

一种迭代未知输入观测器设计

朱芳来, 张永军

(同济大学 电子与信息工程学院, 上海 201804)

摘要: 针对具有未知输入的线性系统讨论了基于迭代控制思想的未知输入观测器设计方法. 针对每一步迭代, 由于当前未知输入已知, 因而可以通过设计常规的 Luenberger 观测器得到当前步的状态估计和输出估计. 在此基础上采用 D-型迭代学习控制的思想, 通过当前输出步误差和未知输入估计值提出下一步的未知输入的迭代估计方法, 并利用此次未知输入估计值再次设计 Luenberger 观测器估计下一步的状态. 之后, 对迭代算法的收敛性进行了分析, 并给出了迭代算法收敛的充分条件. 最后, 对一个实际模型进行仿真, 验证了算法的有效性.

关键词: 未知输入观测器; 未知输入重构; D-型迭代学习控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

An Iterative Unknown Input Observer Design

ZHU Fanglai, ZHANG Yongjun

(College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: Based on the thought of iterative control, this paper presents a method to design an unknown input observer for linear continuous-time systems with unknown input. In each step of iteration, the current input of iteration is known, so the traditional Luenberger observer is used to estimate the current system state and corresponding output. Based on D-type iterative learning control algorithm, the iterative method to estimate the unknown input of next step is proposed by using the current output error and estimated input, and the Luenberger observer is redesigned by using the estimated value to estimate the next step system state. The convergence of the iterative algorithm is analyzed, and the sufficient condition for its convergence is given. Finally, a numerical simulation of a practical model is given to illustrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words: unknown input observer; unknown input reconstruction; D-type iterative learning control

在实际的控制系统中广泛地存在具有未知输入的控制系统的. 针对具有未知输入系统状态进行观测器设计是控制领域所关注的热点问题之一. 未知输入观测器 (unknown input observers, UIO) 在故障诊断和基于混沌同步的保密通讯^[1]等领域中有重要的应用.

对未知输入观测器的研究始于 20 世纪 70 年代^[2-3], 发展至今, 无论是针对线性系统还是非线性系统, 已经有众多的研究成果^[4-5]. 在早期, 学者们主要是研究如何避免未知输入的影响, 提出状态估计器. 如文献^[6]通过找出合适的矩阵消除观测器中未知输入的存在, 提出了直接设计线性系统的全维未知输入观测器的方法. 文献^[7]在未知输入只影响部分系统状态且这些状态可以由系统输出得出的条件下绕开未知输入的影响给出了降维观测器的设计方法. 文献^[8]给出了未知输入观测器存在的充要条件. 文献^[9]提出了输入可观性的概念和系统化的输入重构方法. 之后, 状态和未知输入一并估计的未知输入观测器设计方法得到了重视^[10-13]. 比如, 文献^[14]针对具有未知输入和可测干扰的线性系统提出了降维观测器的设计方法, 该方法通过选取合适的降维观测器增益来处理未知输入和可测量干扰. 文献^[15]提出了一种鲁棒 H_∞ 滑模描述观测器, 对具有未知输入或者输出干扰的不确定系统提出了状态估计及未知输入重构方法.

从上面未知输入观测器的研究动态的分析可以看出, 如何提出未知输入的重构方法是该领域的一个被关注的热点之一, 因而, 如何提出新的未知输

收稿日期: 2013-08-21

基金项目: 国家自然科学基金(61074009); 高等学校博士学科点专项科研基金(20110072110015); 广西制造系统与先进制造技术重点实验室基金(PF110289); 上海重点学科项目(B004)

第一作者: 朱芳来(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为观测器设计、基于模型的故障诊断.

E-mail: zhufanglai@tongji.edu.cn

入重构方法具有重大的意义. 本文结合迭代学习控制的思想尝试提出一种新的未知输入估计方法, 同时还考虑了状态的估计问题.

1 迭代未知输入观测器设计的基本思想

考虑如下具有未知输入的线性时不变系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统的状态; $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbf{R}^m$ 为可测输出; $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是已知控制输入; $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbf{R}^r$ 是未知输入; 而 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 和 \boldsymbol{D} 都是适当维数的常数矩阵, 且假设 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ 为可观测.

在 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 为已知的假设前提下, 可以直接设计如下的 Luenberger 观测器:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}(t) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)) \quad (2)$$

式中, $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 为状态估计. 但事实上, 未知输入 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 为未知, 观测器(2)无法实施, 只是系统(1)理论上的状态观测器, 称系统(2)为系统(1)的虚拟观测器. 记虚拟观测器的状态估计误差为 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$, 输出误差为 $\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)$, 其中 $\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$. 理论上对任意的初始状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{x}}(t) = 0$ 和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\boldsymbol{y}}(t) = 0$ 且还有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}(t) = 0$.

为处理未知输入的问题, 提出如下的迭代未知观测器设计思想: 给出未知输入 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 的迭代估计初值 $\boldsymbol{\eta}_0(t)$, 针对 $\boldsymbol{\eta}_0(t)$ 考虑如下虚拟系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_0(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}_0(t) \quad (3)$$

式中: $\boldsymbol{x}_0(t)$ 表示在初始迭代未知输入 $\boldsymbol{\eta}_0(t)$ 驱动下的系统状态; $\boldsymbol{\eta}_0(t)$ 是用来逼近 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 的第一估计, 所以虚拟系统(3)就是一个不含未知因素的线性系统, 根据原系统的可测输出对其可以设计一般形式的 Luenberger 观测器如式(4):

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_0(t) &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_0(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}_0(t) + \\ &\quad \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}_0(t)) \end{aligned} \quad (4)$$

系统(4)称为系统(1)的第 0 步迭代未知输入观测器. 第 0 步迭代的状态估计误差、输出估计误差和未知输入估计误差分别记为 $\tilde{\boldsymbol{x}}_0(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}_0(t)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}_0(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}_0(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0(t) = \boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{\eta}_0(t)$.

在此基础上, 对未知输入 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 提出 D 型迭代估计: $\boldsymbol{\eta}_1(t) = \boldsymbol{\eta}_0(t) + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}_0(t)$, 迭代出 $\boldsymbol{\eta}_1(t)$, 其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是迭代增益.

一般地, 假设得到了 $\boldsymbol{\eta}(t)$ 的第 k 步迭代估计 $\boldsymbol{\eta}_k(t)$, 利用 $\boldsymbol{\eta}_k(t)$ 构造虚拟状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}_k(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}_k(t) \quad (5)$$

针对系统(5)基于原系统的可测输出, 设计观测器为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_k(t) &= \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_k(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}_k(t) + \\ &\quad \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}_k(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

系统(6)称为系统(1)的第 k 步迭代未知输入观测器. 第 k 步迭代状态估计误差、输出估计误差和未知输入估计误差分别记为 $\tilde{\boldsymbol{x}}_k(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}_k(t)$, $\tilde{\boldsymbol{y}}_k(t) = \boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}_k(t)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k(t) = \boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{\eta}_k(t)$, 其中 $\hat{\boldsymbol{y}}_k(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}_k(t)$. 在此基础上, 提出第 $k+1$ 步未知输入的迭代估计为

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}(t) = \boldsymbol{\eta}_k(t) + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}_k(t) \quad (7)$$

需要考虑的问题是, 迭代增益 $\boldsymbol{\Gamma}$ 满足什么条件及如何选取可以使得由系统(6)和(7)所观测出的状态随着迭代的推进能够在有限时间区间 $[0, T]$ ($T > 0$) 内收敛到系统的真实状态, 即能够有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\boldsymbol{x}}_k(t) = \boldsymbol{x}(t)$, $\forall t \in [0, T]$, 并且系统(7)所确定的未知输入迭代估计能够在有限时间区间 $[0, T]$ 内迭代收敛到真实的未知输入, 即有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\eta}_k(t) = \boldsymbol{\eta}(t)$, $\forall t \in [0, T]$.

2 收敛性分析

相关范数定义: 对于 n 维向量 $\boldsymbol{w} = (\omega_1, \omega_2, \dots$

$\omega_n)^T$, 其范数的定义为 $\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \omega_i^2}$; 对于 $n \times n$

矩阵 \boldsymbol{A} 的范数为 $\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A})}$, 其中 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示最大特征值. 函数 $\boldsymbol{f}: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的 λ 范数的定义为 $\|\boldsymbol{f}\|_{\lambda} = \sup_{0 \leq t \leq T} \{\|\boldsymbol{f}(t)\| e^{-\lambda t}\}$, 其中, $\lambda > 0$ 为一个正常数.

定理 1 对于给定的线性系统(1)及其迭代未知输入观测器(6)和(7), 如果满足① $\|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\| < 1$; ② $\hat{\boldsymbol{x}}_k(0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0$ (其中 $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ 是任意的常数向量), 则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\eta}_k(t) = \boldsymbol{\eta}(t)$, $\forall t \in [0, \infty)$.

证明 取 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k(t) = \boldsymbol{\eta}(t) - \boldsymbol{\eta}_k(t)$, 则有 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{k+1}(t) = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k(t) - \boldsymbol{\Gamma}\dot{\tilde{\boldsymbol{y}}}_k(t)$. 对虚拟观测器(2), 对初始状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0$, 有

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}(t) &= e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})t} \hat{\boldsymbol{x}}_0 + \int_0^t e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})(t-\tau)} \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau) d\tau + \\ &\quad \int_0^t e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})(t-\tau)} \boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}(\tau) d\tau + \int_0^t e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})(t-\tau)} \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

又对第 k 步迭代观测器(6), 有

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k(t) = e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})t} \hat{\boldsymbol{x}}_0 + \int_0^t e^{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})(t-\tau)} \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau) d\tau +$$

$$\int_0^t e^{(A-IC)(t-\tau)} D \eta_k(\tau) d\tau + \int_0^t e^{(A-IC)(t-\tau)} L y(\tau) d\tau \quad (9)$$

所以

$$\begin{aligned} \tilde{y}_k(t) &= y(t) - \hat{y}_k(t) = y(t) - \hat{y}(t) + \hat{y}(t) - \\ &\hat{y}_k(t) = \tilde{y}(t) + C \int_0^t e^{(A-IC)(t-\tau)} D \tilde{\eta}_k(\tau) d\tau \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{k+1}(t) &= \tilde{\eta}_k(t) - \Gamma \dot{\tilde{y}}_k(t) = (I - IC D) \tilde{\eta}_k(t) - \\ &\Gamma \dot{\tilde{y}}(t) - \int_0^t IC(A-IC) e^{(A-IC)(t-\tau)} D \tilde{\eta}_k(\tau) d\tau \end{aligned}$$

对上式两边取欧氏范数后,再两端同时乘以函数 $e^{-\lambda t} (t \in [0, T])$ 有

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} \|\tilde{\eta}_{k+1}(t)\| &\leq \| (I - IC D) \| e^{-\lambda t} \|\tilde{\eta}_k(t)\| + \\ &\|\Gamma\| \|\dot{\tilde{y}}(t)\| e^{-\lambda t} + \\ &\int_0^t \| IC(A-IC) e^{(A-IC)(t-\tau)} D \| e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot \\ &e^{-\lambda \tau} \|\tilde{\eta}_k(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

根据 λ 范数定义,由上式得到

$$\begin{aligned} \|\tilde{\eta}_{k+1}\|_{\lambda} &\leq \| (I - IC D) \| \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} + \\ &\|\Gamma\| \|\dot{\tilde{y}}\|_{\lambda} + \int_0^t \| IC(A-IC) e^{(A-IC)(t-\tau)} D \| \\ &e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} d\tau \quad (10) \end{aligned}$$

对式(10)中右边的积分项作积分变换 $\zeta = t - \tau$, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^t \| IC(A-IC) e^{(A-IC)(t-\tau)} D \| e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} d\tau &= \\ \int_0^t \| IC(A-IC) e^{(A-IC)\zeta} D \| e^{-\lambda\zeta} \cdot \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} d\zeta &< \\ \int_0^t \| IC(A-IC) e^{(A-IC)\zeta} D \| e^{-\lambda\zeta} \cdot \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} d\zeta + \\ \int_t^{\infty} \| IC(A-IC) e^{(A-IC)\zeta} D \| e^{-\lambda\zeta} \cdot \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} d\zeta &= \\ \int_0^{\infty} \| IC(A-IC) e^{(A-IC)\zeta} D \| e^{-\lambda\zeta} \cdot \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} d\zeta &\leq \\ \int_0^{\infty} b_1 e^{-\lambda\zeta} \cdot \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} d\zeta = b_1 \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda\zeta} d\zeta &= \\ \frac{b_1}{\lambda} \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} \end{aligned}$$

其中 $b_1 = \sup_{t \in [0, \infty)} \| IC(A-IC) e^{(A-IC)t} D \|$, 由于 $A-IC$ 是稳定矩阵,所以 b_1 存在且有限, 即有

$$\begin{aligned} \int_0^t \| IC(A-IC) e^{(A-IC)(t-\tau)} D \| e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot \\ \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} d\tau < \frac{b_1}{\lambda} \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} \quad (11) \end{aligned}$$

将式(11)代入式(10)得到

$$\begin{aligned} \|\tilde{\eta}_{k+1}\|_{\lambda} &< \left[\| (I - IC D) \| + \frac{b_1}{\lambda} \right] \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda} + \\ &\|\Gamma\| \|\dot{\tilde{y}}\|_{\lambda} \end{aligned}$$

由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{y}}(t) = 0$, 所以存在充分大的 λ 使得 $\|\dot{\tilde{y}}\|_{\lambda}$

充分小, 于是有

$$\|\tilde{\eta}_{k+1}\|_{\lambda} < \left[\| (I - IC D) \| + \frac{b_1}{\lambda} \right] \|\tilde{\eta}_k\|_{\lambda}$$

根据条件 $\| I - IC D \| < 1$, 取充分大的 λ 使 $\| (I - IC D) \| + \frac{b_1}{\lambda} < 1$, 这样就得到 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{\eta}_{k+1}\|_{\lambda} = 0$. 于是

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\eta}_{k+1}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

未知输入按式(7)迭代, 定理 1 保证了该迭代算法的收敛性, 即随着迭代步骤 k 的增加, 迭代的未知输入 $\eta_k(t)$ 在有限时间区间 $[0, T]$ 内越来越接近真实的 $\eta(t)$. 在实际中, 通常根据事先设定的误差要求 (例如要求迭代误差不超过事先给出的 ϵ), 取一个满足 $\|\eta_{k^*}(t) - \eta(t)\| < \epsilon$ 的迭代最大次数 k^* , 并且取未知输入的估计为 $\hat{\eta}(t) = \eta_{k^*}(t), \forall t \in [0, T]$.

上面只是考虑了在有限时间区间内迭代次数足够大的情况下给出迭代观测器未知输入收敛证明. 如下的定理给出了迭代观测器随着迭代步骤的增加状态能收敛到真实状态的结论.

定理 2 对于给定的线性连续时不变系统(1)及其迭代观测器(6)和形如式(7)未知输入迭代估计, 如果满足如下条件: ① $\| I - DIC \| < 1$; ② $\hat{x}_{k+1}(0) = \hat{x}_k(0) + D\Gamma \tilde{y}_k(0)$, 则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}_k(t) = x(t), \forall t \in [0, T]$.

证明 第 $k+1$ 步迭代观测器为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_{k+1}(t) &= (A - IC) \hat{x}_{k+1}(t) + Bu(t) + \\ &D\eta_{k+1}(t) + Ly(t) \end{aligned}$$

它在初始条件 $\hat{x}_{k+1}(0)$ 下的解为

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}(t) &= e^{(A-IC)t} \hat{x}_{k+1}(0) + \int_0^t e^{(A-IC)(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \\ &\int_0^t e^{(A-IC)(t-\tau)} D\eta_{k+1}(\tau) d\tau + \int_0^t e^{(A-IC)(t-\tau)} Ly(\tau) d\tau \end{aligned}$$

由于 $\hat{x}_{k+1}(0) = \hat{x}_k(0) + D\Gamma \tilde{y}_k(0)$ 和 $\eta_{k+1}(\tau) = \eta_k(\tau) + \Gamma \dot{\tilde{y}}_k(\tau)$, 所以

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1}(t) &= e^{(A-IC)t} \hat{x}_k(0) + e^{(A-IC)t} D\Gamma \tilde{y}_k(0) + \\ &\int_0^t e^{(A-IC)(t-\tau)} [Bu(\tau) + D\eta_k(\tau) + Ly(\tau)] d\tau + \\ &\int_0^t e^{(A-IC)(t-\tau)} D\Gamma \dot{\tilde{y}}_k(\tau) d\tau = \hat{x}_k(t) + e^{(A-IC)t} D\Gamma \tilde{y}_k(0) + \\ &\int_0^t e^{(A-IC)(t-\tau)} D\Gamma \dot{\tilde{y}}_k(\tau) d\tau \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{(A-IC)(t-\tau)} D\Gamma \dot{\tilde{y}}_k(\tau) d\tau &= D\Gamma \tilde{y}_k(t) - \\ e^{(A-IC)t} D\Gamma \tilde{y}_k(0) &+ \int_0^t (A - IC) e^{(A-IC)(t-\tau)} D\Gamma \tilde{y}_k(\tau) d\tau \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}(t) &= \hat{\mathbf{x}}_k(t) + e^{(A-LC)t} \mathbf{D}\mathbf{F} \tilde{\mathbf{y}}_k(0) + \\ &\int_0^t e^{(A-LC)(t-\tau)} \mathbf{D}\mathbf{F} \dot{\mathbf{y}}_k(\tau) d\tau \\ &= \hat{\mathbf{x}}_k(t) + \mathbf{D}\mathbf{F} \tilde{\mathbf{y}}_k(t) + \\ &\int_0^t (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) e^{(A-LC)(t-\tau)} \mathbf{D}\mathbf{F} \tilde{\mathbf{y}}_k(\tau) d\tau \end{aligned}$$

根据 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}(t)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}(t) &= \tilde{\mathbf{x}}_k(t) - \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k(t) - \int_0^t (\mathbf{A} - \\ &\mathbf{L}\mathbf{C}) e^{(A-LC)(t-\tau)} \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k(\tau) d\tau = (\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}_k(t) - \\ &\int_0^t (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) e^{(A-LC)(t-\tau)} \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_k(\tau) d\tau \end{aligned}$$

两边取范数得到

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}(t)\| &\leq \|\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C}\| \|\tilde{\mathbf{x}}_k(t)\| + \\ &\int_0^t \|(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) e^{(A-LC)(t-\tau)} \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C}\| \|\tilde{\mathbf{x}}_k(\tau)\| d\tau \leq \\ &\|\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C}\| \|\tilde{\mathbf{x}}_k(t)\| + b_2 \int_0^t \|\tilde{\mathbf{x}}_k(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

式中 $b_2 = \sup_{t \in [0, T]} \|(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}) e^{(A-LC)(t-\tau)} \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C}\|$. 两端同时乘以 $e^{-\lambda t}$ ($t \in [0, T]$) 得

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}(t)\| e^{-\lambda t} &\leq \|\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C}\| \|\tilde{\mathbf{x}}_k(t)\| e^{-\lambda t} + \\ &b_2 \int_0^t e^{-\lambda t} e^{-\lambda(t-\tau)} \|\tilde{\mathbf{x}}_k(\tau)\| d\tau \end{aligned}$$

由 λ 范数定义可知: $\|\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\|_{\lambda} \leq (\|\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C}\| + b_2 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda}) \|\tilde{\mathbf{x}}_k\|_{\lambda}$. 根据定理 2 的条件①, 取充分大的 λ 使 $\|\mathbf{I} - \mathbf{D}\mathbf{F}\mathbf{C}\| + b_2 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} < 1$, 于是 $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{x}(t)$, $t \in [0, T]$ 得证.

未知输入迭代式(7)中的输出微分项 $\dot{\mathbf{y}}_k = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_k$, 由于在每一步的迭代中, 状态 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 是可测的, 且 $\boldsymbol{\eta}_k$ 可由式(7)迭代得出, 那么有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{C}\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_k(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \\ &\mathbf{C}\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_k(t) + \mathbf{C}\mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k(t)) \end{aligned}$$

然而, 原系统的状态是不可测量的, 这样无法通过计算得出原系统的输出微分. 针对这一问题, 可以为原系统输出设计二阶高增益滑模观测器来估计原系统的输出微分.

由系统方程(1)知: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}(t)$. 假设输出 \mathbf{y} 为 $y_{i,1} = y_i = \mathbf{c}_i \mathbf{x}$ ($i=1, 2, \dots, p$) 的时间微分, 其中 \mathbf{c}_i 为输出矩阵 \mathbf{C} 的第 i 行. $\dot{y}_{i,1} = \mathbf{c}_i \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}_i \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{c}_i \mathbf{D}\boldsymbol{\eta}$, 令 $y_{i,2} = \dot{y}_i = \mathbf{f}_i = \mathbf{c}_i (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\boldsymbol{\eta})$, 则有

$$\begin{cases} \dot{y}_{i,1} = y_{i,2} + \mathbf{c}_i \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \dot{y}_{i,2} = \dot{f}_i \end{cases} \quad (12)$$

基于 Levant^[16] 的工作可以引入二阶高增益滑模观测器获取原系统的输出微分估计.

定理 3^[16] 在未知输入有界的条件下, 如下二阶系统

$$\begin{cases} \dot{y}_{i,1} = v_{i,1} + \mathbf{c}_i \mathbf{B}\mathbf{u} \\ v_{i1} = \hat{y}_{i,2} - \lambda_{i,1} |\hat{y}_{i,1} - y_i|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\hat{y}_{i,1} - y_i) \\ \dot{y}_{i,2} = v_{i,2} \\ v_{i2} = -\lambda_{i,2} \text{sign}(\hat{y}_{i,2} - v_{i1}) \end{cases}$$

是式(12)的高阶滑模观测器, 其中 $i=1, 2, \dots, p$. 该观测器不仅精确地估计出 y_i , 而且在有限时间内能精确估计 y_i 的微分. 具体而言, $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}_{1,1} \quad \hat{y}_{2,1} \quad \dots \quad \hat{y}_{p,1}]$ 和 $\hat{\boldsymbol{\zeta}} = [\hat{y}_{1,2} \quad \hat{y}_{2,2} \quad \dots \quad \hat{y}_{p,2}]$ 是输出 \mathbf{y} 及 $\dot{\mathbf{y}}$ 的精确估计. 其中 $\lambda_{i,1}$ 和 $\lambda_{i,2}$ 是需要合理选取的观测增益.

由于在有限时间内, $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$ 是输出微分 $\dot{\mathbf{y}}$ 的精确估计, 那么未知输入迭代式(7)可改写为

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1}(t) = \boldsymbol{\eta}_k(t) + \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}(t) - \dot{\mathbf{y}}_k(t)) \quad (13)$$

3 仿真分析

考虑某飞行器的定杆横向飞行的线性简化模型, 该模型描述成式(1)的形式, 其中 $\mathbf{A} =$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -0.080 & -0.030 & -0.157 & 0 \\ -0.730 & -0.377 & 0 & 1.000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \\ 0 & -8.650 & 0 & -0.500 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \mathbf{B} = \\ &\begin{bmatrix} 1.540 & -0.020 \\ -0.100 & -0.056 \\ 0 & 0 \\ 0 & -6.500 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

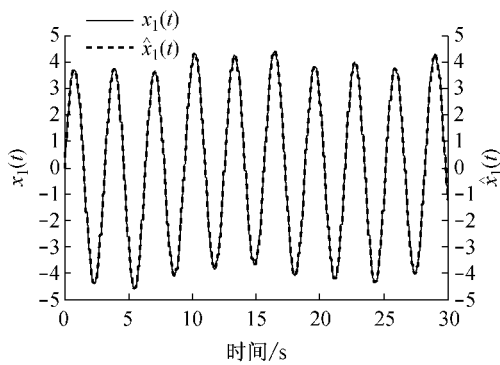
将系统的极点配置到 $-0.487 \pm 2.335j$, -8.435 和 -0.00877 , 取已知输入 $\mathbf{u} = [0; 0]$, 估计状态

$$\hat{\mathbf{x}}_k(0) = [0; 0; 0; 0], t \in [0, 30], \boldsymbol{\eta}(t) = \begin{bmatrix} 5\cos(2t) \\ \sin(t) \end{bmatrix},$$

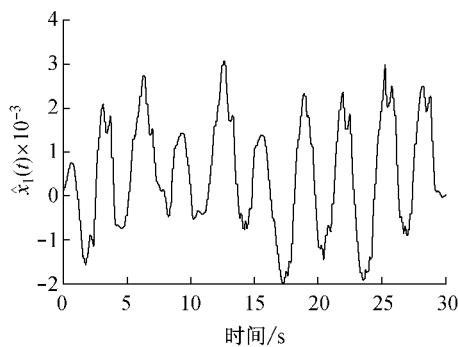
由定理 1 的条件①可选取 $\mathbf{F} = [-0.500, 0.045; 0, -0.200]$, 将 \mathbf{F} 代入式(7)并将 \mathbf{D} 型学习律和定理 1 的条件②应用到经过极点配置的观测器方程(6)中, 经过 2 000 次的迭代运算可得到如下的仿真结果. 其中系统状态的估计效果由如图 1 给出, 限于篇幅, 在此只给出了状态 $x_1(t)$ 的估计效果及其估计误差.

为了重构未知输入, 必须知道原系统有限时间内的输出微分, 首先需要通过二阶高增益滑模观测器估计系统的输出微分, 图 2 分别给出了 \dot{y}_1 和 \dot{y}_2 的

估计误差.



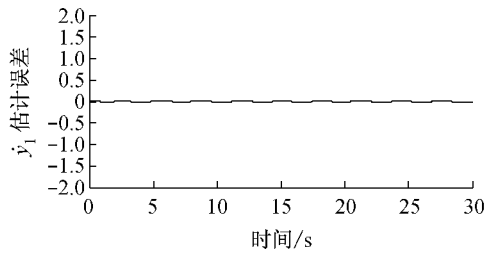
a 状态 $\hat{x}_1(t)$ 对 $x_1(t)$ 的跟踪



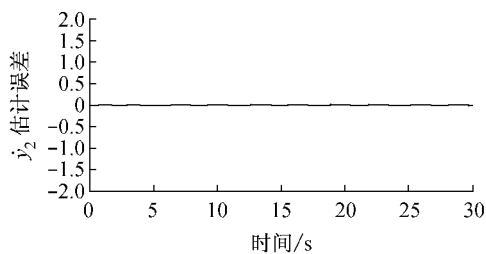
b 状态 $x_1(t)$ 的估计误差

图 1 状态 $x_1(t)$ 的估计与估计误差

Fig.1 State estimation of $x_1(t)$ and its estimated error



a \dot{y}_1 的估计误差

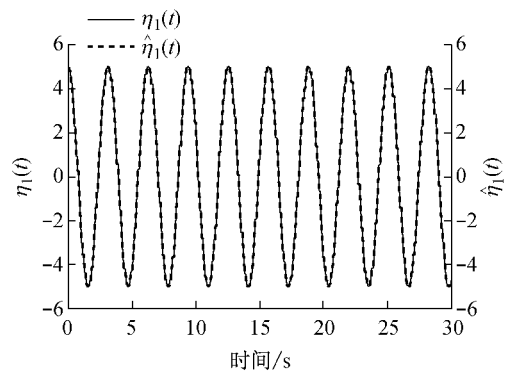


b \dot{y}_2 的估计误差

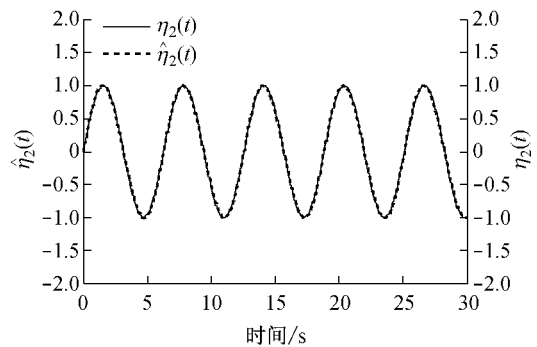
图 2 \dot{y}_1 和 \dot{y}_2 的估计误差

Fig.2 The estimated errors of \dot{y}_1 and \dot{y}_2

得到 $\dot{y} = [\dot{y}_1 \ \dot{y}_2]$ 的估计值 ζ , 根据式(13)可以得到未知输入的估计. 未知输入重构效果由图 3 给出.



a 未知输入 $\hat{\eta}_1(t)$ 对实际 $\eta_1(t)$ 的跟踪



b 未知输入 $\hat{\eta}_2(t)$ 对实际 $\eta_2(t)$ 的跟踪

图 3 未知输入重构

Fig.3 unknown input reconstruction

仿真实例表明, 结合 D 型迭代学习的未知输入 Luenberger 观测器能够很好地重构未知输入和估计系统的状态.

4 结论

针对具有未知输入的线性系统, 提出了一种迭代状态估计和迭代未知输入重构的方法, 首次将迭代学习控制的思想引入到未知输入观测器设计中, 提出了迭代未知输入重构的基本思想和方法. 该思想具有普遍的指导意义. 只要结合成熟的非线性系统观测器设计, 可以提出非线性系统迭代未知输入观测器设计的基本思想, 但针对非线性系统, 其迭代的收敛性是否被改变、如何证明是值得进一步仔细思考的问题.

参考文献:

[1] Boutayeb M, Darouach M, Rafaralaly H. Generalized state-space observers for chaotic synchronization and securecommunication [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49 (3): 345. (下转第 1266 页)