第 42 卷第 9 期
2014 年 9 月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 42 No. 9
Sep. 2014

文章编号：0253-374X(2014)09-1421-05　　DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2014.09.019

基于 LMI 的 H_∞ 未知输入观测器设计

郭胜辉[1,2]，朱芳来[1]

(1. 同济大学 电子与信息工程学院，上海 201804；2. 苏州科技学院 电子与信息工程学院，江苏 苏州 215011)

摘要：针对同时具有未知输入和量测噪声的离散 Lipschitz 非线性系统，采用扩展状态向量的方法将量测噪声向量当作系统状态，从而将系统化为形式上不含量测噪声的广义离散非线性系统. 通过设计广义系统 H_∞ 未知输入观测器，同时估计出原系统状态和量测噪声. 为了降低设计的保守性，将观测器设计转化为线性矩阵不等式(LMI)求解问题，给出观测器设计算法，并基于延迟估计的思想提出一种未知输入代数重构方法. 仿真结果表明：提出的方法可以使状态估计、量测噪声及未知输入的重构信号逼近实际信号，证明了该方法的有效性和正确性.

关键词：离散非线性系统；H_∞ 观测器；线性矩阵不等式(LMI)；量测噪声重构；未知输入重构

中图分类号：TP273　　**文献标志码**：A

H_∞ Unknown Input Observer Design Based on LMI

GUO Shenghui[1,2], *ZHU Fanglai*[1]

(1. College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. College of Electronics and Information Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

Abstract: The original discrete-time Lipschitz nonlinear system with measurement noise and unknown input is transformed into an augmented descriptor system without measurement noise by taking measurement noise vector as an extended state vector. An H_∞ unknown input observer which can estimate the state and the measurement noise of original system is developed, and the existence of the observer depends on the solution of the feasible solutions of linear matrix inequality (LMI). Then, an algebraic unknown input reconstruction method is proposed based on the delay estimation approach. The result of a simulation example is given to illustrate the effectiveness and correctness of the proposed method.

Key words: discrete-time nonlinear system; H_∞ observer; linear matrix inequality (LMI); measurement noises reconstruction; unknown input reconstruction

现代控制理论中，输入未知情况下的系统状态观测器设计具有重要意义，得到了广泛的关注[1]. 针对未知输入观测器的研究可以追溯到 20 世纪 70 年代，早期的研究主要侧重于避开未知输入的影响进行状态估计[2-3]，之后状态和未知输入同时估计的观测器得到了研究[4-7]. 近来，含有未知输入和量测噪声的系统又成为关注的热点[8-11]. 对于含有量测噪声的系统，文献[8]借助广义系统的比例积分(PI)观测器来解耦量测噪声，从而获得系统状态的估计. 文献[9]通过设计一种在线自适应增益的高增益观测器来解决具有量测噪声系统的状态估计问题.

目前的文献中所用的方法通常需要较为严格的限制条件，限制了方法的适用性，因此在保证未知输入和量测噪声重构效果满意的前提下降低设计的限制具有重大意义. Darouach 等[12-13]和 Chadli 等[14]针对广义系统研究了 H_∞ 观测器的设计，将其转化为线性矩阵不等式(LMI)求解问题，降低了设计的保守性.

本文针对同时含有未知输入和量测噪声的离散非线性系统，通过引入扩展向量，将系统转化为不含量测噪声的广义系统形式，而后对之进行 H_∞ 未知输入观测器设计，并转化为 LMI 求解问题，最后给出未知输入代数重构方法.

1　未知输入观测器设计

考虑具有未知输入和量测噪声的离散非线性系统，如下所示：

收稿日期：2013-12-06
基金项目：国家自然科学基金(61074009)；教育部高等学校博士学科点专项科研基金(20110072110015)；广西制造系统与先进制造技术重点实验室基金(PF110289)；上海市重点学科项目(B004)
第一作者：郭胜辉(1983—)，男，博士生，主要研究方向为观测器、故障检测与重构等. E-mail：12gsh@tongji.edu.cn
通讯作者：朱芳来(1965—)，男，教授，博士生导师，工学博士，主要研究方向为观测器、故障检测等. E-mail：zhufanglai@tongji.edu.cn

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(x(k),\boldsymbol{u}(k))+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{F}\boldsymbol{\omega}(k)\end{cases}\tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{x}(k)\in\mathbf{R}^n$ 为系统状态,$\boldsymbol{u}(k)\in\mathbf{R}^m$ 为控制输入,$\boldsymbol{\eta}(k)\in\mathbf{R}^q$ 为未知输入,$\boldsymbol{y}(k)\in\mathbf{R}^p$ 为系统输出,$\boldsymbol{\omega}(k)\in\mathbf{R}^w$为系统量测噪声;系数矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times s}$,$\boldsymbol{D}\in\mathbf{R}^{n\times q}$,$\boldsymbol{C}\in\mathbf{R}^{p\times n}$,$\boldsymbol{F}\in\mathbf{R}^{p\times w}$均为已知;$\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m\rightarrow\mathbf{R}^s$ 为向量函数. 不失一般性,假设矩阵 $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 均为列满秩,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为行满秩,且有 $p\geqslant q+w$.

假设1 向量函数 $\boldsymbol{f}$ 对于 $\boldsymbol{x}(k)$满足 Lipschitz 条件,即存在 Lipschitz 常数 σ,对于$\forall\boldsymbol{x}_1(k),\boldsymbol{x}_2(k)\in\mathbf{R}^n$,$\forall\boldsymbol{u}(k)\in\mathbf{R}^m$,有

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1(k),\boldsymbol{u}(k))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2(k),\boldsymbol{u}(k))\|\leqslant\sigma\|\boldsymbol{x}_1(k)-\boldsymbol{x}_2(k)\|\tag{2}$$

假设2 未知输入 $\boldsymbol{\eta}(k)$和量测噪声 $\boldsymbol{\omega}(k)$均有界,并有 $\|\boldsymbol{\eta}(k)\|\leqslant\rho$,其中 $\rho>0$ 是任意常数.

引入扩展向量$\bar{\boldsymbol{x}}(k)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)\quad\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{n+w}$,相应地,$\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{I}_n\quad\boldsymbol{0}_{n\times w}]$,$\bar{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{0}_{n\times w}]$,$\bar{\boldsymbol{C}}=[\boldsymbol{C}\quad\boldsymbol{F}]$,则系统(1)可以写为广义系统形式

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{x}}(k+1)=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{x}}(k),\\ \quad\boldsymbol{u}(k))+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}(k)\\ \boldsymbol{y}(k)=\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(k)\end{cases}\tag{3}$$

引理1 存在矩阵 $\boldsymbol{G}\in\mathbf{R}^{(n+w)\times n}$和 $\boldsymbol{H}\in\mathbf{R}^{(n+w)\times p}$,使得$[\boldsymbol{G}\quad\boldsymbol{H}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\-\bar{\boldsymbol{C}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}_{n+w}$,即

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{I}_{n+w}+\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{C}}\tag{4}$$

证明 由于矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为列满秩,则 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\-\bar{\boldsymbol{C}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{F}\end{bmatrix}$为列满秩,故$(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}$存在,于是有$\boldsymbol{X}^{+}=(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$. 由$[\boldsymbol{G}\quad\boldsymbol{H}]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}_{n+w}$易知$[\boldsymbol{G}\quad\boldsymbol{H}]$的通解为

$$[\boldsymbol{G}\quad\boldsymbol{H}]=\boldsymbol{X}^{+}-\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}_{n+p}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+})$$

式中:$\boldsymbol{Z}\in\mathbf{R}^{(n+w)\times(n+p)}$为任意矩阵. 可以看出,对任意满足条件的矩阵 $\boldsymbol{Z}$,

$$\boldsymbol{G}=[\boldsymbol{G}\quad\boldsymbol{H}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n\\\boldsymbol{0}_{p\times n}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{X}^{+}-\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}_{n+p}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+})]\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_n\\\boldsymbol{0}_{p\times n}\end{bmatrix}\tag{5}$$

和

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{G}\quad\boldsymbol{H}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times p}\\\boldsymbol{I}_p\end{bmatrix}=[\boldsymbol{X}^{+}-\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{I}_{n+p}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+})]\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times p}\\\boldsymbol{I}_p\end{bmatrix}\tag{6}$$

是式(4)的解.

1.1 H_∞未知输入观测器设计

设计 H_∞未知输入观测器为

$$\begin{cases}\boldsymbol{z}(k+1)=\boldsymbol{N}\boldsymbol{z}(k)+\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}(k),\boldsymbol{u}(k))\\ \hat{\bar{\boldsymbol{x}}}(k)=\boldsymbol{z}(k)-\boldsymbol{H}\boldsymbol{y}(k)\end{cases}\tag{7}$$

式中:$\boldsymbol{z}(k)\in\mathbf{R}^{n+w}$为观测器状态,$\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}(k)\in\mathbf{R}^{n+w}$为扩展状态向量的估计,系数矩阵 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 为具有适当维数的矩阵. 本小节的主要设计目的是:寻找适当的矩阵 $\boldsymbol{N}$,$\boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 使得系统(7)是广义系统(3)在一定意义下的观测器.

若定义观测器误差 $\boldsymbol{e}(k)=\bar{\boldsymbol{x}}(k)-\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}(k)$,注意到式(4)可得

$$\boldsymbol{e}(k)=\bar{\boldsymbol{x}}(k)-\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}(k)=\bar{\boldsymbol{x}}(k)-\boldsymbol{z}(k)+\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(k)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{x}}(k)-\boldsymbol{z}(k)\tag{8}$$

由式(3),(7)和(8)可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(k+1)&=\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{x}}(k+1)-\boldsymbol{z}(k+1)=\\&\boldsymbol{G}[\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{x}}(k),\boldsymbol{u}(k))+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}(k)]-\\&[\boldsymbol{N}\boldsymbol{z}(k)+\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}(k)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}(k),\boldsymbol{u}(k))]=\\&\boldsymbol{N}[\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{x}}(k)-\boldsymbol{z}(k)]-\boldsymbol{N}\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{x}}(k)-\\&\boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{x}}(k)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{f}(k)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}(k)=\\&\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}(k)+(\boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{C}})\bar{\boldsymbol{x}}(k)+\\&\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{f}(k)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}(k)\end{aligned}\tag{9}$$

式中:$\Delta\boldsymbol{f}(k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}\bar{\boldsymbol{x}}(k),\boldsymbol{u}(k))-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{E}\hat{\bar{\boldsymbol{x}}}(k),\boldsymbol{u}(k))$,由式(2)有 $\|\Delta\boldsymbol{f}(k)\|\leqslant\sigma\|\boldsymbol{e}(k)\|$. 若 $\boldsymbol{N}\in\mathbf{R}^{(n+w)\times(n+w)}$和 $\boldsymbol{L}\in\mathbf{R}^{(n+w)\times p}$可以满足

$$\boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{G}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{L}\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{0}\tag{10}$$

则式(9)转化为

$$\boldsymbol{e}(k+1)=\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}(k)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{f}(k)+\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\eta}(k)\tag{11}$$

将式(4)代入式(10)得到

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{A}}-(\boldsymbol{N}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{L})\bar{\boldsymbol{C}}\tag{12}$$

引理2 对任意矩阵 $\boldsymbol{K}\in\mathbf{R}^{(n+w)\times p}$,如下所确定的 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{G}\bar{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{C}}\tag{13}$$

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{K}-\boldsymbol{N}\boldsymbol{H}\tag{14}$$

满足式(10)或式(12).

证明 直接代入验证即可.

由上面的讨论可知,对任意满足条件的矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{K}$,由式(5),(6),(13)和(14)所确定的 $\boldsymbol{G}$,$\boldsymbol{H}$,$\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 可以使观测器误差方程具有式(11)的形式. 如下要考虑的问题是:如何选取满足条件的矩阵 $\boldsymbol{Z}$(可以考虑选择特别的 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{0}$)和 $\boldsymbol{K}$ 使得系统(7)是在

$$\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{e}(k)=\boldsymbol{0}, & \boldsymbol{\eta}(k)=\boldsymbol{0}\\ \sup\dfrac{\|\boldsymbol{e}(k)\|}{\|\boldsymbol{\eta}(k)\|}\leqslant\gamma, & \boldsymbol{\eta}(k)\neq\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{15}$$

意义下的观测器，即 H_∞ 观测器. 其中，$\gamma>0$ 为一足够小的常数. 记

$$\boldsymbol{\Sigma}_0=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{I}+\lambda\sigma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{PG}\bar{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{C}})^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0} & -\lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\gamma^2\boldsymbol{I} & (\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{PG}\bar{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{C}} & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{GB}) & \boldsymbol{P}(\boldsymbol{GD}) & -\boldsymbol{P}\end{bmatrix}$$

其中 $\lambda\geqslant0$ 为一常数，则有如下结论：

定理 1　设如下的 LMI：

$$\boldsymbol{\Sigma}_0<\boldsymbol{0}\tag{16}$$

针对正定矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^{(n+w)\times(n+w)}$ 和矩阵 $\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^{(n+w)\times p}$ 具有可行解，这时只要取 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}$，则系统(7)是式(15)意义下的 H_∞ 观测器.

证明　取 Lyapunov 函数 $V(k)=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Pe}(k)$，$\boldsymbol{P}>0$，则 $V(k+1)=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{Pe}(k+1)$，有

$$\begin{aligned}\Delta V={}&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k+1)\boldsymbol{Pe}(k+1)-\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Pe}(k)=\\&(\boldsymbol{Ne}(k)+\boldsymbol{GB}\Delta\boldsymbol{f}(k)+\boldsymbol{GD\eta}(k))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Ne}(k)+\\&\boldsymbol{GB}\Delta\boldsymbol{f}(k)+\boldsymbol{GD\eta}(k))-\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{Pe}(k)=\\&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PNe}+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGB}\Delta\boldsymbol{f}+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGD\eta}+\\&\Delta\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PNe}+\Delta\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGB}\Delta\boldsymbol{f}+\\&\Delta\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGD\eta}+\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PNe}+\\&\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGB}\Delta\boldsymbol{f}+\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGD\eta}-\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Pe}\leqslant\\&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PNe}+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGB}\Delta\boldsymbol{f}+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGD\eta}+\\&\Delta\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PNe}+\Delta\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGB}\Delta\boldsymbol{f}+\\&\Delta\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGD\eta}+\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PNe}+\\&\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGB}\Delta\boldsymbol{f}+\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGD\eta}-\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Pe}+\\&\lambda\sigma^2\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-\lambda\Delta\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{f}\end{aligned}$$

于是有

$$\Delta V+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-\gamma^2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}\leqslant[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\quad\Delta\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{\Sigma}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\\Delta\boldsymbol{f}\\\boldsymbol{\eta}\end{bmatrix}\tag{17}$$

其中，

$$\boldsymbol{\Sigma}_1=\begin{bmatrix}(1,1)_1 & (2,1)_1^{\mathrm{T}} & (3,1)_1^{\mathrm{T}}\\(2,1)_1 & (2,2)_1 & (3,2)_1^{\mathrm{T}}\\(3,1)_1 & (3,2)_1 & (3,3)_1\end{bmatrix}$$

$(1,1)_1=\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PN}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{I}+\lambda\sigma^2\boldsymbol{I}$

$(2,1)_1=(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PN}$

$(2,2)_1=-\lambda\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGB}$

$(3,1)_1=(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PN}$

$(3,2)_1=(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGB}$

$(3,3)_1=-\gamma^2\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PGD}$

若式(16)成立，根据负定矩阵的定义，可知对任意非零向量 $\boldsymbol{\theta}\in\boldsymbol{R}^{2\times(n+w)+s+q}$，必有 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{\theta}<0$ 成立. 特别地，取

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\\boldsymbol{N} & \boldsymbol{GB} & \boldsymbol{GD}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\\Delta\boldsymbol{f}\\\boldsymbol{\eta}\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{\theta}<0$，即为

$$[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\quad\Delta\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{\Sigma}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}\\\Delta\boldsymbol{f}\\\boldsymbol{\eta}\end{bmatrix}<0\tag{18}$$

其中，

$$\boldsymbol{\Sigma}_2=\begin{bmatrix}(1,1)_2 & (2,1)_2^{\mathrm{T}} & (3,1)_2^{\mathrm{T}}\\(2,1)_2 & (2,2)_2 & (3,2)_2^{\mathrm{T}}\\(3,1)_2 & (3,2)_2 & (3,3)_2\end{bmatrix}$$

$(1,1)_2=-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{I}+\lambda\sigma^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PG}\bar{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{C}})+((\boldsymbol{PG}\bar{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{C}})^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{N}$

$(2,1)_2=(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PG}\bar{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{C}})$

$(2,2)_2=-\lambda\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{GB})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{GB})$

$(3,1)_2=(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{PG}\bar{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{M}\bar{\boldsymbol{C}})$

$(3,2)_2=(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{GB})$

$(3,3)_2=-\gamma^2\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{GD})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{GD})$

将 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{PK}$ 代入式(18)，再考虑到式(13)，则有 $\boldsymbol{\Sigma}_2=\boldsymbol{\Sigma}_1$，故 $\boldsymbol{\Sigma}_0<\boldsymbol{0}$，即说明 $\boldsymbol{\Sigma}_1<\boldsymbol{0}$，结合式(17)得到

$$\Delta V+\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}-\gamma^2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}<0$$

或

$$\Delta V<\gamma^2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}$$

也即有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta V(k)<\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\eta}(k)-\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{e}(k)$$

即

$$V(\infty)-V(0)<\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\eta}(k)-\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{e}(k)$$

初始条件为 0 的前提下，易得 $V(\infty)-V(0)\geqslant0$，故有 $\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{\eta}(k)-\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}(k)\boldsymbol{e}(k)>0$，即有 $\|\boldsymbol{e}(k)\|<\gamma\|\boldsymbol{\eta}(k)\|$.

1.2　观测器系数矩阵求解算法

在假设 1 和 2 下，观测器(即矩阵 $\boldsymbol{G},\boldsymbol{H},\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{L}$)的求解算法步骤可以总结如下：

步骤 1　由式(5)和(6)分别求解矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{H}$.

步骤 2　给出 γ 和 λ，求解 LMI 式(16)的可行解正定矩阵 $\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^{(n+w)\times(n+w)}$ 和矩阵 $\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^{(n+w)\times p}$，如果存在则进行下一步骤，不存在则停止计算.

步骤 3　计算系数矩阵 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{M}$，代入式(13)和(14)求解系数矩阵 $\boldsymbol{N}$ 和 $\boldsymbol{L}$.

参数 γ 和 λ 的选择不是任意的，过大、过小都可

能导致LMI无可行解,下面的仿真例子中采用求取最优解的方法来解决.

2 未知输入代数重构

当重构条件不匹配时,Floquet等[15]针对含有未知输入的离散系统提出了一种延迟估计.本小节在一定的假设下,利用延迟输出,提出了一种未知输入代数重构方法.

假设3 $\mathrm{rank}(\bar{C}GD)=\mathrm{rank}(D)=q$.

定理2 在假设1~3前提下,

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}(k)=(\bar{C}GD)^{+}[(I+\bar{C}H)y(k+1)-\bar{C}G\bar{A}\hat{\bar{x}}(k)-\bar{C}GBf(E\hat{\bar{x}}(k),u(k))]$$

是未知输入$\boldsymbol{\eta}(k)$的延迟渐进估计.

证明 由式(3)有

$$GE\bar{x}(k+1)=G\bar{A}\bar{x}(k)+GBf(E\bar{x}(k),u(k))+GD\boldsymbol{\eta}(k)$$

或

$$\bar{x}(k+1)=G\bar{A}\bar{x}(k)+GBf(E\bar{x}(k),u(k))+GD\boldsymbol{\eta}(k)-Hy(k+1)$$

进而有

$$GD\boldsymbol{\eta}(k)=\bar{x}(k+1)-G\bar{A}\bar{x}(k)-GBf(E\bar{x}(k),u(k))+Hy(k+1)$$

两边同时左乘$\bar{C}$,有

$$\bar{C}GD\boldsymbol{\eta}(k)=\bar{C}\bar{x}(k+1)-\bar{C}G\bar{A}\bar{x}(k)-\bar{C}GBf(E\bar{x}(k),u(k))+\bar{C}Hy(k+1)=(I+\bar{C}H)y(k+1)-\bar{C}G\bar{A}\bar{x}(k)-\bar{C}GBf(E\bar{x}(k),u(k))$$

由假设3可知,$\bar{C}GD$为列满秩,则$(\bar{C}GD)^{\mathrm{T}}(\bar{C}GD)$为非奇异,则有

$$\boldsymbol{\eta}(k)=(\bar{C}GD)^{+}[(I+\bar{C}H)y(k+1)-\bar{C}G\bar{A}\bar{x}(k)-\bar{C}GBf(E\bar{x}(k),u(k))]$$

此处,$(\bar{C}GD)^{+}=[(\bar{C}GD)^{\mathrm{T}}(\bar{C}GD)]^{-1}(\bar{C}GD)^{\mathrm{T}}$.

若令$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k)=\boldsymbol{\eta}(k)-\hat{\boldsymbol{\eta}}(k)$,则

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k)=-(\bar{C}GD)^{+}[\bar{C}G\bar{A}e(k)+\bar{C}GB\Delta f(k)]$$

当$\boldsymbol{\eta}(k)=\mathbf{0}$时,$\lim\limits_{k\to\infty}e(k)=\mathbf{0}$,又$\|\Delta f(k)\|\leqslant\sigma\|e(k)\|$,则有$\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k)=\mathbf{0}$;当$\boldsymbol{\eta}(k)\neq\mathbf{0}$时,有$\sup\dfrac{\|e(k)\|}{\|\boldsymbol{\eta}(k)\|}\leqslant\gamma$,又$\|\Delta f(k)\|\leqslant\sigma\|e(k)\|\leqslant\sigma\gamma\|\boldsymbol{\eta}(k)\|\leqslant\sigma\gamma\rho$,则适当调整参数$\gamma$可使$\lim\limits_{k\to\infty}\tilde{\boldsymbol{\eta}}(k)$收敛到可接受的范围内.

3 仿真

为了说明本文所提方法的有效性,进行了仿真.考虑非线性离散系统(1),其各个系数矩阵如下:

$$A=\begin{bmatrix}0.53&0.45&0.69\\0.56&0.52&0.56\\0.35&-0.71&-0.36\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1\\-0.5\\0\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}0.006\\-0.008\\0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}1\\1.3\end{bmatrix}$$

未知输入$\boldsymbol{\eta}(k)=0.5\sin(0.1k)$,非线性项$f(k)=0.5\sin(x_1(k))$,量测噪声$\boldsymbol{\omega}(k)=0.2\sin(20k+\xi)$,其中$\xi$是均值为0、方差为1的高斯随机数.

为便于计算,选择$Z=\mathbf{0}$,可以计算出

$$G=\begin{bmatrix}0.6859&0.2416&0\\0.2416&0.8141&0\\0&0&1\\-0.3717&-0.4833&0\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}-0.3141&0.2416\\0.2416&-0.1859\\0&0\\-0.3717&-0.4833\end{bmatrix}$$

利用Matlab求LMI式(16)的最优解,得到$\lambda=3$,$\gamma=0.02$.

$$P=10^{8}\times\begin{bmatrix}2.8164&1.3669&1.9612&0.4740\\1.3669&1.1031&0.5632&1.5910\\1.9612&0.5632&4.3685&-0.8729\\0.4740&1.5910&-0.8729&4.2926\end{bmatrix}$$

$$M=10^{8}\times\begin{bmatrix}0.9118&-0.1769\\0.2591&-0.0443\\2.5387&-1.8427\\-0.4143&0.0991\end{bmatrix}$$

于是根据$K=P^{-1}M$计算出

$$K=\begin{bmatrix}-0.0885&0.2631\\-0.1220&0.3248\\0.6549&-0.6328\\0.0916&-0.2550\end{bmatrix}$$

将K代入式(13)和(14),求得

$$N=\begin{bmatrix}0.5873&0.1712&0.6086&-0.2535\\0.7060&0.2073&0.6226&-0.3003\\-0.3049&-0.0772&-0.3600&0.1677\\-0.5593&-0.1636&-0.5271&0.2399\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}-0.0396&0.0305\\-0.0619&0.0476\\0.6401&-0.4924\\0.0447&-0.0344\end{bmatrix}$$

系统状态误差见图 1,未知输入及量测噪声重构见图 2. 由图可以看出,所选的参数已经可以使重构的未知输入信号非常接近实际未知输入信号.

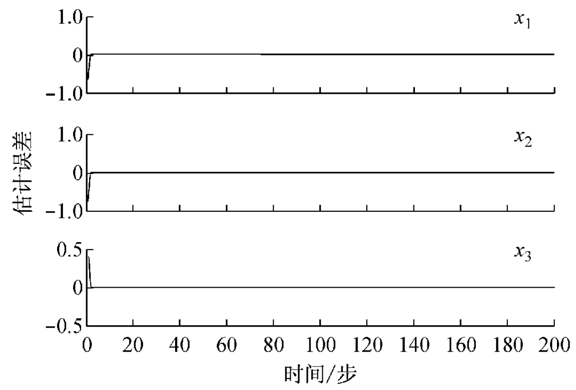

图 1　系统状态估计误差

Fig. 1　Estimation errors of system states

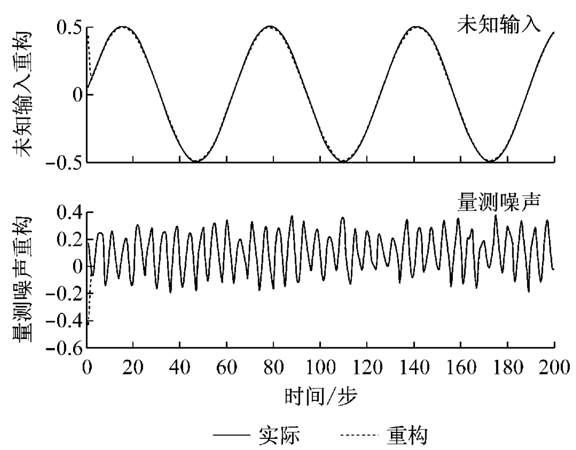

图 2　未知输入及量测噪声重构

Fig. 2　Unknown input and measurement noise reconstruction

4　结语

针对具有未知输入和量测噪声的离散非线性系统,通过引入扩展向量的方法将系统转化为形式上不含量测噪声的广义系统,然后对广义系统进行 H_∞ 未知输入观测器设计,给出了 H_∞ 未知输入观测器的形式及参数算法步骤,同时提出一种未知输入代数重构方法.

参考文献:

[1] 韩冬,朱芳来. 基于辅助输出的线性系统状态和未知输入同时估计方法[J]. 自动化学报,2012,38(6):932.
Han D, Zhu F L. Simultaneous estimation of states and unknown inputs for linear systems based on auxiliary outputs [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(6): 932.

[2] Hostetter G, Meditch J S. Observing systems with unmeasurable inputs [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1973, 18(3): 307.

[3] Luenberger D G. Observers for multivariable systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1966, 11(2): 190.

[4] Darouach M, Zasadzinski M, Xu S J. Full-order observer for linear systems with unknown inputs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, 39(3): 606.

[5] Darouach M. Complements to full order observer design for linear systems with unknown inputs[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(7): 1107.

[6] Chen M S, Chen C C. Unknown input observer for linear non-minimum phase systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2010, 347: 577.

[7] Zhu F L. State estimation and unknown input reconstruction via both reduced-order and high-order sliding mode observers [J]. Journal of Process Control, 2012, 22: 296.

[8] Gao Z W, Wang H. Descriptor observer approaches for multivariable systems with measurement noises and application in fault detection and diagnosis[J]. Systems & Control Letters, 2006, 55:304.

[9] Sanfelices R G, Praly L. On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise[J]. *Automatica*, 2011, 47:2165.

[10] Yang J Q, Zhu F L, Sun X J. State estimation and simultaneous unknown input and measurement noise reconstruction based on associated observers [J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2012, doi: 10.1002/acs.2360

[11] 杨俊起,朱芳来. 状态估计与未知输入和量测噪声同时重构之方法研究[J]. 控制与决策,2013,28(8):1145.
Yang J Q, Zhu F L. The study of the state estimation and simultaneous unknown input and measurement noise reconstruction[J]. Control and Decision, 2013, 28(8):1145.

[12] Darouach M, Boutat-Baddas L, Zerrougui M. H_∞ observers design for a class of nonlinear singular systems [J]. *Automatica*, 2011, 47:2517.

[13] Darouach M, Boutat-Baddas L, Zerrougui M. H_∞ filter design for a class of nonlinear discrete-time singular systems [J]. International Journal of Control, 2013, 86(9):1597.

[14] Chadli M, Abdo A, Ding S X. H_-/H_∞ fault detection filter design for discrete-time Takagi-Sugeno fuzzy system [J]. *Automatica*, 2013, 49:1996.

[15] Floquet T, Barbot J P. State and unknown input estimation for linear discrete-time systems [J]. *Automatica*, 2006, 42: 1883.