

单轴受拉状态下混凝土非局部化细观损伤模型

刘汉昆¹, 李 杰^{1,2}

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘要: 以非局部化理论和随机损伤力学为基础, 从细观机制出发考虑断裂和塑性滑移的影响, 提出了非局部细观损伤模型. 利用残余应力系数反映塑性滑移对损伤细观机制的影响; 利用非局部化比例解决层数敏感性问题. 结合细观和宏观两个尺度进行损伤本构模型建模, 描述混凝土内部的应变发展、损伤演化以及沿受力方向任一高度处的应力-应变关系. 基于非局部化比例分析得出的应力-应变关系与实验结果符合较好.

关键词: 混凝土; 随机损伤; 本构关系; 非局部化

中图分类号: TU528.1

文献标志码: A

Nonlocal Micro-damage Model for Concrete Under Uniaxial Tension

LIU Hankun¹, LI Jie^{1,2}

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on nonlocal theory and stochastic damage mechanics, a nonlocal micro-damage model is developed. By introducing the residual stress factor, the plastic slip effect on damage is reflected. Avoidance of spring layer sensitivity can be achieved with nonlocal proportion. A two-scale damage model provides knowledge about strain development, damage evolution and elaborate stress and strain relationship. The non-local proportion-based analysis leads to stable and reasonable results, which agree well with experimental data.

Key words: concrete; stochastic damage; constitutive law; nonlocal theory

的核心和难点. 同时, 混凝土材料具有随机分布性质, 使得初始损伤分布和后续的损伤演化进程不可避免地具备随机性的特征^[1].

在模拟材料力学行为的研究中, 弹簧模型以其形式简单且力学行为丰富而受到研究者的青睐. 1926 年, Peirce^[2] 最早提出了“纤维束模型”(fiber bundle model), 用来描述纺织工程中纤维束的单轴受拉非线性特性; 1945 年, Daniels^[3] 研究了纤维束强度的概率分布. 由于研究对象为纺织工程, 无论是 Peirce 还是 Daniels, 他们的研究方法在总体上属于宏观物理的范畴. 1967 年, Iwan^[4] 引入与 Peirce 模型类似的分布单元模型 (distributed element model), 用于研究单轴受拉试件在重复荷载下的弹塑性反应. 1982 年, Krajcinovic et al^[5] 在 Iwan 模型基础上, 首次引入损伤的概念并用基本单元的断裂概率定义损伤变量, 在此基础上, 初步建立了连续损伤理论与统计强度理论的桥梁. 令人遗憾的是, 由于采用单元断裂概率定义损伤, Krajcinovic 模型在本质上属于确定性本构模型. 1990 年, Breysee^[6] 在材料破坏研究中引入了两尺度分析的思想, 并首次在细观层次上提出了“并联弹簧模型”的概念. 在 Breysee 的工作中, 将断裂应变作为基本变量引入并联弹簧模型之中, 将损伤定义为细观断裂应变的分布函数, 并假定一定应变下的损伤服从二项式分布. 分析表明, 当并联弹簧数目接近无穷时, 其方差趋于零. 由于在损伤变量的基本定义上沿袭了 Krajcinovic 模型, Breysee 模型仍然是一确定性的模型. 1996 年, Kandarpa, et al^[7] 再次以并联弹簧模型为基础研究混凝土的单轴受力行为, 引入连续随机变量表示破坏位移, 并通过随机场的相关结构描述相邻弹簧的相互作用, 初步建立了基于并联弹簧模型的混凝土随机损伤模型. 但是, 由于用并联弹簧模

混凝土作为一种包含多个尺度的准脆性材料, 其多尺度建模研究已经成为一个热点. 在外部作用下, 混凝土显著的软化行为成为建模和分析过程中

收稿日期: 2013-06-17

基金项目: 国家自然科学基金(90715033, 51261120374)

第一作者: 刘汉昆(1985—), 男, 博士生, 主要研究方向为混凝土随机损伤力学. E-mail: liuhankuncivil@hotmail.com

通讯作者: 李 杰(1957—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为混凝土随机损伤力学, 随机动力系统分析与生命线工程抗灾. E-mail: lijie@tongji.edu.cn

型模拟单轴受力性能,本质上是以变形代替了应变,这一模型并不具有真正的细观意义.同时,Kandarpa 模型实质上属于均匀损伤模型,没有考虑混凝土软化过程中所表现出的损伤局部化现象.

1999 年以来,李杰等^[1,8-10]对上述模型做出实质性的改进,采用串、并联体系模拟混凝土单轴受力,引入细观断裂应变作为基本的随机变量,从细观层面定义了受拉损伤变量和受剪损伤变量,较为完整地建立了混凝土细观随机断裂模型,科学地揭示了细观损伤的随机性导致损伤过程非线性的本质.但是,进一步研究表明,为了模拟混凝土单轴受力行为,串、并联模型中弹簧层数的选取在很大程度上依赖于经验,事实上,在文献[8]的研究中是以 3 倍骨料最大粒径作为特征单元体的高度.而在一般模拟分析中可以发现,串、并联弹簧模型对弹簧层数十分敏感,即在应力-应变关系进入软化段之后,随着弹簧层数的增加,分析结果会表现出显著的层数敏感性.

鉴于此,本文试图引入非局部化理论,结合随机损伤力学的基本概念,探索解决以下几个问题:塑性滑移影响损伤的细观机制,弹簧层数敏感性,基于非局部化比例的建模分析.

1 多尺度抽象细观弹簧模型

在单轴受力情况下,混凝土表现出应变软化、强度(刚度)退化、塑性变形、残余应力等特征.同时,从文献[11]的研究结果发现,当材料在某一点发生损伤时,应力会在该处的一个邻域内发生重分布,使得该邻域内的材料应力由于损伤释放的附加应力而变大,从而发生进一步损伤(非简单的卸载),而对远处的材料基本没有影响,本文称这一邻域为“圣维南屏障区”.

采用串、并联弹簧相结合的方式反映混凝土材料的受力全过程,最简单的组合方式即为图 1a 所示的模型,即“先并联再串联”的模型.在这一模型中,基本的细观模型如图 1b 所示,其力学性质可以采用弹脆性行为^[1-10]或带有软化段的非线性行为^[11-12]来描述.

值得指出,图 1a 事实上引进了两个方向上的相关性:细观单元之间在横向的相关性,可以通过随机场相关结构来描述;细观单元之间竖向(指串联方向)的相关性,可以通过非局部化概念加以反映.

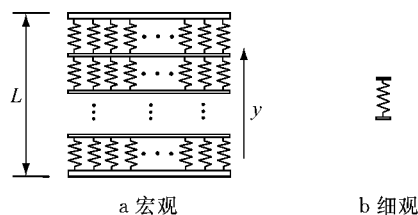


图 1 多尺度抽象弹簧模型

Fig.1 Spring model on each scale

2 细观单元表述

在混凝土受力过程当中,细观断裂、凝胶体的塑性滑移以及裂缝之间的滑移是客观存在的.本文试图从断裂、塑性滑移(含裂缝间的相对滑移)的细观机理出发,建立细观单元模型.如图 2 所示,定义细观的应力和应变分别为 σ_m 和 ϵ_m .

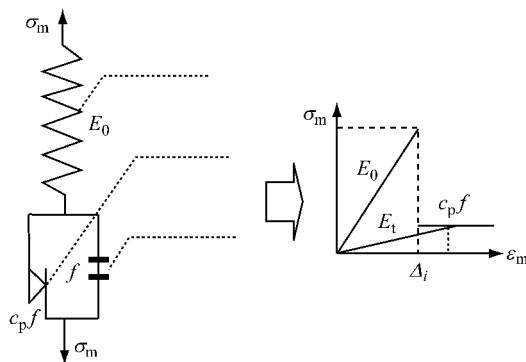


图 2 细观单元

Fig.2 Micro-element

设图 2 所示细观单元中弹簧的断裂应变为 Δ_i ,在加载达到 Δ_i 后,发生应力跌落,至 $c_p f$, c_p 为残余应力系数, f 为峰值应力.对加载过程中的任一点应变 ϵ_m ,可定义细观损伤变量为

$$D_m(\epsilon_m) = \frac{E_0 - E_t(\epsilon_m)}{E_0} \quad (1)$$

式中: E_0 为初始弹性模量; $E_t(\epsilon_m)$ 为应变 ϵ_m 时的割线模量,如图 2 所示.

(1) 当 $\epsilon_m < \Delta_i$ 时,细观单元处于弹性状态,损伤为零,即

$$D_m(\epsilon_m) = \frac{E_0 - E_0}{E_0} = 0 \quad (2)$$

(2) 当 $\epsilon_m = \Delta_i$ 时,细观弹簧发生突然断裂,应力跌至 $c_p f$,损伤为

$$D_m(\epsilon_m) = \frac{E_0 - E_t(\Delta_i)}{E_0} = \frac{E_0 - c_p E_0 \Delta_i / \Delta_i}{E_0} = 1 - c_p \quad (3)$$

(3) 当 $\epsilon_m > \Delta_i$ 时,发生塑性滑移,损伤为

$$D_m(\epsilon_m) = \frac{E_0 - c_p E_0 \Delta_i / \epsilon_m}{E_0} = 1 - c_p \frac{\Delta_i}{\epsilon_m} \quad (4)$$

综上,式(2)~(4)可以统一表示为

$$D_m(\epsilon_m) = \alpha_p H(\epsilon_m - \Delta_i), \quad \alpha_p = \left(1 - c_p \frac{\Delta_i}{\epsilon_m}\right) \quad (5)$$

式中:断裂应变 Δ_i 为服从某一概率分布的随机变量; $H(\cdot)$ 为 Heaviside 函数

$$H(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

在上述背景下,可定义图3所示并联单元的损伤变量为

$$D = \frac{A_D}{A} = \frac{\sum_{i=1}^M \alpha_p H(\epsilon_m - \Delta_i) A_i}{A} \quad (7)$$

式中: A 为并联单元损伤前的总截面积; A_D 为并联单元中微弹簧断裂而导致材料退出工作的面积; A_i 为微弹簧的截面积; M 为微弹簧个数。

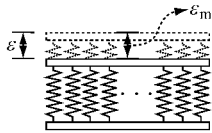


图3 并联单元

Fig.3 Parallel-series model

当弹簧个数 M 趋于无穷大时,并联弹簧可以看做一维连续体,根据随机积分的定义,若 $M \rightarrow \infty$ 时,式(7)的极限存在,则有

$$D(\epsilon) = \int_0^1 \alpha_p H[\epsilon - \Delta(x)] dx \quad (8)$$

系数 $\alpha_p = \left(1 - c_p \frac{\Delta(x)}{\epsilon}\right)$ 反映了由于细观塑性滑移对宏观损伤的影响.其中,并联单元的应变可由变形协调条件获得,即

$$\epsilon = \epsilon_{mi} \quad (9)$$

式(8)定义的损伤变量不仅反映了弹性损伤(面积减少)的影响,也通过 α_p 反映了弹性损伤发生后细观塑性滑移对损伤的影响。

3 非局部化模型

Bazant^[13]从细观力学的观点出发,认为“微裂缝之间的相互作用以及材料的非均质特性”导致了由微裂缝开展形成的损伤具有非局部化特征. Laalai 和 Sab^[14]的研究表明,损伤区(或剪切带)的宽度与材料特征长度成正比.因此,采用非局部化理论可以较好地描述混凝土这种典型的细观非均质材料的受

力行为。

3.1 并联单元的非局部化

1998年, Bazant 和 Jirasek^[15] 总结分析了常见的基于损伤软化的非局部化损伤模型(包括对应变、损伤能释放率、损伤变量、柔度系数、非弹性应力、非弹性应力增量、非弹性应变等变量进行的非局部化处理),指出:对损伤变量、非弹性应力、非弹性应力增量以及非弹性应变进行非局部化处理得到的非局部损伤模型会出现应力锁死(stress locking)现象。

20世纪80年代早期, Eringen 第一个提出对塑性变量进行非局部化处理. 为了描述相互位错以及裂缝尖端附近应力分布的非局部化效应, 1981年, Eringen^[16]建立了非局部化塑性模型. 1988年,为解决塑性软化引起的计算不稳定, Bazant 和 Lin^[17]提出了基于塑性软化的非局部化塑性模型。

本文综合以上非局部化损伤模型和非局部化塑性模型,对控制损伤和塑性的变量同时进行非局部化处理,试图发展一类非局部化本构模型。

对于图3所示的并联单元,其随机损伤本构方程可写为

$$\sigma = (1 - D)E_0\epsilon \quad (10)$$

经过变形,得

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_0} + D\epsilon \quad (11)$$

为计算方便,将式(11)进一步变形,得

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_0} (1 + \gamma) \quad (12)$$

将式(12)整理可得

$$\sigma = (1 + \gamma)^{-1} E_0 \epsilon \quad (13)$$

对控制软化的变量 γ (或者 $D\epsilon$) 在 l 长度范围内进行非局部处理,即

$$\bar{\gamma}(y) = \int_l g(s) \gamma(y+s) ds \quad (14)$$

$$g(s) = c \left\langle 1 - \frac{s^2}{R^2} \right\rangle \quad (15)$$

$$g(s) = \frac{1}{y_2 - y_1},$$

$$\begin{cases} y_1 = y - l/2, y_2 = y + l/2 & y_1 \geq 0 \text{ 或 } y_2 \leq L \\ y_1 = 0, y_2 = y + l/2 & y_1 < 0 \\ y_1 = y - l/2, y_2 = L & y_2 > L \end{cases} \quad (16)$$

式(14)~(16)中: $g(s)$ 为权函数,通常取钟形函数^[15](式15)或矩形函数^[18](式16),通过该权函数,使得原来的集中损伤由周围材料共同承担,由此反映材料之间在 y 方向上的相互作用; $\gamma(y+s)$ 为 $y+s$ 处的局部参数,与损伤变量 $D(y+s)$ 对应,

$\gamma(y+s)=D(y+s)/[1-D(y+s)]$; c 为尺度因子, 由归一化条件获得, 一维时取 $15/16R$, 二维时取 $3/\pi R^2$, 三维时取 $105/\pi R^3$, R 是与材料特征长度相关的量; $\langle \cdot \rangle$ 为 Macauley 算子, 即 $\langle x \rangle = \max(x, 0)$; l 为 y 方向的非局部化范围; y 方向如图 1a 所示。

定义非局部化比例为 $p_n = l/L$, 其中, L 为沿 y 方向的试件总长度。

3.2 宏观模型

对于图 1a 所示串、并联模型, 其各层的非局部应力-应变关系应满足如下所示的一组非线性方程组:

$$\begin{cases} \sigma_1 = (1 + \bar{\gamma}_1)^{-1} E_0 \epsilon_1 \\ \sigma_2 = (1 + \bar{\gamma}_2)^{-1} E_0 \epsilon_2 \\ \vdots \\ \sigma_i = (1 + \bar{\gamma}_i)^{-1} E_0 \epsilon_i \\ \vdots \\ \sigma_N = (1 + \bar{\gamma}_N)^{-1} E_0 \epsilon_N \end{cases} \quad (17)$$

且应满足力平衡和位移协调条件

$$\sigma_{MA} = \sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_j = \cdots = \sigma_N \quad (18)$$

$$\epsilon_{MA} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \epsilon_j \quad (19)$$

式中: σ_{MA} 和 ϵ_{MA} 为串并联体系的应力和应变; N 为总层数。

对于式(17)~(19)所示非线性方程组的求解可通过割线刚度迭代算法来实现, 见图 4 所示流程图。

假定断裂应变 $\Delta(x, y)$ 满足对数正态分布, 则 $Z(x, y) = \ln \Delta(x, y)$ 服从正态分布; 假定 $Z(x, y)$ 的数学期望和标准差分别为 λ 和 ζ , 可得

$$\lambda = E(\ln \Delta) \quad (20)$$

$$\zeta^2 = \text{var}(\ln \Delta) \quad (21)$$

4 非局部化模型分析

以下讨论均采用均值应力-应变曲线。分析中采用的参数如下: 弹性模量 $E_0 = 42$ GPa, 断裂应变二维随机场参数的均值 $\lambda = 4.92$, 方差 $\zeta = 0.80$ 。且采用不同的残余应力系数 c_p 和不同的非局部化比例 p_n 进行比较分析。

4.1 残余应力系数的影响

取非局部化比例 $p_n = 0.75$, 残余应力系数 c_p 分别取 0, 0.05, 0.10, 0.15 和 0.20 进行对比分析, 如图 5 所示。图 5 表明, 残余应力系数越大, 其对应的峰值应力越高、延性越好、残余应力也越高。

而该细观残余应力实质上来自于微裂缝之间的

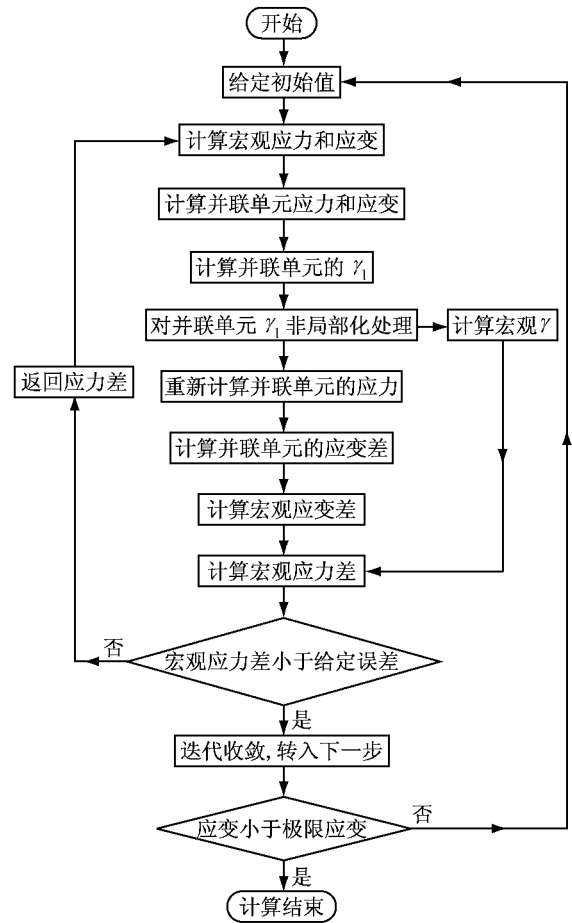


图 4 非局部化算法

Fig. 4 Nonlocal algorithms

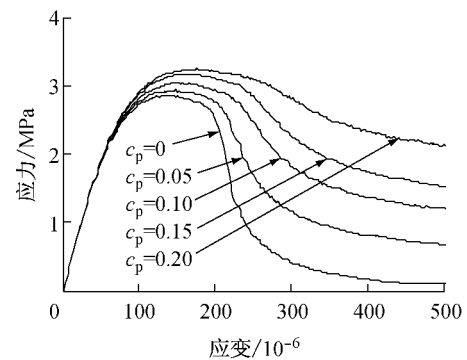


图 5 不同 c_p 对应的结果

Fig. 5 Results with different residual stress coefficients

塑性滑移, 由图 5 可以看出, c_p 会延缓损伤的发展, 也可以在一定程度上缓解以至于消除应力跌落现象。

4.2 模型层数敏感性问题

图 6 给出了在两种 c_p 取值条件下, 非局部化比例 p_n 为 0.25, 0.50, 0.75 和 1.00 时的对比分析(每一种情况均取 $N = 16, 32, 64, 128$)。结果表明, 通过引入非局部化理论, 在非局部化比例 p_n 确定之后, 无论模型层数如何变化, 应力-应变关系都将稳定在

某一特定区域,串并联模型在串联方向上的层数敏感性问题的敏感性大大减轻。

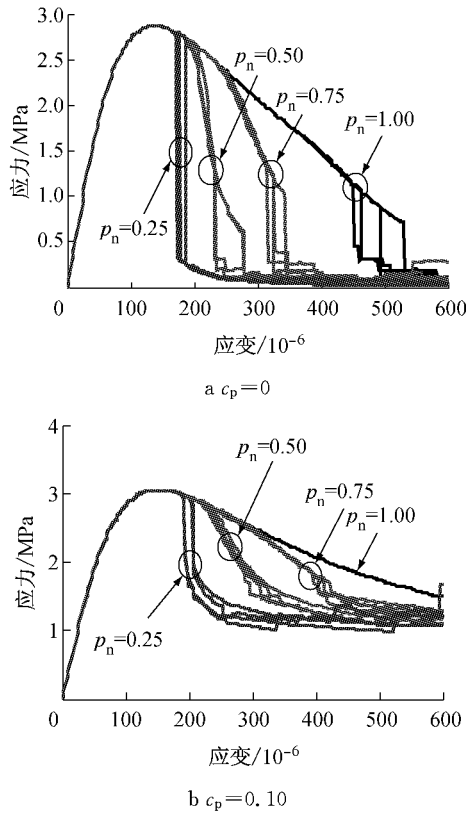


图6 层数敏感性
Fig.6 Layer sensitivity

可以看出, $p_n \leq 0.25$ 时将发生脆性破坏,同时,当 c_p 增大时,发生应力跌落的临界应变将增大。

4.3 应变发展和损伤演化

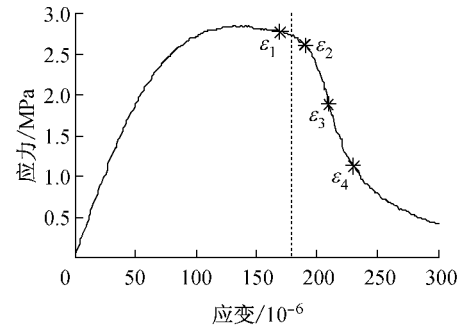
图7所示为 $p_n = 0.50$ 和 $c_p = 0.05$ 时的应力-应变关系(图7a),以及在应变 $\varepsilon_1 = 170 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_2 = 190 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_3 = 210 \times 10^{-6}$ 和 $\varepsilon_4 = 230 \times 10^{-6}$ 时的应变发展和损伤演化曲线(图7b)。

可见,随着总应变的增加,从初始阶段的均匀损伤(图7a虚线左侧)过渡到局部化损伤(图7a虚线右侧)。该模型使得损伤集中在具有一定宽度的区域,而不再集中于某一层,这说明了引入非局部化理论的有效性和必要性。

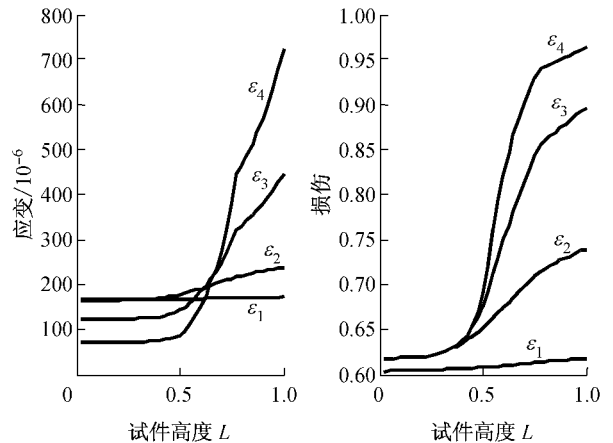
4.4 并联单元应力-应变关系

采用本文模型,可以对并联单元进行分析。下面对图6b中 $p_n = 0.25$ 和 $p_n = 0.75$ 对应的并联单元应力-应变关系进行对比分析。

由图8可以看出,沿 y 方向的并联单元应力-应变关系在峰值应力过后呈现出不同的状态。其中,图8a(1)~8a(6)和图8b(1)~8b(2)基本处于卸载状态(称为“卸载区”),图8a(7)~8a(8)和图8b(3)~



a 宏观应力-应变曲线



b 应变和损伤

图7 细观损伤演化和宏观非线性发展

Fig.7 Microscopic damage evolution and macroscopic nonlinear development

8b(4)处于卸载和软化相结合的状态(称为“过渡区”),而图8a(9)~8a(10)和图8b(5)~8b(10)则处于软化阶段(称为“软化区”)。此外,对比图8所示的两种情况,可以看出,由于其非局部化比例 p_n 不同,对应的“软化区”的长度也不相同, p_n 越大,“软化区”长度也越大。

值得指出,图中的卸载点并非位于峰值应力点,而是位于其后的某一点,且 p_n 越大,该卸载点对应的应变越大,该结论与文献[8,19]中采用能量分析得出的结果是一致的,但是,该模型除了能描述“卸载区”和“软化区”之外,还可以描述卸载和软化相结合的“过渡区”。

对并联单元受力性能的理解有望为混凝土精细化分析提供有力的工具。

5 单轴受拉全过程模拟

文献[8,20]研究指出混凝土特征高度取骨料最大尺寸的3倍,即 $3d_{\max}$ (d_{\max} 为骨料最大粒径)。文献[21]通过实验得出单轴受拉混凝土软化区宽度为

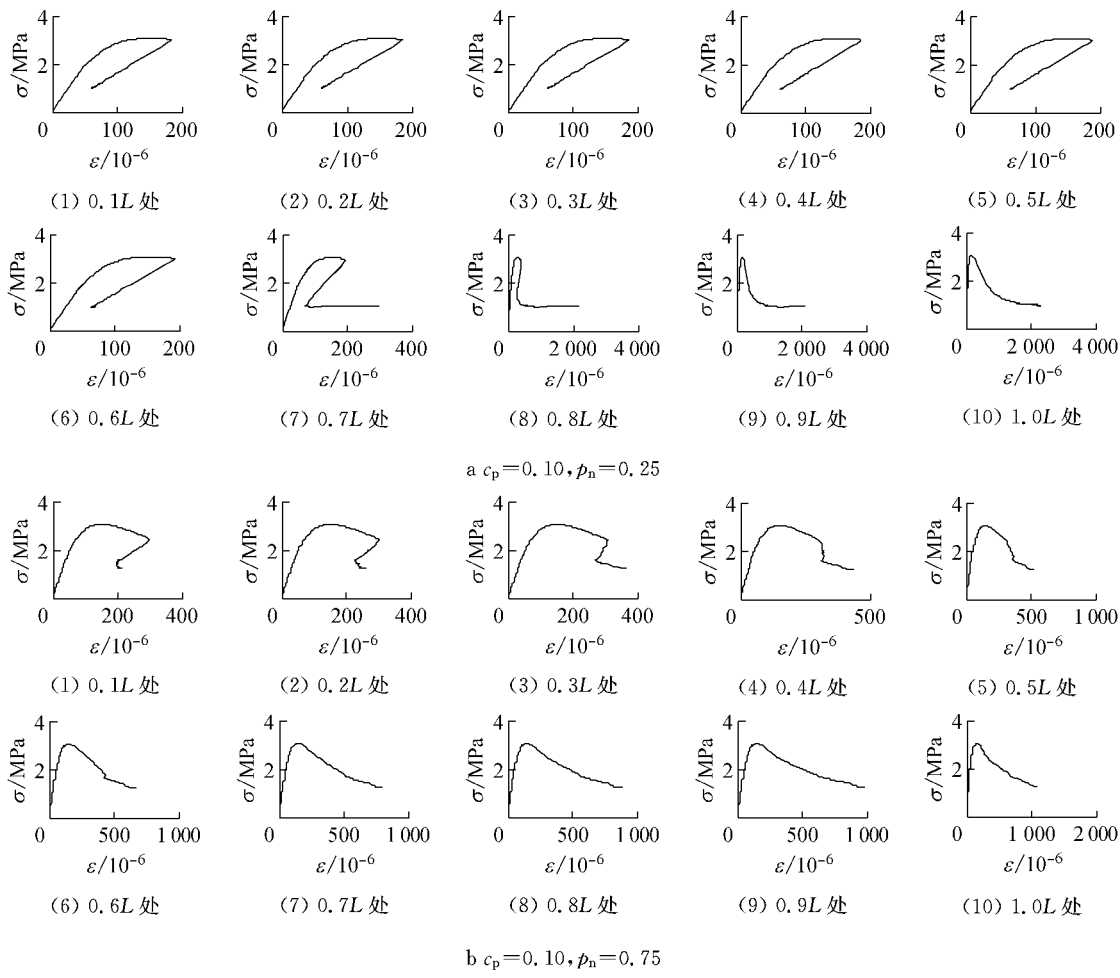


图 8 并联单元应力-应变关系

Fig.8 Stress and strain relationship for parallel model

(4~6) d_{\max} . 本文非局部化范围取 $l=nd_{\max}$, 取 $n=3\sim 6$, 如表 1 所示, 非局部化比例为

$$p_n = l/L = nd_{\max}/L \quad (22)$$

对文献[8, 21]中的实验结果进行模拟, 其识别的参数如表 2 所示, 对比结果如图 9 所示.

表 1 非局部化比例的确定

Tab.1 Nonlocal proportion

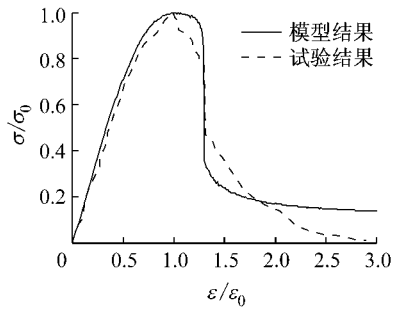
工况	d_{\max}/mm	n	l/mm	L/mm	p_n
文献[8]	25	3	75	170	0.44
文献[21]	30	5	150	300	0.50

表 2 均值应力-应变关系识别结果

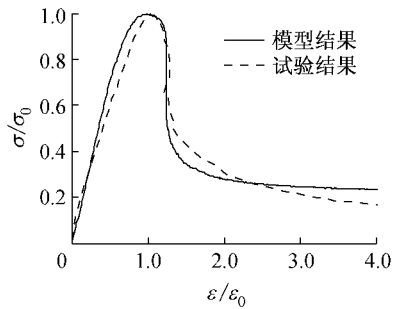
Tab.2 Coefficients in the constitutive model

工况	E_0/GPa	λ	ζ	c_p
文献[8]	51.2	4.82	0.55	0.06
文献[21]	36.2	4.77	0.48	0.11

模型与实验的对比结果表明, 该模型能够合理地描述混凝土单轴受拉全过程, 包括所表现出的应力跌落现象. 同时, 将骨料最大粒径作为单轴受拉作



a 文献[8]对比结果



b 文献[21]对比结果

图 9 混凝土单轴受拉全曲线

Fig.9 Stress and strain curves under uniaxial tension

用下混凝土非局部化比例的衡量指标是合理的. 建议对混凝土单拉行为进行模拟时,非局部化比例取 $(3\sim 6)d_{\max}/L$,残余应力系数取 10%左右.

6 结论

(1) 残余应力系数可以有效地反映微裂缝之间的塑性滑移对宏观损伤演化的影响.

(2) 通过非局部化理论,解决了串并联模型中存在的层数敏感性问题,使得模型仅与非局部化比例有关,而不依赖于弹簧层数. 分析表明,对于单轴受拉情况,非局部化比例仅与骨料最大粒径有关,这使得该模型具备了一定的物理基础.

(3) 本文从细观和宏观两个尺度进行损伤本构模型建模分析,能够很好地描述应变发展和损伤演化全过程,以及并联单元的精细受力特性,这在一定程度上揭示了细观损伤演化导致的宏观非线性发展.

(4) 基于非局部化比例进行混凝土单轴受拉的建模分析,可望得到符合客观事实的混凝土随机场参数.

参考文献:

- [1] 李杰. 混凝土随机损伤力学的初步研究[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2004, 32(10): 1270.
LI Jie. Research on the stochastic damage mechanics for concrete materials and structures [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2004, 32(10): 1270.
- [2] Peirce F T. Tensile test for cotton yarns—the weakest link [J]. Journal of Textile Institute, 1926, 17: 355.
- [3] Daniels H E. The statistic theory of the strength of bundles of threads. I. [P]. Proceedings of the Royal Society A, 1945, 183: 405.
- [4] Iwan W D. On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems [J]. Journal of Applied Mechanics, 1967, 34: 612.
- [5] Krajcinovic D, Stojimirovic A. Deformation processes in semi-brittle polycrystalline ceramics [J]. International Journal of Fracture, 1990, 42: 73.
- [6] Breysee D. Probabilistic formulation of damage-evolution law of cementitious composites [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1990, 116(7): 1489.
- [7] Kandarpa S, Kirkner D J. Stochastic damage model for brittle materiel subjected to monotonic loading [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1996, 126(8): 788.
- [8] 李杰, 张其云. 混凝土随机损伤本构关系研究[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2001, 29(10): 1135.
LI Jie, ZHANG Qiyun. Stochastic damage constitutive law for concrete [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2001, 29(10): 1135.
- [9] 李杰, 卢朝辉, 张其云. 混凝土随机损伤本构关系——单轴受压分析[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2003, 31(5): 505.
LI Jie, LU Zhaohui, ZHANG Qiyun. Study on stochastic damage constitutive law for concrete material subjected to uniaxial compressive stress [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2003, 31(5): 505.
- [10] REN X D, LI J. Pragmatic analysis of material instability under strain control loading [J]. Engineering Failure Analysis, 2010, 18(2): 720.
- [11] 邹翔, 李杰. 基于细观物理机制的混凝土损伤数值仿真[J]. 建筑材料学报, 2009, 12(3): 259.
WU Xiang, LI Jie. Meso-mechanism based simulation of concrete damage process [J]. Journal of Building Materials. 2009, 12(3): 259.
- [12] Ren X, Li J. Hysteretic deteriorating model for quasi-brittle materials based on micromechanical damage approach [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2011, 46: 321.
- [13] Bazant Z P. Why continuum damage is nonlocal: micromechanics arguments [J]. Journal Engineering Mechanics, 1991, 117(5): 1070.
- [14] Laalal I, Sab K. A stochastic nonlocal damage model [J]. Journal of Fracture, 1996, 76: 121.
- [15] Bazant Z P, Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(11): 1119.
- [16] Eringen A C. On nonlocal plasticity [J]. International Journal of Engineering Science, 1981, 19(12): 1461.
- [17] Bazant Z, Lin F B. Non-local yield limit degradation [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1988, 26(8): 1805.
- [18] Pijaudier-Cabot G, Bazant Z P. Non-local damage theory [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1987, 113: 1512.
- [19] 刘智光, 陈健云, 白卫峰. 基于随机损伤模型的混凝土轴拉破坏过程研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(10): 2048.
LIU Zhiguang, CHEN Jianyun, BAI Weifeng. Research on concrete failure process under uniaxial tension based on stochastic damage model [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(10): 2048.
- [20] Bazant Z P, Oh B H. Crack band theory for fracture of concrete [J]. Materials and Structures, 1983, 16: 155.
- [21] 刘西拉, 温斌. 考虑广义边界条件的混凝土应变软化 [J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(5): 885.
LIU Xila, WEN Bin. Concrete strain softening considering global boundary conditions [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(5): 885.