文章编号：0253-374X(2014)05-0798-06 DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2014.05.022

无罚函数无滤子的非单调无二次规划方法

刘爱兰[1,2]，濮定国[1]
(1. 同济大学 数学系，上海 200092；2. 上海电力学院 数理学院，上海 200090)

摘要：提出了求解光滑不等式约束最优化问题的非单调无罚函数无滤子的无二次规划非可行域方法. 通过乘子和非线性互补函数，构造一个等价于原约束问题 1 阶最优条件的非光滑方程组. 在此基础上，通过牛顿-拟牛顿迭代得到满足 1 阶最优条件的解，在迭代中采用了无罚函数无滤子的非单调线搜索方法以避免罚函数的选取和滤子的存储，使得目标函数或者约束违反度函数具有充分的非单调下降，试探步更易于接受. 算法不要求迭代点和初始点严格可行. 该算法是可实现的，具有全局收敛性. 另外，在较弱条件下可以证明该方法具有超线性收敛性.

关键词：非线性优化；非单调；滤子；非线性互补函数；无二次规划；非可行域方法

中图分类号：O221.2 **文献标志码**：A

Nonmonoton QP-free Method Without Penalty Function and Filter

LIU Ailan[1,2], *PU Dingguo*[1]
(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. School of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China)

Abstract: We propose a nonmonotone guadratic programming-free(QP-free) infeasible method without using a penalty function and a filter for inequality constrained nonlinear optimization problems. This iterative method is based on the solution of nonsmooth equations obtained by the multipliers and the nonlinear complementarity problem(NCP) function for the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) first-order optimality conditions. Locally, each iteration of this method can be viewed as a perturbation of the mixed Newton-quasi Newton iteration on both primal and dual variables for the solution of KKT optimality conditions. We do not use a penalty function and a filter on nonmonotone line searches to avoid the estimation of the penalty parameter and the storage of the filter. The step-size is selected so that either the value of the objective function or the measure of the constraint violations is sufficiently nonmonotone reduced. The trial step is more flexibly accepted. It does not demand the strict feasibility of the iterations including the initial point. This method is implementable and globally convergent. Without the second order correction we prove that the method has superlinear convergence rate.

Key words: nonlinear optimization; nonmonotone; filter; nonlinear complementarity problem(NCP) function; quadratic programming-free(QP-free); infeasible method

考虑如下的约束非线性优化问题(NLP)：

$$\min f(\boldsymbol{x}),$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{x} \in D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \leqslant 0\} \qquad (1)$$

其中 $f(\boldsymbol{x}):\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 和 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}), \cdots, \boldsymbol{g}_m(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 是二次连续可微函数.

NLP 问题的 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 点 $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ 是满足 NLP 问题的如下 1 阶最优必要条件的点：

$$\nabla_x \boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{0},$$
$$\boldsymbol{G}(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant 0, \bar{\boldsymbol{\mu}} \geqslant 0, g_i(\bar{\boldsymbol{x}})\mu_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant m \quad (2)$$

其中 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ 是约束问题 NLP 的拉格朗日函数，$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)^{\mathrm{T}}$ 是乘子向量，为方便起见，用 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$ 表示列向量 $(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. $\nabla_x \boldsymbol{L}(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ 表示 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$ 对变量 $\boldsymbol{x}$ 的梯度. 求解 NLP 问题的 KKT 点等价于求解式(2)中的混合互补问题(NCP). 文献[1]提出了求解光滑不等式约束和光滑目标函数的无二次规划(QP-free)非可行域方法，并证明方法在较弱的条件下具有超线性收敛性. 其他的 QP-free 方法参见文献[2-4]，这些方法中采用的罚函数，由于很难选取到适当的罚因子而降低了算法的有效性. 为了避免罚因子的选取，Fletcher

收稿日期：2013-07-05
基金项目：国家自然科学基金(11371281，10771162)
第一作者：刘爱兰(1977—)，女，讲师，博士生，主要研究方向为数学规划. E-mail：liulilan@shiep.edu.cn
通讯作者：濮定国(1948—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为数学规划. E-mail：madpu@tongji.edu.cn

等[5]提出了滤子方法，这种方法是通过比较约束违反度函数值和目标函数值来决定试探步是否被接受. 2009 年 Gould 等[6]提出了一种新的求非线性约束优化问题的无罚函数无滤子的方法. 2011 年刘新为等[7]将这种方法应用到非线性等式约束优化问题中的序列二次规划(SQP)方法和信赖域 SQP 方法，算法在一定条件下收敛到 KKT 点，且具有局部超线性收敛性. 2013 年，濮定国等[8]提出了无罚函数无滤子的 QP-free 非可行域方法，算法在较弱的条件下证明具有超线性收敛性.

受以上方法的启发，另外考虑到当迭代点靠近一个狭长的峡谷区域时，可能导致步长过短或者锯齿现象，降低收敛速度，为克服以上缺点，考虑应用非单调线搜索技术[9-10].

本文提出一种新的无罚函数无滤子的非单调 QP-free 非可行域方法. 根据优化问题的 1 阶 KKT 条件，利用乘子和 NCP 函数，得到非光滑方程组，每一步求解包含原始和对偶变量的 KKT 条件等价的方程组，在线搜索过程中不使用罚函数和滤子，采用非单调技术，使每一步迭代中目标函数或者约束函数具有非单调的下降，迭代点更易于接受. 算法可行，具有全局收敛性，不需要 2 阶校正，算法具有超线性收敛性.

1　预备知识

如果函数 $\Psi(a,b)=0$ 当且仅当 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, ab=0$，则称函数 $\Psi: \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 是一个 NCP 函数. 有关 NCP 函数参见文献[11-12]. 其中 Fischer-Burmeister(F-B)函数有如下简单的结构：

$$\Psi(a,b)=\sqrt{a^2+b^2}-a-b \tag{3}$$

令 $\phi_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\Psi(-g_i(\boldsymbol{x}),\mu_i)$，$1\leqslant i\leqslant m$，则通过 NCP 函数和乘子函数就可以把 NLP 问题的 1 阶最优化 KKT 条件转化为如下非光滑等式：

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=((\nabla_x \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}))^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}))^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{0} \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=(\phi_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\cdots,\phi_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}))^{\mathrm{T}},$$
$$\phi_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=\Psi(-g_i(\boldsymbol{x}),u_i) \tag{5}$$

从 F-B 函数的性质可得，如果$(g_i(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\mu})\neq(0,0)$，则 ϕ_i 在$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\in\mathbf{R}^{n+m}$连续可微，如果$(g_i(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\mu})=(0,0)$，则 ϕ_i 半光滑且在$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\in\mathbf{R}^{n+m}$方向可微.

2　算法

假定$(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)$是第 k 步迭代得到的点. 如果$(g_i(\boldsymbol{x}^k),\mu_i^k)\neq(0,0)$，令

$$\xi_j^k=\xi_j^k(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)=\frac{-g_j(\boldsymbol{x})}{\sqrt{(g_j(\boldsymbol{x}))^2+\mu_j^2}}+1,$$
$$\eta_j^k=\eta_j^k(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)=\frac{\mu_j}{\sqrt{(g_j(\boldsymbol{x}))^2+\mu_j^2}}-1 \tag{6}$$

否则，令

$$\xi_j^k=\xi_j^k(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)=1+\sqrt{2}/2,$$
$$\eta_j^k=\eta_j^k(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)=-1+\sqrt{2}/2 \tag{7}$$

令 $\boldsymbol{V}^k$ 为如下的矩阵：

$$\boldsymbol{V}^k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_{11}^k & \boldsymbol{V}_{12}^k\\ \boldsymbol{V}_{21}^k & \boldsymbol{V}_{22}^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}^k & \nabla\boldsymbol{G}^k\\ \mathrm{diag}(\boldsymbol{\xi}^k)(\nabla\boldsymbol{G}^k)^{\mathrm{T}} & \mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta}^k-\boldsymbol{c}^k)\end{bmatrix} \tag{8}$$

其中：$\boldsymbol{H}$ 是正定矩阵为 $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$的 2 阶海塞阵或者海塞阵的近似；$\mathrm{diag}(\boldsymbol{\xi}^k)$，$\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta}^k-\boldsymbol{c}^k)$分别表示第 j 个对角元素为 ξ_j^k 和 $\eta_j^k-c_j^k$ 的对角矩阵；$c_j^k=c\min\{1,\|\boldsymbol{\Phi}^k\|^{\nu}\}$，$c>0$，$\nu>1$ 为给定常数，记 $\boldsymbol{\Phi}^k=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)$；$\nabla\boldsymbol{G}^k$ 表示 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$在点 $\boldsymbol{x}^k$ 处的梯度. 文中的约束违反度函数取为 $P(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\mu})=\|\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})\|^2$，而不采用文献[5]的约束违反度函数 $P(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}))$.

算法 1

步骤 0　初始化.

给出初始点 $\boldsymbol{x}^0\in\mathbf{R}^n$，$\bar{\mu}\geqslant\boldsymbol{\mu}_0>0$，$1>\theta_1>\theta>\theta_2>0$，$1>\theta_3>0$，$c>0$，$\nu>1$，$\tau\in(0,1)$，初始的正定阵 $\boldsymbol{H}^0$，令 $p_{\max}^0=0$.

步骤 1　计算搜索方向.

为简便起见，记$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\lambda})=(\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. 解如下关于$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\lambda})$的线性方程组得到 $\boldsymbol{d}^{k0}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{k0}$：

$$\boldsymbol{V}^k\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\nabla\boldsymbol{f}^k\\ \mathbf{0}\end{pmatrix} \tag{9}$$

其中 $\nabla\boldsymbol{f}^k=\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^k)$. 如果 $\eta_j^k\neq 0$，则令 $\lambda_j^{k0}=(\eta_j^k-c_j^k)\bar{\lambda}_j^{k0}/\eta_j^k$，否则 $\lambda_j^{k0}=\bar{\lambda}_j^{k0}$.

解如下关于$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{\lambda})$的线性方程组得到 $\boldsymbol{d}^{k1}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{k1}$：

$$\boldsymbol{V}^k\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\nabla_x\boldsymbol{L}^k\\ -\boldsymbol{\Phi}_1^k\end{pmatrix} \tag{10}$$

其中 $\nabla_x\boldsymbol{L}^k=\nabla_x\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)$，$\boldsymbol{\Phi}_1^k=\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)$. 如果 $\eta_j^k\neq 0$，则令 $\lambda_j^{k1}=(\eta_j^k-c_j^k)\bar{\lambda}_j^{k1}/\eta_j^k$，否则 $\lambda_j^{k1}=\bar{\lambda}_j^{k1}$.

步骤 2　无罚函数无滤子的非单调线搜索.

步骤 2.1　如果

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{d}^{k1},\ \boldsymbol{\mu}^k+\boldsymbol{\lambda}^{k1})\|\leqslant\theta_1\|\boldsymbol{\Phi}^k\| \tag{11}$$

且式(13)或(15)至少一个成立，则令 $\boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{d}^{k1}$，$\boldsymbol{\lambda}^{k+1}=\boldsymbol{\mu}^k+\boldsymbol{\lambda}^{k1}$，转步骤 3.

步骤 2.2　如果 $\boldsymbol{\Phi}_1^k=0$，那么令 $\boldsymbol{d}^k=\boldsymbol{d}^{k0}$，$\boldsymbol{\lambda}^k=$

$\boldsymbol{\lambda}^{k0}$;如果 $\boldsymbol{\Phi}_1^k\neq 0$, $\boldsymbol{d}^{k0}=0$,那么令 $b^k=0,\rho^k=1$;否则如果 $\boldsymbol{\Phi}_1^k=0$, $\boldsymbol{d}^{k0}=0$,则定义

$$\rho_1^k=\begin{cases}1, \text{若} (\boldsymbol{d}^{k1})^{\mathrm{T}}\nabla \boldsymbol{f}^k\leqslant\theta(\boldsymbol{d}^{k0})^{\mathrm{T}}\nabla \boldsymbol{f}^k\\ (1-\theta)\dfrac{(\boldsymbol{d}^{k0})^{\mathrm{T}}\nabla \boldsymbol{f}^k}{(\boldsymbol{d}^{k0}-\boldsymbol{d}^{k1})^{\mathrm{T}}\nabla \boldsymbol{f}^k}, \text{其他}\end{cases}\tag{12}$$

如果 $-\theta_2(\boldsymbol{d}^{k0})^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^k\geqslant p_{\max}^k$, $\|\boldsymbol{d}^{k1}\|\leqslant 3\|\boldsymbol{d}^{k0}\|$, $\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|\leqslant\theta_3 p_{\max}^k$,则 $\rho^k=\rho_1^k$,否则 $\rho^k=\theta_2$. 令 $b^k=1-\rho^k$,构造搜索方向为 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}^k\\ \boldsymbol{\lambda}^k\end{pmatrix}=b^k\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}^{k0}\\ \boldsymbol{\lambda}^{k0}\end{pmatrix}+\rho^k\begin{pmatrix}\boldsymbol{d}^{k1}\\ \boldsymbol{\lambda}^{k1}\end{pmatrix}$.

非单调的线搜索:设 M 是一个非负整数,对每个 k,令 $m(k)$满足

$$m(0)=0,0\leqslant m(k)\leqslant\min\{m(k-1)+1,M\},\quad k\geqslant 1$$

令 $\boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{x}^k+\alpha_k\boldsymbol{d}^k,\boldsymbol{\lambda}^{k+1}=\boldsymbol{\mu}^k+\alpha_k\boldsymbol{\lambda}^k$,其中 $\alpha_k=\tau^j$,j 为满足下式的最小非负整数:

$$\|\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{\lambda}^{k+1})\|\leqslant\theta_1\max_{0\leqslant r\leqslant m(k)-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k-r}\|\tag{13}$$

或者满足以下两式:

$$f(\boldsymbol{x}^{k+1})-\max\left\{f(\boldsymbol{x}^k),\sum_{r=0}^{m(k)-1}f(\boldsymbol{x}^{k-r})\right\}\leqslant-\alpha_k\theta_2\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|\tag{14}$$

$$\|\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}^{k+1},\boldsymbol{\lambda}^{k+1})\|\leqslant\max\{(r_k+1)/2,\theta_3\}p_{\max}^k\tag{15}$$

如果 $\boldsymbol{x}^{k+1}$为 KKT 点,终止.

步骤 3 更新.

更新矩阵 $\boldsymbol{H}^k$. 如果 $\lambda_i^{k+1}\leqslant\bar{\mu}$,令 $\lambda_i^{k+1}=\lambda_i^{k+1}$;否则,令 $\lambda_i^{k+1}=\theta_3\bar{\mu}$;如果式(13)在 $\boldsymbol{x}^{k+1}$处成立,但在 $\boldsymbol{x}^k$处不成立,令 $p_{\max}^{k+1}=\max\limits_{0\leqslant r\leqslant m(k)-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k-r}\|$,否则 $p_{\max}^{k+1}=p_{\max}^k$. 如果式(13)成立,令

$$r_{k+1}=\max_{0\leqslant r\leqslant m(k+1)-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k+1-r}\|\Big/\max_{0\leqslant r\leqslant m(k)-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k-r}\|$$

否则,$r_{k+1}=r_k$. 令 $k=k+1$,转步骤 1.

3 算法的可执行性

假设如下的 A1~A3 成立.

A1 水平集 $S=\{\boldsymbol{x}\mid f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{x}^0)+p\}$有界,其中 $p=\max p_{\max}^k$,且对充分大的 k,$\|\boldsymbol{\mu}^k+\boldsymbol{\lambda}^k\|<\bar{\mu}$.

A2 f 和 g_i 是 Lipschitz 连续可微的,且对所有的 $\boldsymbol{x}\in S,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^{n+m}$,存在 Lipschitz 常数 m_0,使得 $\|\nabla_{xx}^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\|\leqslant m_0$, $\|\nabla\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y})-\nabla\boldsymbol{L}(\boldsymbol{z})\|\leqslant m_0(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})$,

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z})\|\leqslant m_0(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})$$

A3 $\boldsymbol{H}^k$ 正定,$\forall\,\boldsymbol{d}\in\mathbf{R}^n$,正数 m_1,m_2 和所有的 k,有 $m_1\|\boldsymbol{d}\|^2\leqslant\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^k\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\leqslant m_2\|\boldsymbol{d}\|^2$.

引理 1 如果 $\boldsymbol{\Phi}^k\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{V}^k$ 非奇异.

证明 如果 $\boldsymbol{\Phi}^k\neq\mathbf{0}$,设$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\in\mathbf{R}^{n+m}$为方程组 $\boldsymbol{V}^k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$ 的解,则

$$\boldsymbol{H}^k\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{G}^k\boldsymbol{v}=\mathbf{0},$$
$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{\xi}^k)(\nabla\boldsymbol{G}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}+\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta}_j^k-\boldsymbol{c}_j^k)\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$$

由 ξ_j^k 和 η_j^k 的定义式(6),(7)知,$\xi_j^k\geqslant 0,\eta_j^k-c_j^k<0$,矩阵 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta}^k-\boldsymbol{c}^k)$非奇异,因此有

$$\boldsymbol{v}=-(\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta}_j^k-\boldsymbol{c}_j^k))^{-1}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\xi}^k)(\nabla\boldsymbol{G}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\tag{16}$$

把式(16)代入 $\boldsymbol{H}^k\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{G}^k\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$,可得

$$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^k\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{G}^k(\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta}_j^k-\boldsymbol{c}_j^k))^{-1}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\xi}^k)(\nabla\boldsymbol{G}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{H}^k$ 正定,$-\nabla\boldsymbol{G}^k(\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta}_j^k-\boldsymbol{c}_j^k))^{-1}\mathrm{diag}(\boldsymbol{\xi}^k)\cdot(\nabla\boldsymbol{G}^k)^{\mathrm{T}}$ 半正定,所以 $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$,又由式(16),得 $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. 从而,$\boldsymbol{V}^k$ 非奇异. 引理成立.

因为方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{V}^k$ 非奇异,所以方程组式(9)和(10)总有惟一解.

如果 $\boldsymbol{\Phi}_1^k\neq\mathbf{0}$,必存在$(g_i(\boldsymbol{x}^k),\mu_i^k)\neq(0,0)$,又由式(10)和 ϕ_i 定义可知,对所有的 i 有

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{\xi}^k)(\nabla\boldsymbol{G}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k1}+\mathrm{diag}(\boldsymbol{\eta}^k-\boldsymbol{c}^k)\boldsymbol{\lambda}^{k1}=-\boldsymbol{\Phi}_1^k$$
$$\phi_i(\boldsymbol{x}^k+t\boldsymbol{d}^{k1},\boldsymbol{\mu}^k+t\boldsymbol{\lambda}^{k1})-\phi_i^k-t(\xi_i^k(\nabla\boldsymbol{g}_i^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}^{k1}+\eta_i^{k1}\boldsymbol{\lambda}^{k1})=o(t)$$

成立,从而可以得到以下引理.

引理 2 如果 $\boldsymbol{\Phi}_1^k\neq\mathbf{0}$,则对任给的 $\varepsilon_1>0$,存在 $\bar{t}>0$,使得对所有 $0<t\leqslant\bar{t}$ 和所有的 k 有

$$\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|^2-\|\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}^k+t\boldsymbol{d}^{k1},\boldsymbol{\mu}_k+t\boldsymbol{\lambda}^{k1})\|^2\geqslant(2-\varepsilon_1)t\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|^2$$

引理 3 对任意的 $0<t\leqslant 1$,任意的 k,$\boldsymbol{\Phi}_1^k\neq\mathbf{0}$,存在一个 $m_3>0$

$$\|\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}^k+t\boldsymbol{d}^{k0},\boldsymbol{\mu}_k+t\boldsymbol{\lambda}^{k0})\|^2-\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|^2\leqslant m_3t^2\|(\boldsymbol{d}^{k0},\boldsymbol{\lambda}^{k0})\|^2$$

同样地,由算法中 $\boldsymbol{d}^{k0}$,$\boldsymbol{d}^{k1}$和 $\boldsymbol{d}^k=b^k\boldsymbol{d}^{k0}+\rho^k\boldsymbol{d}^{k1}$的计算,再由引理 2 和引理 3 可以得到以下的引理 4.

引理 4 如果 $\boldsymbol{\Phi}_1^k\neq 0$,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\bar{t}>0$,使得对 $0<t\leqslant\bar{t}$ 和所有的 k 有

$$\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|^2-\|\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}^k+t\boldsymbol{d}^k,\boldsymbol{\mu}_k+t\boldsymbol{\lambda}^k)\|^2\geqslant\rho_kt\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|^2$$

引理 5 对任意的 k,存在 $\alpha_{\min}>0$,使得 $\alpha_k\geqslant\alpha_{\min}>0$,式(13)成立或者式(14),(15)成立.

证明 假设算法不有限终止. 对任意的 k,$\boldsymbol{\Phi}_1^k\neq\mathbf{0}$. 如果 $\rho^k=\theta_2$,由引理 4,对任意的 k,$\boldsymbol{\Phi}_1^k\neq\mathbf{0}$ 和 $\alpha\leqslant\min\{(1-\theta_1)/\theta_2,\bar{t}\}$,有

$$\|\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}^k+\alpha\boldsymbol{d}^k,\boldsymbol{\mu}_k+\alpha\boldsymbol{\lambda}^k)\|^2\leqslant(1-\rho_k\alpha)\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|^2\leqslant\theta_1^2\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|^2\leqslant\theta_1^2\max_{0\leqslant r\leqslant m(k)-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k-r}\|^2$$

如果 $\rho^k=\rho_1^k$, $-\theta_2(\boldsymbol{d}^{k0})^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^k\geqslant p_{\max}^k$, $\|\boldsymbol{d}^{k1}\|\leqslant 3\|\boldsymbol{d}^{k0}\|$, $\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|\leqslant\theta_3p_{\max}^k$,则有

$\|\boldsymbol{d}^k\leqslant 3\|\boldsymbol{d}^{k0}\|$. 由引理 4,对所有的 $\alpha\leqslant\min\{\bar{t},(\theta-\theta_2^2)m_1/9m_0\}$和充分大的 k,有

$$\max\{f(\boldsymbol{x}^k),\sum_{r=0}^{m(k)-1}f(\boldsymbol{x}^{k-r})\}-f(\boldsymbol{x}^k+\alpha\boldsymbol{d}^k)\geqslant$$
$$-\alpha(\boldsymbol{d}^k)^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^k-m_0\alpha^2\|\boldsymbol{d}^k\|^2\geqslant p_{\max}^k$$
$$\|\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}^k+\alpha\boldsymbol{d}^k,\boldsymbol{\mu}_k+\alpha\boldsymbol{\lambda}^k)\|^2\leqslant\theta_3 p_{\max}^k$$

由引理 5 可知，对任意 k，式(13)或者式(14)，(15)成立，从而非单调的线搜索可行.

4　收敛性

本节同样假设 A1～A3 成立.

引理 6　如果 $\boldsymbol{d}^{k0}\neq 0$，则 $(\boldsymbol{d}^{k0})^{\mathrm{T}}H^k\boldsymbol{d}^{k0}\leqslant-(\boldsymbol{d}^{k0})^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^k$. 进一步地，如果 $(\boldsymbol{d}^{k1})^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^k\geqslant\theta(\boldsymbol{d}^{k0})^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^k$，由式(14)得 $(\boldsymbol{d}^k)^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^k=\theta(\boldsymbol{d}^{k0})^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{f}^k\leqslant-\theta(\boldsymbol{d}^{k0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^k\boldsymbol{d}^{k0}$.

如果 $\boldsymbol{\Phi}^k=\boldsymbol{0}$，则 x^k 为 KKT 点；如果 $\boldsymbol{\Phi}^k\neq\boldsymbol{0}$，$\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{d}^{k0}=\boldsymbol{0}$，由引理 1 的证明过程可以得出 $\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{k0}=\boldsymbol{0}$，$\nabla\boldsymbol{f}^k=\boldsymbol{0}$，可知 x^k 为 KKT 点. 下面，不失一般性，假设算法不有限终止.

引理 7　$\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)\to\boldsymbol{0}$.

证明　分 3 种情形证明. 为方便起见，当式(13)成立时称迭代为 h-型，当式(14)，(15)成立时称迭代为 f-型. 令 $f^k=f(\boldsymbol{x}^k)$，$\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k)}\|=\max\limits_{0\leqslant r\leqslant m(k)-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k-r}\|$，其中 $k-m(k)+1\leqslant l(k)\leqslant k$.

情形 1：对充分大的 k，式(13)成立.

由于 $m(k+1)\leqslant m(k)+1$，可得

$$\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k+1)}\|=\max_{0\leqslant r\leqslant m(k+1)-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k+1-r}\|\leqslant\max_{0\leqslant r\leqslant m(k)}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k+1-r}\|=$$
$$\max\{\boldsymbol{\Phi}_1^{k+1},\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k)}\}\leqslant\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k)}\|\tag{17}$$

从而序列 $\{\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k)}\|\}$ 收敛. 又由式(13)得 $\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k)}\|\leqslant\theta_1\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(l(k)-1}\|$，且 $\theta_1\in(0,1)$，可以得出 $\{\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k)}\|\}\to 0$ $(k\to\infty)$. 又因为 $\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k+1}\|\leqslant\theta_1\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k)}\|\to 0$，因此得出引理的结论 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|=0$.

情形 2：假设存在一个无限指标集 K，满足式(14)成立.

首先用归纳法证明对所有的 $k\in K$，下式成立：

$$f(\boldsymbol{x}^k)\leqslant f^0-\theta_2\sum_{r=0}^{k-2}\alpha_r\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|-\theta_2\alpha_{k-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k-1}\|\leqslant$$
$$f^0-\lambda\theta_2\sum_{r=0}^{k-1}\alpha_r\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|\tag{18}$$

当 $k=1$ 时，$f^1\leqslant f^0-\lambda\theta_2\alpha_0\|\boldsymbol{\Phi}_1^0\|$，此时式(18)成立. 假设式(18)对于 $1,2,\cdots,k$ 时成立，下面对于 $k+1$ 时分两种情况证明.

(1) $\max\left\{f(\boldsymbol{x}^k),\sum\limits_{r=0}^{m(k)-1}\lambda^{kr}f(\boldsymbol{x}^{k-r})\right\}=f(\boldsymbol{x}^k)$. 此时有

$$f^{k+1}\leqslant f^k-\theta_2\alpha_k\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|\leqslant f^0-\lambda\theta_2\sum_{r=0}^{k-1}\alpha_r\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|-$$
$$\theta_2\alpha_k\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|\leqslant f^0-\lambda\theta_2\sum_{r=0}^{k}\alpha_r\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|$$

(2) $\max\left\{f(\boldsymbol{x}^k),\sum\limits_{r=0}^{m(k)-1}\lambda^{kr}f(\boldsymbol{x}^{k-r})\right\}=\sum\limits_{r=0}^{m(k)-1}\lambda^{kr}f(\boldsymbol{x}^{k-r})$. 令 $q=m(k)-1$，且 $\sum\limits_{t=0}^{q}\lambda^{kt}=1$，$\lambda^{kt}\geqslant\lambda$，$\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|\geqslant 0$，可得下式成立：

$$f^{k+1}\leqslant\sum_{t=0}^{q}\lambda^{kt}f(\boldsymbol{x}^{k-t})-\theta_2\alpha_k\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|\leqslant$$
$$\sum_{t=0}^{q}\lambda^{kt}(f^0-\lambda\theta_2\sum_{r=0}^{k-t-1}\alpha_r\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|)-\theta_2\alpha_k\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|\leqslant$$
$$\sum_{t=0}^{q}\lambda^{kt}f^0-\lambda\theta_2\sum_{r=0}^{k-q-2}\Big(\sum_{t=0}^{q}\lambda^{kt}\Big)\alpha_r\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|-$$
$$\theta_2\sum_{t=0}^{q}\lambda^{kt}\alpha_{k-t-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k-t-1}\|-\theta_2\alpha_k\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|\leqslant$$
$$f^0-\lambda\theta_2\sum_{r=0}^{k}\alpha_r\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|.$$

从而，式(18)对所有的 $k\in K$ 成立.

因为 f^k 下有界，令 $k\to\infty$，由引理 6，对于 $\alpha_k\geqslant\alpha_{\min}>0$，可得

$$f^{k+1}\leqslant f^0-\lambda\theta_2\sum_{r=0}^{k}\alpha_r\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|\leqslant f^0-\lambda\theta_2\sum_{r=0}^{k}\alpha_{\min}\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|,$$
$$\lambda\theta_2\sum_{r=0}^{k}\alpha_{\min}\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|<\infty$$

因此可以得出 $\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)\to\boldsymbol{0}$，$k\to\infty$.

情形 3：h-型迭代和 f-型迭代交替进行. 不妨假设从第 k_t+1 次到第 k_{t+1} 次迭代及从第 $k_{t+2}+1$ 次到第 k_{t+3} 次迭代都是 h-型迭代，从第 $k_{t+1}+1$ 次到第 k_{t+2} 次迭代都是 f-型迭代.

从算法的步骤 2 和步骤 3 可知，如果 $p_{\max}^k\neq 0$，只有当从 f-型迭代转到 h-型迭代开始时 $p_{\max}^k$ 才更新，表明此时 $p_{\max}^k$ 仍旧较大，可以充分地下降. 由式(13)和(17)可得

$$p_{\max}^{k+1}=\max_{0\leqslant r\leqslant m(k+1)-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k+1-r}\|=\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k+1)}\|\leqslant$$
$$\theta_1\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k)}\|=\theta_1 p_{\max}^k<p_{\max}^k$$

从而 $p_{\max}^k$ 单调下降且 $\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|\leqslant p_{\max}^k$. 由算法可知，对 $t=0,1,2,\cdots$，有

$$p_{\max}^{k_t+1}>p_{\max}^{k_t+2}>\cdots>p_{\max}^{k_{t+1}}$$
$$p_{\max}^{k_{t+1}+1}=p_{\max}^{k_{t+1}+2}=\cdots=p_{\max}^{k_{t+2}}$$
$$p_{\max}^{k_{t+2}+1}>p_{\max}^{k_{t+2}+2}>\cdots>p_{\max}^{k_{t+3}}$$

令 $\max\{(r_k+1)/2,\theta_3\}=\bar{\theta}_1$，由式(13)，(18)得

$$p_{\max}^{k_{t+2}}=\max_{0\leqslant r\leqslant m(k_{t+2})-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k_{t+2}-r}\|\leqslant$$
$$\max_{0\leqslant r\leqslant m(k_{t+2})-1}\bar{\theta}_1 p_{\max}^{k_{t+2}-r-1}\leqslant\bar{\theta}_1 p_{\max}^{k_t+1}$$

$$p_{\max}^{k_{t+2}+1}=\max_{0\leqslant r\leqslant m(k_{t+2}+1)-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k_{t+2}+1-r}\|\leqslant$$

$$\max_{0\leqslant r\leqslant m(k_{t+2}+1)-1}\{\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k_{t+2}+1}\|,\bar{\theta}_1 p_{\max}^{k_{t+2}-r-1}\}\leqslant$$

$$\bar{\theta}_1 p_{\max}^{k_{t+1}+1}$$

即序列$\{\cdots,p_{\max}^{k_t+1},\cdots,p_{\max}^{k_{t+1}+1},\cdots,p_{\max}^{k_{t+2}+1},\cdots\}$对所有的 $t\geqslant 0$ 单调下降，且下降比为

$$p_{\max}^{k_{t+1}+1}/p_{\max}^{k_t+1}=\bar{\theta}_1<1,p_{\max}^{k_{t+2}+1}/p_{\max}^{k_{t+1}+1}=\bar{\theta}_1<1$$

可得 $p_{\max}^{k_{t+1}+1}\to 0,t\to\infty$. 考虑到 $p_{\max}^k$ 的非负性，可得 $p_{\max}^k\to 0,k\to\infty$. 再由式(13)和(15)，得 $\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|\leqslant\max\{\theta_1,\bar{\theta}_1\}p_{\max}^k$，从而$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{\Phi}_1^k\|=0$.

类似文献[8]可得以下引理.

引理 8 $d^{k0}\to 0,\boldsymbol{d}^k\to\boldsymbol{0}$.

对任意 k，由式(17)及 $p_{\max}^k$ 和 $\boldsymbol{\mu}^k$ 的更新，可知 $\|\boldsymbol{\Phi}_1^{l(k)}\|=\max\limits_{0\leqslant r\leqslant m(k)-1}\|\boldsymbol{\Phi}_1^{k-r}\|$ 单调下降，$f(\boldsymbol{x}^k)\leqslant f^0-\lambda\theta_2\sum\limits_{r=0}^{k-1}\alpha_r\|\boldsymbol{\Phi}_1^r\|$，所以 $f(\boldsymbol{x}^k)\leqslant f^0+p,p=\max p_{\max}^k$. 又由假设 A1，可知$\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)\}$是有界的.

从引理 7 和引理 8 可以得出以下定理，如果算法不有限终止，则存在聚点且聚点为 KKT 点，因此算法是收敛的.

定理 1 如果$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$是$\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)\}$的一个聚点，则 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题 NLP 的一个 KKT 点.

以下讨论算法的超线性收敛性，需要补充假设：

A4 $\{\nabla\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}^*)\,|\,i\in I(\boldsymbol{x}^*)\}$ 线性独立，其中 $I(\boldsymbol{x}^*)=\{i\,|\,g_i(\boldsymbol{x}^*)=0\}$，$\boldsymbol{x}^*$ 是$\{\boldsymbol{x}^k\}$的一个聚点且是问题 NLP 的一个 KKT 点.

A5 序列$\{\boldsymbol{H}^k\}$满足$\dfrac{\|(\boldsymbol{H}^k-\nabla_{xx}^2\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k))\boldsymbol{d}^{k1}\|}{\|d^{k1}\|}\to 0$.

A6 严格互补条件在每一个 KKT 点成立.

由假设 A5 可知，$(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)$是 $\boldsymbol{\Phi}^k$ 的带高阶扰动的牛顿方向.

由假设 A6 可知，ϕ_i 在每一个 KKT 点$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$处可微，从而 $\boldsymbol{\Phi}$ 在每一个 KKT 点$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$连续可微. 以下假设 A1—A6 成立.

引理 9 序列$\{\|(\boldsymbol{V}^k)^{-1}\|\}$一致有界. 如果 $\boldsymbol{V}^*$ 是$\{\boldsymbol{V}^k\}$的一个聚点矩阵，则 $\boldsymbol{V}^*$ 非奇异.

由引理 6，存在 $m_{11}>0$，对所有的 k

$$(m_{11})^{-1}\|(\boldsymbol{d}^{k1},\boldsymbol{\lambda}^{k1})\|\leqslant\|\boldsymbol{\Phi}^k\|\leqslant m_{11}\|(\boldsymbol{d}^{k1},\boldsymbol{\lambda}^{k1})\|$$

$$(m_{11})^{-1}\|(\boldsymbol{d}^{k0},\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{k0})\|\leqslant\|\boldsymbol{\Phi}^k\|\leqslant m_{11}\|(\boldsymbol{d}^{k0},\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{k0})\|$$

由以上分析和定理 1，可得如下的定理 2，从而算法具有超线性收敛性.

定理 2 设执行算法 1 后产生一个序列$\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)\}$，$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$是$\{(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)\}$的一个聚点，则$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$是问题 NLP 的一个 KKT 点，且$(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{\mu}^k)$超线性收敛到$(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{\mu}^*)$.

5 数值实验

本节给出一些数值结果放在表 1 中. 测试问题来自文献[13]的不等式约束优化问题. 其中编号与文献[13]中的相同，NIT 为迭代次数，NF 为目标函数和约束函数的计算次数，NG 为梯度的计算次数，“—”表示算法不能得到最优解. 数值结果表明，非单调的无罚函数无滤子的 QP-free 方法是有效的.

运算过程中，$\boldsymbol{H}^0=\boldsymbol{I}$，正定矩阵 $\boldsymbol{H}^k$ 由 Broyden，Fletcher，Goldfard 和 Shanno 提出的 BFGS 公式更新 $\boldsymbol{H}^{k+1}$. 其中参数选择如下：$\nu=3,c=0.9,\tau=0.5,\theta_1=0.9,\theta=0.5,\theta_2=0.1,\theta_3=0.95,\mu_0=0,\bar{\mu}=10\,000,M=3$.

表 1 数值结果

Tab.1 Numerical results

编号	文献[8]中的算法			算法 1		
	NIT	NF	NG	NIT	NF	NG
hs003	20	58	41	7	12	15
hs004	8	11	17	3	5	7
hs005	40	44	81	20	23	41
hs012	24	44	49	19	34	39
hs016	—	—	—	26	192	53
hs022	12	24	35	9	18	19
hs035	29	41	59	18	26	37
hs037	—	—	—	18	29	37
hs038	—	—	—	90	182	181
hs110	15	36	31	15	30	31

参考文献：

[1] 濮定国，李康弟，薛文娟. 解约束优化问题的 QP-free 非可行域方法[J]. 同济大学学报：自然科学版，2005，33(4)：525.
PU Dingguo，LI Kangding，XUE Wenjuan. Convergence of QP-free infeasible methods for inequality optimization problems [J]. Journal of Tongji University：Natural Science，2005，33(4)：525.

[2] Panier E R，Tits A L，Herskovits J N. A QP-free，globally，locally superlinear convergent method for the inequality constrained optimization problems[J]. SIAM Journal of Control and Optimization，1988，26：788.

[3] Pu D，Zhou Y，Zhang Z. A QP free feasible method [J]. Journal of Computational Mathematics，2004，22(1)：651.

[4] Qi H，Qi L. A new QP-free，globally convergent，locally

superlinearly convergent algorithm for inequality constrained optimization [J]. SIAM Journal on Optimization, 2000, 11(2): 113.

[5] Fletcher R, Leyffer S, Toint P. On the global convergence of a filter—SQP algorithm [J]. Journal on Optimization, 2002, 13 (1): 44.

[6] Gould N I M, Toint P L. Nonlinear programming without a penalty function and a filter [J]. Journal of Computational Mathematics, 2010,122(1):155.

[7] Liu X, Yuan Y. A sequential quardratic programming method without a penalty function and a filter for equality constrained nonlinear programming [J]. Journal on Optimization, 2011, 21 (2): 545.

[8] Pu D, Liu A, Shang Y, et al. QP-free infeasible method without a penalty function and a filter [J]. Operations Research Transactions, 2013, 17(1): 106.

[9] Ulbrich M, Ulbrich S. Non-monotone trust region methods for nonlinear equality constrained optimization without a penalty function [J]. Mathematical Programming, 2003, 95(1): 103.

[10] 濮定国,金中. 非单调QP-free非可行域方法[J]. 同济大学学报:自然科学版, 2010, 38(2): 311.
Pu D G, Jin Z. Nonmonotone line search technique for QP-free infeasible method [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2010, 38(2): 311.

[11] Li K, Pu D, Tian W. Filter QP-free method with 3-piecewise linear NCP function [J]. Pacific Journal of Optimization, 2008, 4(1): 43.

[12] Galantai A. Properties and construction of NCP functions[J]. Computational Optimization and Application, 2012, 52(3): 805.

[13] Hock W, Schittkowski K. Test examples for nonlinear programming codes[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

(上接第789页)

[5] Liu H, Orban D. Cloud MapReduce: a MapReduce implementation on top of a cloud operating system [C]// Proceedings of the 11th IEEE/ACM International Symposium on Cluster, Cloud and Grid Computing. Los Alamitos: IEEE Computer Press, 2011:464-474.

[6] 师雪霖,徐恪. 云虚拟机资源分配的效用最大化模型[J]. 计算机学报, 2013, 36(2): 252.
SHI Xuelin, XU Ke. Utility maximization model of virtual machine scheduling in cloud environment[J]. Chinese Journal of Computer, 2013, 36(2): 252.

[7] Chaisiri S, Lee B, Niyato D. Optimization of resource provisioning cost in cloud computing[J]. IEEE Transactions on Services Computing, 2011, 99(7):1.

[8] Meng X, Isci C, Kephart J, et al. Efficient resource provisioning in compute clouds via VM multiplexing [C]// Proceedings of the 7th International Conference on Autonomoc Computing. New York: ACM Press, 2010:11-20.

[9] Chen M, Zhang H, Su Y Y, et al. Effective vm sizing in virtualized data centers [C]// Proceedings of IFIP/IEEE International Symposium on Integrated Networking Management. Piscataway:IEEE Press, 2011:594-601.

[10] 谭一鸣,曾国荪,王伟. 随机任务在云计算平台中能耗的优化管理方法[J]. 软件学报, 2012, 23(2): 266.
TAN Yiming, ZENG Guosun, WANG Wei. Policy of energy optimal management for cloud computing platform with stochastic Tasks[J]. Chinese Journal of Software, 2012, 23 (2): 266.

[11] Govindan S, Choi J, Nath A R. Communication-aware CPU management in consolidated Xen-based hosting platforms[J]. IEEE Transactions on Computers, 2009, 58(8): 1111.

[12] Redhat, Inc. KVM-kernel based virtual machine [EB/OL]. [2008-09-01]. http://www. redhat. com/resource-library/whitepapers/doc-kvm.

[13] Vmware Inc. Virtual machine guide[EB/OL]. [2006-07-06]. http://www. vmware. com/pdf/server-vm-manual. pdf.

[14] Walker E. Benchmarking Amazon EC2 for high-performance scientific computing[EB/OL]. [2008-10-11]. http:// www. usenix. org/legacy/publications/login/2008-10/openpdfs/walker. pdf.

[15] ZHANG Wensong. Linux virtual server for scalable network services [EB/OL]. [1998-05-28]. http://www. linuxvirtualserver. org/ols/lvs. ps. gz.

[16] Calheiros R N, Ranjan R, Rose CAF D, et al. CloudSim: a toolkit for modeling and simulation of cloud computing environments and evaluation of resource provisioning algorithms[J]. Software: Practice and Experience, 2011, 41 (1):23.