文章编号：0253-374X(2014)11-1755-04 DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2014.11.021

约束线性系统关于非凸评价泛函的最优控制

朱经浩，朱礼冬

（同济大学 数学系，上海 200092）

摘要：研究一类约束线性系统关于非凸评价泛函的最优控制问题，该最优控制问题的评价泛函的被积函数中含有关于控制变量的非凸二次函数. 由 Pontryagin 极值原理建立球约束下非凸二次优化问题，并利用倒向微分流求解该问题，进而求解一组微分边值问题以得到原问题的最优控制. 同时把数学过程转化为求解的算法，并给出了一个数值计算的例子.

关键词：Pontryagin 极值原理；倒向微分流；非凸评价泛函

中图分类号：O232 **文献标志码**：A

Solution to a Non-convex Linear Quadratic Optimal Control Problem with Constraint

ZHU Jinghao, *ZHU Lidong*

(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: It is studied how to solve the optimal control problem for a constrained linear system with a non-convex cost functional. With Pontryagin's maximum principle, a non-convex quadratic programming is treated by a backward differential flow. Then the optimal control is obtained by solving a nonlinear differential boundary problem. An algorithm is given corresponding to the mathematical process. It follows by a numerical example.

Key words: Pontryagin principle; backward differential flow; non-convex cost functional

1 引言

考虑以下约束线性系统的非凸二次最优控制问题[1]：

$$(\mathrm{P}):\min J(\boldsymbol{x}(\cdot),\boldsymbol{u}(\cdot))=\int_0^T\Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t)+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}(t)\Big]\mathrm{d}t$$

$$\text{s. t. } \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,$$

$$\boldsymbol{u}(t)\in U=\{\boldsymbol{u}\,|\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant 1\}\subset\mathbf{R}^m,t\in[0,T].$$

其中，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times m}$，$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$. $\boldsymbol{Q}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为对称半正定矩阵，$\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{m\times m}$ 为对称矩阵且至少有一个负的特征值，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态变量，$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 为控制变量.

经典线性二次型(LQ)最优控制问题对于控制变量没有紧约束[1]，并要求 $\boldsymbol{R}$ 具有正定性，此时可求得最优反馈控制. 在文献[2]中，利用倒向微分流方法，通过伴随变量直接给出一类有约束的 LQ 奇异问题最优控制的解析表达式. 本文考虑 $\boldsymbol{R}$ 为非正定也非半正定矩阵，研究此情形下最优控制的解析表达式. 然而，此时即便对控制变量施加紧约束，最优控制也可能不存在. 作以下假设.

假设 1 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b})>\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.

注 1 从数学角度看，当向量 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，存在大量实际问题满足该假设. 如果问题(P)不满足假设 1，则该问题可能没有最优控制. 文献[1]中有如下例子：

$$\min J(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^1[x^2(t)-u^2(t)]\mathrm{d}t$$

$$\text{s. t. } \dot{x}(t)=u(t),\quad x(0)=0,$$

$$-1\leqslant u(t)\leqslant 1,\quad t\in[0,1].$$

易知，$\min J(x(\cdot),u(\cdot))=-1$. 事实上，要取到下确界 -1 是不可能的. 如果取到该下确界，则几乎处处有 $|u(t)|=1$，$x(t)=0$，但是由状态方程又可推得 $u(t)=0$，故产生矛盾，因而不存在最优控制. 易见上述所列文献[1]中的最优控制问题显然不满足上述假设 1.

本文将结合 Pontryagin 极值原理[3]与倒向微分流[4-5]方法获得全局最优性条件，并给出最优控制关于伴随变量的解析表达式，最后通过求解常微分方

收稿日期：2013-06-24
基金项目：国家自然科学基金(10671145)
第一作者：朱经浩(1949—)，男，理学博士，教授，博士生导师，主要研究方向为数学规划、最优控制. E-mail：jinghaok@online.sh.cn
通讯作者：朱礼冬(1989—)，男，硕士生，主要研究方向为数学规划、最优控制. E-mail：zhulidong_1206@163.com

程边值问题获得原问题的最优控制.

2 Pontryagin 极值原理和全局最优化

关于问题(P)的 Hamilton 函数为

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u})+\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right) \tag{1}$$

Pontryagin 极值原理[3] 指出:最优控制必为极值控制.最优控制 $\hat{\boldsymbol{u}}(\cdot)$和相应的状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot)$及伴随轨道 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot)$必须满足:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=H_{\lambda}(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{\lambda}})=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{u}},\ \hat{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{x}_0, \tag{2}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}=-H_x(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{u}},\hat{\boldsymbol{\lambda}})=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\lambda}}-\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t)=0, \tag{3}$$

$$H(\hat{\boldsymbol{x}}(t),\hat{\boldsymbol{u}}(t),\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t))=\min_{u\in U}H(\hat{\boldsymbol{x}}(t),\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t)),\quad \text{a. e. } t\in[0,T], \tag{4}$$

从式(1)可知,由于 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 是分离的,故对优化问题(4),可归结为:对给定的参数 λ,求解以下球约束下的非凸二次优化问题:

$$(\mathrm{P}_1):\min_{\|u\|\leqslant 1}P(\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}.$$

设 $\boldsymbol{R}$ 的特征值为 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_m$,因其至少有一个负的特征值,则 $a_1<0$.对给定的 $\boldsymbol{\lambda}$,令 $\boldsymbol{f}_{\lambda}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$.由假设1可知 $\boldsymbol{f}_{\lambda}\neq\boldsymbol{0}$.当 $\rho>-a_1$ 时,$\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}>0$.可选择实数 $\rho^*>-a_1$,使得 $0<\|(\boldsymbol{R}+\rho^*\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{f}_{\lambda}\|<1$.由倒向微分流理论[4-5]可知,当 $\rho>-a_1$ 时,由微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}}{\mathrm{d}\rho}+(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}=0,\hat{\boldsymbol{u}}(\rho^*)=(\boldsymbol{R}+\rho^*\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{f}_{\lambda}.$$

可定义关于问题(P_1)的微分流:

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{f}_{\lambda},\ \rho>-a_1. \tag{5}$$

引理1 令 $L(\rho,\boldsymbol{u})=P(\boldsymbol{u})+\frac{\rho}{2}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-1)$,对于 $\rho>-a_1$,$\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$为 $L(\rho,\boldsymbol{u})$在 $\mathbf{R}^m$ 上的全局极小点.

证明 $\nabla_uL(\rho,\hat{\boldsymbol{u}})=\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{f}_{\lambda}+\rho\hat{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}$,$\nabla_u^2L(\rho,\hat{\boldsymbol{u}})=\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}>\boldsymbol{0}$.证毕

引理2 $\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$在 $\rho\in(-a_1,+\infty)$单调递减.

证明 当 $\rho>-a_1$ 时,$\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I}>0$,$\frac{\mathrm{d}\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|^2}{\mathrm{d}\rho}=-2\boldsymbol{f}_{\lambda}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-3}\boldsymbol{f}_{\lambda}<0$,所以,$\|\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\|$在 $\rho\in(-a_1,+\infty)$单调递减.证毕

由引理1、2和微分流的表达式(5)可得到以下结果:

定理1[6] 若 $\boldsymbol{f}_{\lambda}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\neq\boldsymbol{0}$,且 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I})<\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I},\boldsymbol{f}_{\lambda})$,则存在唯一的 $\rho_{\lambda}>-a_1$,满足 $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})=1$,使得问题($\mathrm{P}_1$)的一个最优解为:

$$\boldsymbol{u}_{\lambda}=(\boldsymbol{R}+\rho_{\lambda}\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}).$$

注2 若 $\boldsymbol{f}_{\lambda}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\neq\boldsymbol{0}$,而有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I},\boldsymbol{f}_{\lambda})$,则可由以下过程得到优化问题($\mathrm{P}_1$)的最优解.考虑以下半正定优化问题:

$$(\mathrm{P}^*):\min_{\|u\|\leqslant 1}\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}-\boldsymbol{f}_{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\right\}.$$

如果 $\boldsymbol{u}^*$ 是(P^*)的最优点,且$\|\boldsymbol{u}^*\|=1$,易证 $\boldsymbol{u}^*$ 也是优化问题(P_1)的最优点.可选择正交矩阵 $\boldsymbol{G}$,使得 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{G}=\mathrm{diag}(\mu_1-a_1,\mu_2-a_1,\cdots,\mu_k-a_1,0,\cdots,0)\in\mathbf{R}^{m\times m}$,其中 $\mu_i,i=1,2,\cdots,k$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的特征值,且满足 $\mu_i>a_1$,在 $\boldsymbol{f}_{\lambda}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\neq\boldsymbol{0}$,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I},\boldsymbol{f}_{\lambda})$情形下显然有 $1\leqslant k<m$.记 $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\lambda}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_{\lambda}$,由于 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I},\boldsymbol{f}_{\lambda})$,可推出当 $i=k+1,\cdots,m$ 时,$(\tilde{\boldsymbol{f}}_{\lambda})_i=0$.由变换 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$,半正定优化问题($\mathrm{P}^*$)可等价转变为以下球约束下的半正定优化问题:

$$(\hat{\mathrm{P}}):\min_{\sum_{i=1}^{m}v_i^2\leqslant 1}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\mu_i-a_1)^2v_i^2-\sum_{i=1}^{k}(\tilde{f}_{\lambda})_iv_i\right\}.$$

其中,v_i、$(\tilde{\boldsymbol{f}}_{\lambda})_i$ 分别表示向量 $\boldsymbol{v}$、$\tilde{\boldsymbol{f}}_{\lambda}$ 中的第 i 个分量,$1\leqslant i\leqslant m$.进而考虑以下低维的球约束下的正定优化问题:

$$(\tilde{\mathrm{P}}):\min_{\sum_{i=1}^{k}v_i^2\leqslant 1}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(\mu_i-a_1)^2v_i^2-\sum_{i=1}^{k}(\tilde{f}_{\lambda})_iv_i\right\}.$$

记其唯一最优点为 $(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_k^*)^{\mathrm{T}}$,满足 $\sum_{j=1}^{k}(v_j^*)^2\leqslant 1$.显然,对于满足 $\sum_{j=1}^{k}(v_j^*)^2+\sum_{j=k+1}^{m}v_j^2\leqslant 1$ 的 $(v_{k+1},\cdots,v_m)^{\mathrm{T}}$,$(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_k^*,v_{k+1},\cdots,v_m)^{\mathrm{T}}$ 也是$(\hat{\mathrm{P}})$的最优点(注意到变量 $v_{k+1},\cdots,v_m$ 在$(\hat{\mathrm{P}})$的目标函数中不出现).令 $v_{k+1}^*=\cdots=v_{m-1}^*=0$,$v_m^*=1-\sum_{j=1}^{k}(v_j^*)^2$.再令 $\boldsymbol{v}^*=(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_k^*,v_{k+1}^*,\cdots v_m^*)^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{v}^*$ 是$(\hat{\mathrm{P}})$的一个最优点,从而 $\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}^*$ 是(P^*)的最优解,由于$(\boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}^*=1$,则 $\boldsymbol{u}^*$ 也是优化问题(P_1)的最优解,且易见 $\boldsymbol{u}^*$ 有界可测依赖于 $\boldsymbol{\lambda}$.

3 最优控制的解析表达式

首先对于原问题(P)定义如下关于伴随变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda})$.

定义1 对于给定 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^n$,若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I})<$

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})$，则定义：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{u}_\lambda=(\boldsymbol{R}+\rho_\lambda\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}),\qquad(6)$$

其中，ρ_λ 为当 $\rho>-a_1$ 时方程 $\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(\rho)\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{R}+\rho\boldsymbol{I})^{-2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})=1$ 的唯一正根. 而若 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}-a_1\boldsymbol{I},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})$，则定义：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{G}\boldsymbol{v}^*,$$

这里，$\boldsymbol{G}$ 为注 2 中所给出的正交矩阵，$\boldsymbol{v}^*=(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_k^*,v_{k+1}^*,\cdots,v_m^*)^{\mathrm{T}}$，可表示如下：令 $(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_k^*)^{\mathrm{T}}$ 为球约束下的正定优化问题 $(\widetilde{\boldsymbol{P}})$ 的最优解，记

$$\hat{\boldsymbol{R}}=\mathrm{diag}(\mu_1-a_1,\mu_2-a_1,\cdots,\mu_k-a_1),$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_\lambda=((\widetilde{\boldsymbol{f}}_\lambda)_1,(\widetilde{\boldsymbol{f}}_\lambda)_2,\cdots,(\widetilde{\boldsymbol{f}}_\lambda)_k)^{\mathrm{T}},$$

通过倒向微分流[4-5]可得到

$$(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_k^*)^{\mathrm{T}}=\begin{cases}\hat{\boldsymbol{R}}^{-1}\hat{\boldsymbol{f}}_\lambda, & \hat{\boldsymbol{f}}_\lambda^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{R}}^{-2}\hat{\boldsymbol{f}}_\lambda\leqslant 1,\\(\hat{\boldsymbol{R}}+\rho_\lambda\boldsymbol{I})^{-1}\hat{\boldsymbol{f}}_\lambda, & \hat{\boldsymbol{f}}_\lambda^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{R}}^{-2}\hat{\boldsymbol{f}}_\lambda>1.\end{cases}\qquad(7)$$

其中，ρ_λ 为当 $\rho>0$ 时方程 $\hat{\boldsymbol{f}}_\lambda^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{R}}+\rho\boldsymbol{I})^{-2}\hat{\boldsymbol{f}}_\lambda=1$ 的唯一正根. 而 $v_{k+1}^*=\cdots=v_{m-1}^*=0$，$v_m^*=1-\sum\limits_{j=1}^{k}(v_j^*)^2$.

然后讨论以下常微分方程边值问题的可解性，

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda}),\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x},$$
$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}(t)=\boldsymbol{0}.\qquad(8)$$

其中 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda})$ 由定义 1 所给出. 记

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\\boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix},\boldsymbol{Y}_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_0\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{W} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{I},\boldsymbol{0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}((\boldsymbol{0},\boldsymbol{I})\boldsymbol{Y}).$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 为相应阶数的单位矩阵，$\boldsymbol{0}$ 为相应阶数的零矩阵或向量，则边值问题(8)可改写为

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}),\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{Y}(0)+\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{Y}_0.\quad(9)$$

定理 2　常微分方程边值问题(9)有解.

证明　矩阵函数 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{A}}t}$ 满足 $\det[\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\Phi}(0)+\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})]=\det\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ * & \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}}\end{pmatrix}$，其中，“$*$”表示相应维数元素所组成的矩阵. 相应的齐次问题 $\dot{\boldsymbol{Y}}=\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{Y}$ 的解为 $\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)[\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\Phi}(0)+\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})]^{-1}\boldsymbol{Y}_0$. 其 Green 函数[7]为：

$$\boldsymbol{G}(t,s)=\begin{cases}-\boldsymbol{\Phi}(t)[\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\Phi}(0)+\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Phi}(t)]^{-1}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\Phi}(t)\\\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s),\quad 0\leqslant t<s<T,\\\boldsymbol{\Phi}(t)\{\boldsymbol{I}-[\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\Phi}(0)+\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Phi}(t)]^{-1}\boldsymbol{H}_1\\\boldsymbol{\Phi}(t)\}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(s),\quad 0<s<t\leqslant T.\end{cases}$$

则边值问题(9)等价于积分方程

$$\boldsymbol{Y}(t)=\int_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(t,s)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}(s))\mathrm{d}s.\qquad(10)$$

由 $\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y})\|\leqslant C_1\|\boldsymbol{u}(\lambda)\|\leqslant C_1$ 与

$$\|\boldsymbol{G}(t,s)\|\leqslant C_2\|\boldsymbol{\Phi}\|\|\boldsymbol{\Phi}^{-1}\|(2n+\|[\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{\Phi}(0)+\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{T})]^{-1}\|):=C_3,$$

可得

$$\|\boldsymbol{Y}(t)\|\leqslant\int_0^{\mathrm{T}}\|\boldsymbol{G}(t,s)\|\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}(s))\|\mathrm{d}s\leqslant TC_1C_3:=M.$$

令 $X=C([0,T],\mathbf{R}^{2n})$. 定义全连续映射 $W:X\to X$，对于 $\boldsymbol{Y}\in X$，有 $(W\boldsymbol{Y})(t)=\int_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(t,s)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}(s))\mathrm{d}s$. 令 $\Omega=\{\boldsymbol{Y}\in X:\|\boldsymbol{Y}\|\leqslant M\}$. 因为

$$\|W\boldsymbol{Y}\|=\max_{t\in[0,T]}\|(W\boldsymbol{Y})(t)\|\leqslant$$
$$\max_{t\in[0,T]}\int_0^{\mathrm{T}}\|\boldsymbol{G}(t,s)\|\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y}(s))\|\mathrm{d}s\leqslant M,$$

所以 $W\Omega\in\Omega$. 由 Schauder 不动点定理[7]可知，存在 $\hat{\boldsymbol{Y}}\in\Omega$，使得 $W\hat{\boldsymbol{Y}}=\hat{\boldsymbol{Y}}$，即 $\hat{\boldsymbol{Y}}(t)=\int_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(t,s)\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{Y}}(s))\mathrm{d}s$，故 $\hat{\boldsymbol{Y}}(t)$ 是积分方程(10)的解，从而也是边值问题(9)的解. 证毕

定理 3　若 $\hat{\boldsymbol{Y}}(\cdot)=(\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot),\hat{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot))^{\mathrm{T}}$ 是常微分方程边值问题(9)的解，则控制函数 $\hat{\boldsymbol{u}}(t):=\boldsymbol{u}((0,\boldsymbol{I})\hat{\boldsymbol{Y}}(t))=\boldsymbol{u}(\hat{\lambda})$ 是原问题(P)的最优控制.

证明：因 $\hat{\boldsymbol{Y}}(\cdot)=(\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot),\hat{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot))^{\mathrm{T}}$ 满足常微分方程边值问题(9)，可见 $\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot)$，$\hat{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot)$，$\hat{\boldsymbol{u}}(t)(=\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t)))$ 满足式(2)，(3)，由定义 1 可知

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t))=\arg\{\min_{u\in U}H(\hat{\boldsymbol{x}}(t),\boldsymbol{u},\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t))\},$$

于是 $\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot)$，$\hat{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot)$，$\hat{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ 也满足优化条件(4). 从而，$\hat{\boldsymbol{u}}(t)$ 是一个极值控制. 由 $\boldsymbol{Q}\geqslant 0$，可知 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(\lambda),\lambda)$ 是关于 $\boldsymbol{x}$ 的凸函数. 应用经典最优控制方法[4]可知，极值控制 $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$ 就是问题(P)的一个最优控制. 证毕.

4　算法和算例

算法 1

步骤 1：根据定义 1 中所给出的表达式，计算 $\boldsymbol{u}(\lambda)$.

步骤 2：求解边值问题(8)，得到问题(P)的一个解 $(\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot),\hat{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot))$.

步骤 3：问题(P)的一个最优控制为 $\hat{\boldsymbol{u}}(\cdot)=\boldsymbol{u}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t))$.

例1 考虑问题：

$$J_{\min}(x(\cdot),u(\cdot))=\int_0^T\Big[x_1^2(t)+x_2^2(t)-0.5u_1^2(t)-0.5u_2^2(t)+u_2(t)\Big]\mathrm{d}t$$

$$\text{s.t. } \dot{x}_1(t)=u_1(t),\dot{x}_2(t)=2u_1(t),x_1(0)=2,$$
$$x_2(0)=0,u_1^2(t)+u_2^2(t)\leqslant 1,t\in[0,1].$$

经整理，该问题的 Hamilton 函数为 $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})=(\lambda_1+2\lambda_2)u_1+x_1^2+x_2^2-0.5u_1^2-0.5u_2^2+u_2$. 易见该问题满足假设1：$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b})=2>\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=1$. 注意到 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=(-\lambda_1-2\lambda_2,-1)^{\mathrm{T}}$，得到 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{I})=0<\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{I},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})$. 通过式(6)计算 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\lambda})$.

步骤1：计算 $\boldsymbol{u}(\lambda_1,\lambda_2)$. $u_1(\lambda_1,\lambda_2)=-\dfrac{(\lambda_1+2\lambda_2)}{\rho(\lambda_1,\lambda_2)-1}$，$u_2(\lambda_1,\lambda_2)=\dfrac{1}{\rho(\lambda_1,\lambda_2)-1}$. 其中，$\rho(\lambda_1,\lambda_2)=\arg\left\{\dfrac{(\lambda_1+2\lambda_2)^2}{(\rho(\lambda_1,\lambda_2)-1)^2}+\dfrac{1}{(\rho(\lambda_1,\lambda_2)-1)^2}=1,\rho(\lambda_1,\lambda_2)>1\right\}$. 经计算得，$\rho(\lambda_1,\lambda_2)=1+\sqrt{1+(\lambda_1+2\lambda_2)^2}$.

步骤2：将 $\rho(\lambda_1,\lambda_2)$ 代入 $u_1(\lambda_1,\lambda_2)$，$u_2(\lambda_1,\lambda_2)$，得到以下边值问题：

$$\dot{x}_2=2\dot{x}_1=2u_1(\lambda)=\frac{-2(\lambda_1+2\lambda_2)}{\sqrt{1+(\lambda_1+2\lambda_2)^2}},$$
$$\dot{\lambda}_1=-2x_1,\dot{\lambda}_2=-2x_2,$$
$$x_1(0)=2,x_2(0)=0,\lambda_1(1)=0,\lambda_2(1)=0.$$

求解该边值问题得到一个解对：$(\hat{x}_1(\cdot),\hat{x}_2(\cdot))^{\mathrm{T}}$，$(\hat{\lambda}_1(\cdot),\hat{\lambda}_2(\cdot))^{\mathrm{T}}$.

步骤3：计算 $\hat{\boldsymbol{u}}(\cdot)=(u_1(\hat{\lambda}_1(\cdot),\hat{\lambda}_2(\cdot)),u_2(\hat{\lambda}_1(\cdot),\hat{\lambda}_2(\cdot)))^{\mathrm{T}}$.

经数值计算，得到目标函数值 $J_{\min}=67.5242$，各个变量的数值结果见表1.

表1 例1数值结果

Tab.1 The numerical results of Example 1

t	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{u}_1$	$\hat{u}_2$
0	2.000 0	0	3.497 0	−1.006 0	−0.829 4	−1.658 9
0.10	1.920 9	−0.158 1	3.105 0	−0.989 9	−0.747 4	−1.494 9
0.20	1.851 2	−0.297 5	2.728 0	−0.944 1	−0.643 1	−1.286 2
0.30	1.792 7	−0.414 5	2.263 8	−0.872 5	−0.526 2	−1.052 5
0.40	1.745 9	−0.508 1	2.010 1	−0.779 8	−0.410 7	−0.821 4
0.50	1.710 2	−0.579 7	1.664 7	−0.670 7	−0.307 6	−0.615 2
0.60	1.683 9	−0.632 3	1.325 4	−0.549 1	−0.221 4	−0.442 7
0.70	1.665 3	−0.699 3	0.990 6	−0.418 8	−0.151 2	−0.302 4
0.80	1.653 2	−0.693 6	0.658 8	−0.282 3	−0.093 8	−0.187 2
0.90	1.646 3	−0.707 4	0.329 0	−0.142 1	−0.044 8	−0.089 6
1.00	1.644 1	−0.711 8	0	0	0	0

参考文献：

[1] 雍炯敏，楼红卫. 最优控制理论简明教程[M]. 北京：高等教育出版社，2006.
YONG Jiongmin, LOU Hongwei. An introduction to optimal control theory[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006.

[2] 赵尚睿，朱经浩. 关于一类球约束下的LQ奇异最优控制问题[J]. 同济大学学报：自然科学版，2013，41(6)：932.
ZHAO Shangrui, ZHU Jinghao. Solution to constrained LQ singular optimal control [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2013, 41(6): 932.

[3] Pontryagin L S. The mathematical theory of optimal processes [M]. Oxford: Pergamon Press, 1964.

[4] 朱经浩. 最优控制中的数学方法[M]. 北京：科学出版社，2011.
ZHU Jinghao. The mathematical methods in optimal control theory[M]. Beijing: Science Press, 2011.

[5] ZHU Jinghao, WU Dan, GAO David. Applying the canonical dual theory in optimal control problems [J]. Journal of Global Optimization, 2012, 54(2): 221.

[6] 朱经浩，陈硕晶. Gurman摄动变换在非凸全局优化中的应用[J]. 同济大学学报：自然科学版，2013，41(5)：788.
ZHU Jinghao, CHEN Shuojing. Non-convex global optimization with gurman perturbation [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2013, 41(5): 788.

[7] 葛渭高，李翠哲，王宏洲. 常微分方程与边值问题[M]. 北京：科学出版社，2008.
GE Weigao, LI Cuizhe, WANG Hongzhou. Ordinary differential equations and boundary value problems [M]. Beijing: Science Press, 2008.