

双排管冻结稳态温度场广义解析解

胡向东^{1,2}, 韩延广^{1,2}, 虞兴福³

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092;

2. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 3. 浙江大学城市学院 工程学院, 浙江 杭州 310015)

摘要: 人工地层冻结法施工中, 对于双排的布管形式, 巴霍尔德金给出了双排管冻结稳态温度场解析解。但巴霍尔德金解析解只针对对齐和标准错位这两种情况, 不能完全满足现实的要求。针对工程中的不规则布管问题, 利用调和方程边界条件可分离性, 通过叠加单排冻结巴霍尔德金问题解和线性温度场问题解, 获得了特殊单排冻结问题的解析解; 借鉴特殊单排温度场问题, 完成布管形式复杂的双排管冻结温度场问题的广义解析解, 并利用 ANSYS 数值模拟和物理模型实验结果验证了解析解的正确性。

关键词: 人工地层冻结; 温度场; 单排管; 双排管; 解析解; 调和方程

中图分类号: TK124

文献标志码: A

Generalized Analytical Solution to Steady-state Temperature Field of Double-row-pipe Freezing

HU Xiangdong^{1,2}, HAN Yangguang^{1,2}, YU Xingfu³

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. School of Engineering, Zhejiang University City College, Hangzhou 310015, China)

Abstract: For the double-row arrangement of freezing pipes in artificial ground freezing, Bakholdin gave an analytical solution to the steady-state temperature field. However, the solution only aimed at the inline and general staggered arrangements, which could not meet practical requirements. For irregular arrangements of freezing pipes in engineering practice, in this paper, a generalized analytical solution to the steady-state temperature field of double-row-pipe freezing was proposed. First, based on the separability of boundary conditions for harmonic equations, a special single-row-pipe freezing problem was solved by superposition of the Bakholdin's single-row-pipe solution and the linear temperature field solution. Then, the generalized analytical

solution to the steady-state temperature field was derived for double-row-pipe freezing in irregular arrangements according to the special single-row-pipe solution. Comparison of the analytical solution with the numerical thermal analysis shows that the analytical solution is precise enough, and the experimental results of physical model indicates that the analytical solution meets the accuracy requirement in engineering.

Key words: artificial ground freezing; temperature field; single-row-pipe freezing; double-row-pipe freezing; analytical solution; harmonic equations

人工地层冻结技术, 由于其冻土帷幕的良好封水效果和力学强度, 因此广泛应用于地下工程施工中。在施工过程中, 掌握冻土帷幕的厚度和力学性质等参数是非常重要的, 而这些参数均依赖于冻结温度场的分布。因此, 温度场理论是冻结法理论的基础。

温度场理论研究分为瞬态温度场和稳态温度场, 由于数学上的困难, 多管冻结的瞬态温度场解析解难以获得, 不能满足工程中多管、排管和圈管等复杂的布管形式的要求; 而稳态温度场相对简单且能够满足工程上的精度要求, 因此是各国学者研究的重点内容。目前, 世界上最流行和实用的人工冻结稳态温度场解析解有单管冻结温度场公式^[1], 两管至五管直线排列冻结温度场公式^[2], 单排管冻结温度场公式以及双排管冻结温度场公式^[3-4]等。笔者对这些公式进行了完善与应用性研究^[5-9], 并完成了绝热边界附近单管和双管^[10]、任意排列的三管^[11]和四管^[12]、冻结管温度不等时的双管^[13]、单排管^[14]、冻结管温度相等时的三排管^[15]、冻土帷幕厚度非对称发展的单排管^[16]和内部冻实的单圈管冻结温度场解析解^[17]的推导。

单排和双排直线布置是冻结法中最常见的冻结管布置方式. 对此,巴霍尔金给出了单排和双排管冻结稳态温度场解析解^[3],其中双排管解析解解决了等管距的两排管对齐和错位二分之一管间距(以下简称标准错位)这两种布管方式的问题. 但双排管冻结时,对齐方式不止对齐和标准错位这两种情况,两排管错位量可能是任意的;另外,两排管的管间距有可能不一致. 而这些布管形式特殊的问题尚无解析解. 本文通过引入特殊的单排管冻结温度场问题,并结合调和方程边界可分离性^[18],完成了适应特殊布管方式的双排管冻结温度场的广义解析解.

1 特殊的单排管冻结温度场

为了求解广义双排管冻结问题,引入特殊的单排管冻结温度场,其冻土帷幕非均匀对称发展. 这种温度场问题如图1所示.

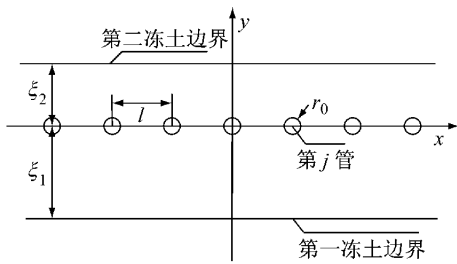


图1 特殊的单排管冻结温度场模型

Fig.1 Model of special single-row-pipe freezing

此温度场的数学模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \\ T(jl, -\xi_1) = T_0, \text{第一冻土边界} \\ T(jl, \xi_2) = T_0, \text{第二冻土边界} \\ T(jl, r_0) = T_f, \text{冻结管处} \end{cases} \quad (1)$$

式中: l 为冻结管管间距; ξ_1 和 ξ_2 均为冻土帷幕厚度; r_0 为冻结管半径; T_0 为冻土帷幕边界温度; T_f 为冻结管表面温度; T 表示温度场的分布. 笔者已在文献^[16]中给出了上述问题的解.

$T =$

$$T_A \left(A - \frac{\pi}{l} \frac{2\xi_1\xi_2}{\xi_1 + \xi_2} + \frac{\pi}{l} \frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_2 + \xi_1} y \right) + T_0 \quad (2)$$

$$A = \frac{1}{2} \ln \left[2 \left(\cosh \frac{2\pi y}{l} - \cos \frac{2\pi x}{l} \right) \right]$$

$$T_A = \frac{T_f - T_0}{\ln \frac{2\pi r_0}{l} - \frac{2\pi}{l} \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1 + \xi_2}}$$

对于式(2),当 $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ 时,即两侧冻土帷幕对

称发展,其将退化为经典单排管冻结巴霍尔金解^[3].

2 双排管冻结温度场广义解析解

本文考虑的冻结管布管形式为第一排冻结管间距与第二排冻结管间距不一致并且第二排冻结管相对于第一排冻结管有偏移量 w ;在冻土帷幕充分交圈后,即冻结后期,冻土帷幕边界近似为直线边界,则双排管冻结广义问题如图2所示. 其中, L 为冻结管排间距. 这里需要说明,第一排冻结管间距 l_1 和第二排冻结管间距 l_2 是相互独立的,即 l_1 可以大于 l_2 ,也可以小于 l_2 ,并不相互制约. 另外,冻土帷幕厚度 ξ_1 和 ξ_2 也是相互独立的. 图2表示的冻结问题应理解为双排管冻结的普遍问题,而不是仅指图中所示的一种模型.

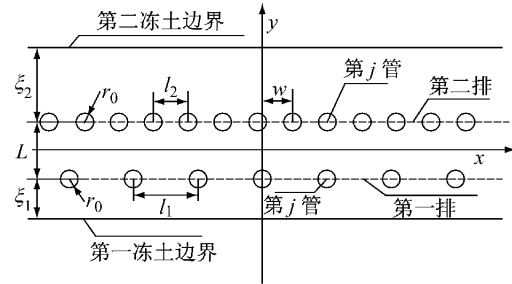


图2 广义双排管冻结温度场模型

Fig.2 Model of generalized double-row-pipe freezing

其温度场数学模型为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \\ T(x, -(\xi_1 + L/2)) = T_0, \text{第一冻土边界} \\ T(x, \xi_2 + L/2) = T_0, \text{第二冻土边界} \\ T(jl_1, -L/2 + r_0) = T_f, \text{第一排冻结管} \\ T(w + jl_2, L/2 + r_0) = T_f, \text{第二排冻结管} \end{cases} \quad (3)$$

根据边界条件可分离性^[18],将上述问题分解为第一排和第二排冻结管温度场问题. 即

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} = 0 \\ T_1(x, -(\xi_1 + L/2)) = T_0, \text{第一冻土边界} \\ T_1(x, \xi_2 + L/2) = T_0, \text{第二冻土边界} \\ T_1(jl_1, -L/2 + r_0) = T_f - T_{f1}, \text{第一排管} \\ T_1(w + jl_2, L/2 + r_0) = T_{f2}, \text{第二排管} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} = 0 \\ T_2(x, -(\xi_1 + L/2)) = 0, \text{第一冻土边界} \\ T_2(x, \xi_2 + L/2) = 0, \text{第二冻土边界} \\ T_2(jl_1, -L/2 + r_0) = T_{f1}, \text{第一排管} \\ T_2(w + jl_2, L/2 + r_0) = T_f - T_{f2}, \text{第二排管} \end{cases} \quad (5)$$

其中, T_{f1} 和 T_{f2} 为参数. 设想式(4)表示的温度场问题是一种特殊的单排管冻结问题, 则先考虑满足第一和第二冻土边界条件及第一排冻结管条件的温度场通解为

$$T_1 = T_0 + T_{A1} \left[A_1 - \frac{2\pi}{l_1} \frac{\xi_1(\xi_2 + L)}{\xi_1 + \xi_2 + L} + \frac{\pi}{l_1} \frac{\xi_1 - \xi_2 - L}{\xi_2 + L + \xi_1} \left(y + \frac{L}{2} \right) \right] \quad (6)$$

$$T_{A1} = \frac{T_f - T_{f1} - T_0}{\ln \frac{2\pi r_0}{l_1} - \frac{\pi}{l_1} \frac{2\xi_1(\xi_2 + L)}{\xi_1 + \xi_2 + L}}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \ln \left[2 \left(\cosh \frac{2\pi(y + L/2)}{l_1} - \cos \frac{2\pi x}{l_1} \right) \right]$$

由于 T_{f2} 为常数, 则问题(4)的解必须满足在 $y = L/2 + r_0$ 的值为常数 T_{f2} , 而与 x 值无关, 这是个先决条件.

对于式(6), 由于只有 A_1 这部分与 x 有关, 将 $(w + jl_2, L/2 + r_0)$ 代入 A_1 , 可以得到

$$A_1 = \frac{1}{2} \ln \left[2 \left(\cosh \frac{2\pi(L + r_0)}{l_1} - \cos \frac{2\pi(w + jl_2)}{l_1} \right) \right]$$

在一般的工程实际中冻结管间距与排间距 l_1/L 为 0.5~1.0, 则

$$\cosh \frac{2\pi(L + r_0)}{l_1} \gg \cos \frac{2\pi(w + jl_2)}{l_1}$$

所以在 $y = L/2 + r_0$, A_1 的值与 x 值无关, 则式(6)的值在 $y = L/2 + r_0$ 也与 x 值无关, 因此式(6)满足问题(4)的第二排冻结管处条件的先决要求, 因此将第二排冻结管处条件带入式(6)得到

$$T_{f2} = -T_{A1} \frac{\pi}{l_1} \frac{2\xi_1\xi_2}{\xi_2 + L + \xi_1} \quad (7)$$

同理, 对于式(5)表示的温度场问题, 先考虑满足第一和第二冻土边界条件及第二排冻结管处条件的温度场通解

$$T_2 = T_{A2} \left[A_2 - \frac{2\pi}{l_2} \frac{\xi_2(\xi_1 + L)}{\xi_1 + \xi_2 + L} + \frac{\pi}{l_2} \frac{\xi_1 - \xi_2 + L}{\xi_2 + L + \xi_1} \left(y - \frac{L}{2} \right) \right] \quad (8)$$

$$T_{A2} = \frac{T_f - T_{f2}}{\ln \frac{2\pi r_0}{l_2} - \frac{\pi}{l_2} \frac{2\xi_2(\xi_1 + L)}{\xi_1 + \xi_2 + L}}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \ln \left[2 \left(\cosh \frac{2\pi(y - L/2)}{l_2} - \cos \frac{2\pi(x - w)}{l_2} \right) \right]$$

同理 T_{f1} 需要满足

$$T_{f1} = -T_{A2} \frac{\pi}{l_2} \frac{2\xi_1\xi_2}{\xi_2 + L + \xi_1} \quad (9)$$

联立求解式(7)和(9)得

$$T_{f1} = \frac{MN + N}{MN - 1} (T_f - T_0)$$

$$T_{f2} = \frac{MN + M}{MN - 1} (T_f - T_0)$$

$$M = \frac{\frac{\pi}{l_1} \frac{2\xi_1\xi_2}{\xi_1 + L + \xi_2}}{\ln \frac{2\pi r_0}{l_1} - \frac{\pi}{l_1} \frac{2\xi_1(\xi_2 + L)}{\xi_1 + \xi_2 + L}}$$

$$N = \frac{\frac{\pi}{l_2} \frac{2\xi_1\xi_2}{\xi_1 + L + \xi_2}}{\ln \frac{2\pi r_0}{l_2} - \frac{\pi}{l_2} \frac{2\xi_2(\xi_1 + L)}{\xi_1 + \xi_2 + L}}$$

经整理后得双排管冻结广义解析解

$$T = T_1 + T_2 =$$

$$(T_f - T_0) \frac{MN + M}{1 - MN} \frac{l_1}{\pi} \frac{\xi_2 + L + \xi_1}{2\xi_1\xi_2} \cdot \left(A_1 - \frac{2\pi}{l_1} \frac{\xi_1(\xi_2 + L)}{\xi_1 + \xi_2 + L} + \frac{\pi}{l_1} \frac{\xi_1 - \xi_2 - L}{\xi_2 + L + \xi_1} \left(y + \frac{L}{2} \right) \right) +$$

$$(T_f - T_0) \frac{MN + N}{1 - MN} \frac{l_2}{\pi} \frac{\xi_2 + L + \xi_1}{2\xi_1\xi_2} \cdot \left(A_2 - \frac{2\pi}{l_2} \frac{\xi_2(\xi_1 + L)}{\xi_1 + \xi_2 + L} + \frac{\pi}{l_2} \frac{\xi_1 - \xi_2 + L}{\xi_2 + L + \xi_1} \left(y - \frac{L}{2} \right) \right) + T_0 \quad (10)$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \ln \left[2 \left(\cosh \frac{2\pi(y + L/2)}{l_1} - \cos \frac{2\pi x}{l_1} \right) \right]$$

$$A_2 =$$

$$\frac{1}{2} \ln \left[2 \left(\cosh \frac{2\pi(y - L/2)}{l_2} - \cos \frac{2\pi(x - w)}{l_2} \right) \right]$$

当考虑 $\xi_1 = \xi_2 = \xi$; $l_1 = l_2 = l$ 时, 则式(10)简化为

$$T = \frac{T_f - T_0}{\ln \frac{2\pi r_0}{l} - \frac{2\pi\xi}{l}} \left(m_2(x, y) - \frac{\pi}{l} (2\xi + L) \right) + T_0 \quad (11)$$

$$m_2(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left\{ 4 \left[\cosh \frac{2\pi(y + L/2)}{l} - \cos \frac{2\pi x}{l} \right] \cdot \right.$$

$$\left. \left[\cosh \frac{2\pi(y - L/2)}{l} - \cos \frac{2\pi(x - w)}{l} \right] \right\}$$

对于式(11), 当 $w=0$ 时, 即为双排管对齐排列的巴霍尔金解; 当 $w=l/2$ 时, 即为双排管标准错位排列的巴霍尔金解^[3].

3 解析解准确性检验

3.1 与稳态温度场数值模拟的对比

上述推导过程中采用了一定的简化处理, 故有必要对解的准确性进行验证, 因此采用 ANSYS 进行稳态数值模拟. 参数选择采用工程上常用的数值. 工程上排间距 L 的取值范围为 1.0~1.6 m, 而冻结管间距 l/L 通常为 0.5~1.0, 另外冻土帷幕厚度 ξ/l

的取值为 $0.5 \sim 1.5$ 。冻结管半径 $r_0 = 0.054 \text{ m}$; 冻结管表面温度 $T_f = -30^\circ\text{C}$; 冻土边界温度 $T_0 = 0^\circ\text{C}$ 。数值模拟参数见表1及图3。数值模拟模型及计算结果见图4。数值解与解析解对比结果见图5。 ξ_1, ξ_2 分别为与第一排冻结管和第二排冻结管相应的冻土帷幕厚度; l_1 为第一排冻结管的间距, l_2 为第二排冻结管的间距; L 为第一排冻结管与第二排冻结管的排间距, w 为第二排冻结管的偏移量,参见图2。

表1 数值模拟参数

Tab.1 Simulation parameters m						
组号	ξ_1	ξ_2	l_1	l_2	w	L
1	1.00	1.00	1.00	1.00	0	1.00
2	0.80	1.00	1.00	0.50	0	1.00
3	0.80	1.00	1.00	0.50	0.25	1.00
4	1.60	1.20	0.80	1.60	0	1.60

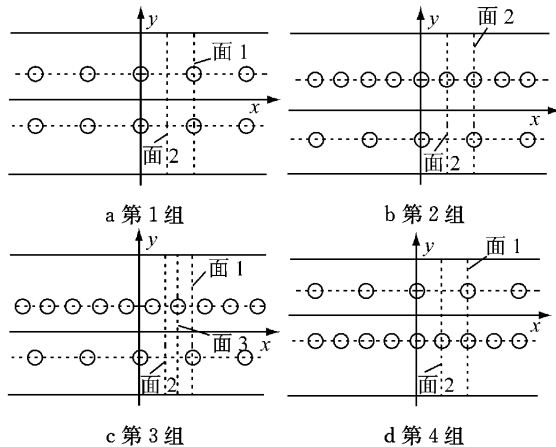


图3 形象化的布管形式

Fig.3 Visualization of freezing pipe arrangement

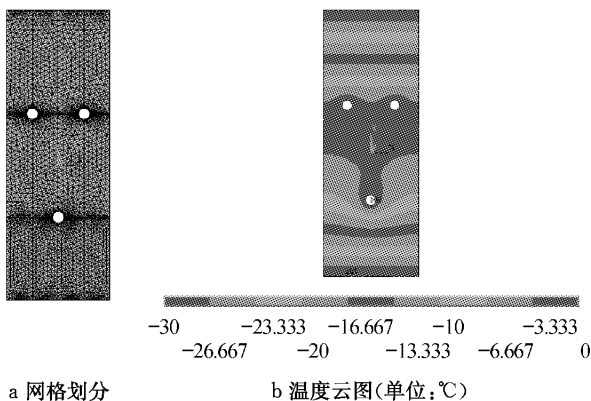
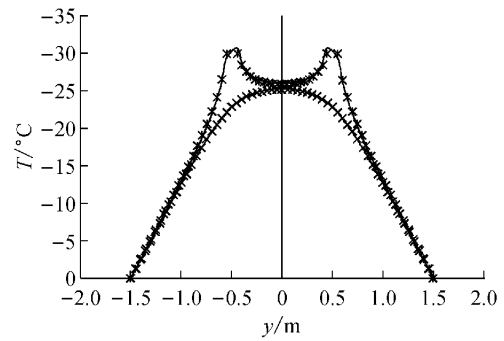


图4 第3组网格划分及温度云图

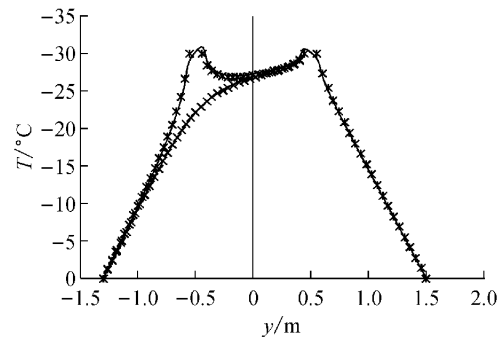
Fig.4 Meshing figure and temperature field color map of Group 3

从上述4组数值模拟和解析解的结果对比知道,在工程常用的参数情况下,解析公式具有较高精度,仅在冻结管处出现 1°C 左右的误差。



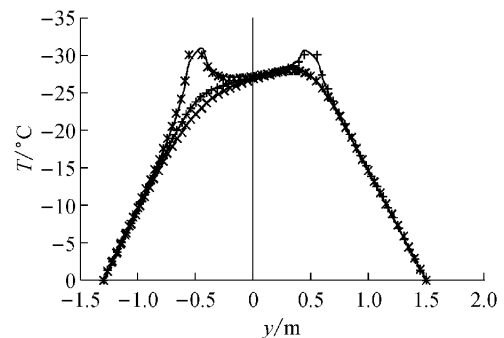
* 面1数值解 — 面1解析解 * 面2数值解 — 面2解析解

a 第1组

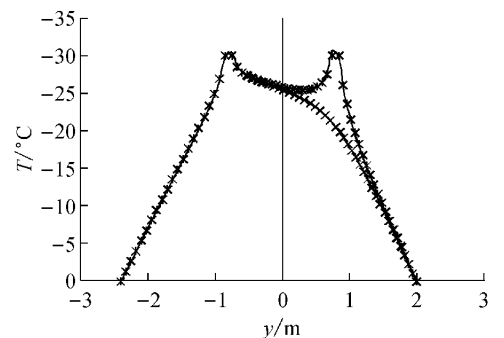


* 面1数值解 — 面1解析解 * 面2数值解 — 面2解析解

b 第2组

* 面1数值解 — 面1解析解 * 面2数值解 — 面2解析解
+ 面3数值解 — 面3解析解

c 第3组



* 面1数值解 — 面1解析解 * 面2数值解 — 面2解析解

d 第4组

图5 解析解计算结果与数值计算结果对比
Fig.5 Comparison of analytical and numerical solutions

3.2 与物理模型试验温度数据对比

由于采用双排广义布管形式的冻结工程较少,缺乏系统的温度监测数据,因此笔者采用双圈管冻结的物理模型试验温度监测数据与理论公式的计算结果进行对比,这能从一定程度上说明理论公式的实用性。

采用文献[19]的物理模型试验数据进行对比。其双圈管布置形式及温度测点如图 6 所示。

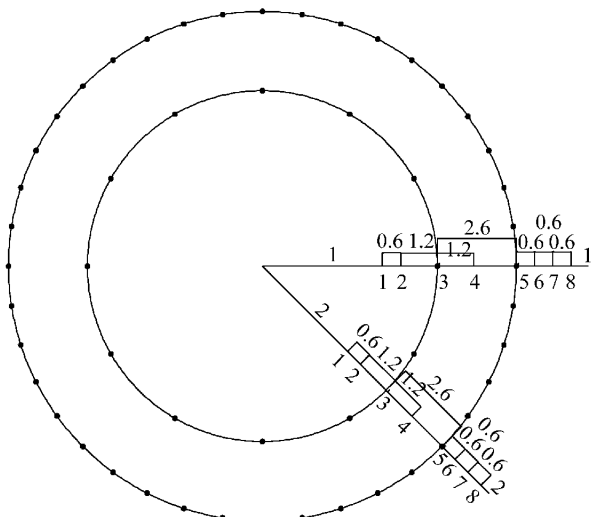


图 6 冻结管及温度测点的分布(单位:m)

Fig.6 Distribution of freezing pipe and measuring points (unit: m)

本文将内圈管当做第二排冻结管,外圈管当做第一排冻结管,考虑的冻结温度曲线由 5~25 h(实际对应时间 30~150 d,根据相似比将试验时间换算为实际时间,后同)的 5 条,而不考虑后续的 30~40 h(180~240 d)的 3 条冻结曲线,因为前 5 条冻结曲线的冻结管管壁温度是一样的。另外根据几何相似比,可以将试验参数换算为实际参数,其具体布管形式及相应的参数如表 2 所示。

表 2 冻结管布置参数

Tab.2 Layout parameters of freezing pipes

参数	l_1/m	l_2/m	L/m	r_0/m	$T_i/^\circ\text{C}$	$T_0/^\circ\text{C}$
数值	1.31	3	2.6	0.072	-12	0

考虑到理论公式的使用条件,即冻结中后期,则选择 25 h(150 d)的冻结温度分布曲线,考虑内圈管与外圈管之间的中间位置作为直角坐标的原点,极径方向作为 y 轴,向圆中心点的方向作为正方向,并考虑横坐标 x 的取值永远为 0,经量测可知 1-1 剖面的 1 至 8 个测点温度及位置如表 3 所示。

根据测点 1,3,5,7 的实测温度和坐标值,依据式(10)可以测算出冻土帷幕 ξ_1 为 2.12 m,冻土帷幕

ξ_2 为 3.45 m,这与圈管冻结时,冻结圈内的冻土帷幕厚度大于圈外的冻土帷幕厚度是一致的。自此理论公式需要的冻结管间距、冻结管排距、冻结管半径、冻结管壁温度及冻土帷幕厚度均已知,可以根据理论公式对已知测点的温度进行计算,其计算结果列于表 3。

表 3 1-1 剖面的 8 个测点温度及位置

Tab.3 Temperature and position of eight measuring points in Section 1-1

测点	位置 y/m	实测温度 $^\circ\text{C}$	理论温度 $^\circ\text{C}$	绝对误差 $^\circ\text{C}$	相对误差 $\%$
1	3.10	-4.70	-4.72	0.02	0
2	2.50	-6.40	-6.50	0.10	1.5
3	1.37	-12.00	-11.90	0.10	0.8
4	0.10	-9.60	-10.30	0.70	6.8
5	-1.37	-12.00	-11.80	0.20	1.7
6	-1.90	-7.20	-7.80	0.60	8.3
7	-2.50	-4.70	-4.70	0.00	0
8	-3.10	-2.00	-1.70	0.30	15.0

考虑剖面 2-2,坐标系选取原理与 1-1 剖面一致,则可知 2-2 剖面的 1 至 8 个测点位置与 1-1 剖面的一样,另外剖面 2-2 与剖面 1-1 的冻结参数的唯一区别在于第二排冻结管相对于第一排冻结管的偏移量 w 为 $l_2/2$,其余的理论公式需要的计算参数可直接使用 1-1 剖面的冻结参数。则 2-2 剖面的 8 个测点实测温度和理论计算温度如表 4 所示。

表 4 2-2 剖面的 8 个测点温度及位置

Tab.4 Temperature and position of eight measuring points in Section 2-2

测点	位置 y/m	实测温度 $^\circ\text{C}$	理论温度 $^\circ\text{C}$	绝对误差 $^\circ\text{C}$	相对误差 $\%$
1	3.10	-5.00	-4.65	0.35	7.0
2	2.50	-6.40	-6.30	0.10	1.5
3	1.37	-8.90	-8.86	0.04	0.4
4	0.10	-9.60	-10.16	0.56	5.8
5	-1.37	-12.00	-11.80	0.02	0.2
6	-1.90	-6.80	-7.80	1.00	14.7
7	-2.50	-4.00	-4.70	0.70	17.5
8	-3.10	-2.00	-1.70	0.30	15.0

通过 1-1 剖面与 2-2 剖面的实测温度与理论温度的对比可以看出,两者的绝对误差都不超过 1°C ,理论公式的精度满足工程上的误差要求,另外也说明利用理论公式估算冻土帷幕厚度精度较高。

4 结论

(1) 以特殊的单排管冻结温度场解析解为基础,将双排管冻结广义问题分解为两个特殊的单排

管冻结温度场问题,由此完成了双排广义解析解公式.但公式必须在工程中常用的参数下使用(冻结中后期,且 l/L 为 $0.5 \sim 1.0$)使用.

(2) 分别采用数值模拟和物理模型试验数据对解析解的正确性进行了对比检验,解析解与数值解几乎完全吻合,与物理模型试验实测数据吻合程度也很高.表明了解析解的正确性.

参考文献:

- [1] Трупаков Н. Г. Замораживание горных пород при проходке стволов[M]. Москва: Углетехиздат, 1954.
- [2] 戸部暢, 秋元攻. 凍土内温度分布計算式と,その応用[J]. 冷凍, 1979, 54(622):3.
- [3] Бахолдин Б. В. Выбор оптимального режима замораживания грунтов в строительных целях[M]. Москва: Госстройиздат, 1963.
- [4] Sanger F J. Ground freezing in construction[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1968, 94 (SM1): 131.
- [5] HU Xiangdong. Average temperature model of double-row-pipe frozen soil wall by equivalent trapezoid method [C] // AIP Conference Proceedings. New York: AIP Publishing, 2010: 1333-1338.
- [6] 胡向东, 黄峰, 白楠. 考虑土层冻结温度时人工冻结温度场模型[J]. 中国矿业大学学报:自然科学版, 2008, 37(4): 550.
HU Xiangdong, HUANG Feng, BAI Nan. Models of artificial frozen temperature field considering soil freezing point[J]. Journal of China University of Mining & Technology: Natural Science, 2008, 37(4): 550.
- [7] HU Xiangdong, SHE Siyuan, YU Ruizhi. Average temperature calculation for straight single-row-piped frozen soil wall[J]. Sciences in Cold and Arid Regions, 2011, 3(2): 124.
- [8] 杨波, 丁文其, 胡向东, 等. 单排管冻土帷幕平均温度控制参数敏感性分析[J]. 地下空间与工程学报, 2012, 8(6): 1208.
YANG Bo, DING Wenqi, HU Xiangdong, *et al.* Sensitivity analysis of control parameters for average temperature of single-row-pipe frozen soil wall [J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2012, 8(6): 1208.
- [9] 胡向东, 赵飞, 余思源, 等. 直线双排管冻结壁平均温度的等效抛物弓形模型[J]. 煤炭学报, 2012, 37(1): 28.
HU Xiangdong, ZHAO Fei, SHE Siyuan, *et al.* Equivalent parabolic arch method of average temperature calculation for straight double-row-pipe frozen soil wall[J]. Journal of China Coal Society, 2012, 37(1): 28.
- [10] HU Xiangdong, ZHANG Luoyu. Analytical solution to steady-state temperature field of one and two freezing pipes near linear adiabatic boundary [C] // 2013 Fourth International Conference on Digital Manufacturing & Automation. Qingdao: IEEE CPS, 2013:257-260.
- [11] 胡向东, 郭旺, 张洛瑜. 无限大区域内少量冻结管稳态温度场解析解[J]. 煤炭学报, 2013, 38(11):1953.
HU Xiangdong, GUO Wang, ZHANG Luoyu. Analytical solution of steady state temperature field of a few freezing pipes in infinite region[J]. Journal of China Coal Society, 2013, 38(11):195.
- [12] 胡向东, 郭旺, 张洛瑜. 无限大区域内四管冻结稳态温度场解析解[J]. 上海交通大学学报, 2013, 47(9):1367.
HU Xiangdong, GUO Wang, ZHANG Luoyu. Analytical solution of steady state temperature field of four freezing pipes in an infinite region [J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2013, 47(9):1367.
- [13] HU Xiangdong, ZHANG Luoyu. Analytical solution to steady-state temperature field of two freezing pipes with different temperatures[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University: Science, 2013, 18(6): 706.
- [14] HU Xiangdong, ZHANG Luoyu, HAN Yanguang. An analytical solution to temperature distribution of single-row-piped freezing with different pipe surface temperatures[J]. Applied Mechanics and Materials, 2013(353/354/355/356): 478.
- [15] 胡向东, 汪洋. 三排管冻结温度场的势函数叠加法解析解[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(5): 1071.
HU Xiangdong, WANG Yang. Analytical solution of three-row-piped frozen temperature field by means of superposition of potential [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 31(5): 1071.
- [16] HU Xiangdong, HAN Yanguang. Analytical solution to steady-state temperature field of asymmetric frozen soil wall by single-row-pipe freezing [C] // 2013 International Conference on Materials, Architecture and Engineering Technology. Pennsylvania:Destech Publications Inc,2013: 636-641.
- [17] 胡向东, 陈锦, 汪洋, 等. 环形单圈管冻结稳态温度场解析解[J]. 岩土力学, 2013, 34(3):874.
HU Xiangdong, CHEN Jin, WANG Yang, *et al.* Analytical solution to steady-state temperature field of single-circle-pipe freezing[J]. Chinese Journal of Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(3):874.
- [18] 陈恕行, 秦铁虎, 周忆. 数学物理方程[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2003.
CHEN Shuxing, QIN Tiehu, ZHOU Yi. Mathematical physics equation[M]. Shanghai: Fudan University Press, 2003.
- [19] 汪仁和, 徐士良. 冻结壁温度场模型试验及其导热系数反分析[J]. 安徽理工大学学报:自然科学版, 2003,23(4):18.
WANG Renhe, XU Shiliang. Modeling test of temperature field of freezing wall and inverse heat conduction problem [J]. Journal of Anhui University of Science and Technology: Natural Science, 2003, 23(4):18.