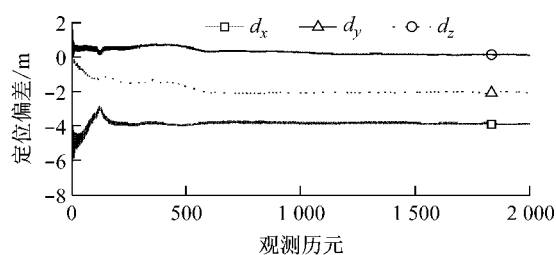


图 3 HouseHold 分解法静态定位结果

Fig.3 HouseHold stationary positioning results

表 1 三种方法静态解算结果均方根  
Tab.1 Stationary positioning results of three methods(RMS)

求解方法	均方根/m		
	X	Y	Z
最小二乘	0.207	0.327	0.181
卡尔曼滤波	0.203	0.283	0.311
HouseHold 分解	0.207	0.327	0.181

策略与其他两种方法不同,最小二乘和参数分解法是消除协方差中的接收机钟差参数,卡尔曼滤波是将接收机钟差的白噪声特性体现在噪声矩阵  $Q$  中。此外,先验权的设置也可能是导致该差异的原因。

为了验证基于 HouseHold 分解的参数解算方法在动态定位中的效果,将 shao 站数据采用动态模式解算。

图 4,5 为卡尔曼滤波和基于 HouseHold 分解的参数解算方法动态定位结果,统计结果见表 2。

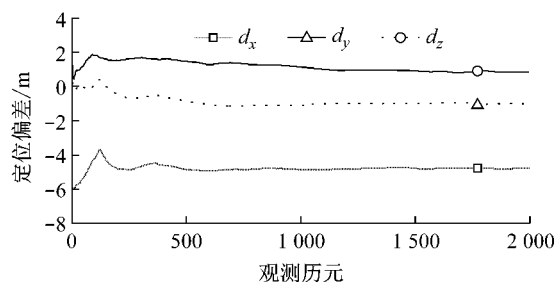


图 4 卡尔曼滤波动态定位结果

Fig.4 Kalman filter dynamic positioning results

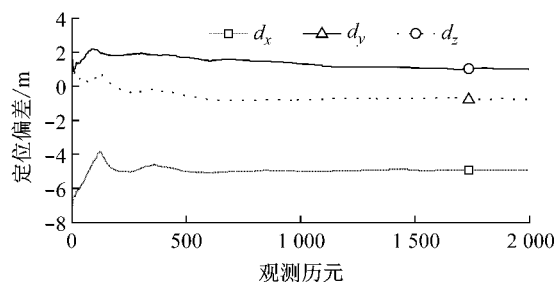


图 5 HouseHold 分解法动态定位结果

Fig.5 HouseHold dynamic positioning results

表 2 两种方法动态解算结果(RMS)

Tab.2 Dynamic results of two methods(RMS)

求解方法	均方根/m		
	X	Y	Z
卡尔曼滤波	0.188	0.277	0.306
HouseHold 分解	0.188	0.277	0.306

通过计算发现,基于 HouseHold 分解的参数解算方法在动态定位中可以同卡尔曼滤波获得同样的结果。

## 5 结论

研究了传统最小二乘估计理论和卡尔曼滤波理论求解 GNSS 参数时对于接收机钟差和先验权的处理策略。在卡尔曼滤波中,通常选取较大初始矩阵和较小噪声阵,这可能会带来计算机截断误差,从而导致滤波结果发散。本文将 HouseHold 变换运用至 GNSS 参数求解中,避免多维矩阵相乘,减小各数值长度,从理论上说明计算结果更为稳定。通过对实验数据的计算,得出以下结论:

(1) 静态模式下,基于 HouseHold 分解的参数解算方法和最小二乘方法得出的结果完全一致,说明该解算方法正确可行,且数据存储空间仅为传统方法的一半。

(2) HouseHold 变换为初等反射变换,其优势在于计算过程中无需储存和计算正交矩阵  $H$ 。

(3) 基于 HouseHold 分解的参数解算方法直接对系数矩阵  $A$  进行分解,避免因计算机截断误差导致滤波结果发散。滤波过程中,先验权矩阵为平方根矩阵,可保持对称和正定的特性,同时缩短了计算变量的数值范围,避免计算机截断误差影响。

## 参考文献:

- [1] 祁芳. 卡尔曼滤波算法在 GPS 非差相位精密单点定位中的应用研究[D]. 武汉:武汉大学,2003.  
QI Fang. Research on Kalman filter algorithm in GPS precise point positioning using un-differenced phase[D]. Wuhan: Wuhan University,2003.
- [2] 楼益栋. 导航卫星实时精密轨道与钟差确定[D]. 武汉:武汉大学,2008.  
LOU Yidong. Research on real-time precise GPS orbit and clock offset determination[D]. Wuhan: Wuhan University,2008.
- [3] 王解先. GPS 精密定轨定位[M]. 上海:同济大学出版社,1997.  
WANG Jiexian. GPS precise orbiting and positioning [M]. Shanghai: Tongji University Press,1997.