第 43 卷第 6 期
2015 年 6 月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 43 No. 6
Jun. 2015

文章编号: 0253-374X(2015)06-0932-06　　DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2015.06.020

Hilbert C*-模上的广义 g-框架的扰动

侯恩冉, 方小春
(同济大学 应用数学系,上海 200092)

摘要: 主要研究了 Hilbert C*-模上的广义 g-框架在扰动条件下的稳定性,即一族元素与给定的广义 g-框架满足什么条件时能构成广义 g-框架.类似于 Hilbert 空间中的情形,具体给出了 3 类不同的扰动条件,并用算子理论的方法和技巧证明了广义 g-框架在这 3 类扰动下的不变性结论.最后讨论了 Hilbert C*-模上的广义对偶 g-框架的稳定性的结果.

关键词: Hilbert C*-模; 广义 g-框架; 广义 g-框架算子; 扰动

中图分类号: O177.1　　**文献标志码**: A

Perturbations of Generalized g-frame in Hilbert C*-modules

HOU Enran, FANG Xiaochun
(Department of Applied Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The stability of the Hilbert C* -modular generalized g-frames under some perturbations was studied to see whether the family will become a generalized g-frame under some perturbations related to the fixed frame. Similar to the Hilbert space, three different situations and respective conclusions were proposed, which were proved by using operator-theoretic-methods. Besides, the stability of the generalized dual g-frame was discussed.

Key words: Hilbert C* - module; generalized g - frame; generalized g-frame operators; perturbation

Hilbert 空间上的框架是 1952 年由 Duffin 和 Schaeffer[1]首次提出,但当时并没有引起人们的注意,直到 1986 年,Daubechies 等[2]发现使用框架理论可以将 $L^2(R)$中的函数展开成类似于标准正交基展开的级数的形式.20 多年来,关于框架的研究文献数以千计,涌现出许多重要的成果.框架理论已经被广泛地应用到许多领域,诸如滤波器理论、无线电通讯、信号和图像的处理等其他领域. Hilbert C*-模上的框架,尤其是 g-框架的概念和性质可参考文献[3-5]. Hilbert C*-模是 Hilbert 空间的推广,与 Hilbert 空间中内积取值是复数不同,它的内积的取值是某个 C*-代数中的元素. Hilbert C*-模和 Hilbert 空间还有很多的不同,在文献[6]中都有详细介绍.

框架的稳定性一直都是框架研究的重要的方面. Favier 等[7]具体讨论了 Banach 空间和 Hilbert 空间中的框架的稳定性;Christensen 在文献[8]中给出了判定框架在扰动下稳定的基本定理;孙文昌[9]研究了 Hilbert 空间中 g-框架在扰动下的稳定性;肖向春等[10]在 Hilbert C*-模上得到了相应的关于 g-框架的稳定性的结果;2010 年,付焕坤等在文献[11]中探讨了 Hilbert W*-模上的标准广义框架在某些扰动下的稳定性;2011 年,靳世华等[12]提出了 Hilbert C*-模上的广义 g-框架的概念,并详细给出了这种框架的基本性质.本文利用算子理论的方法研究了这种框架在某些扰动下的稳定性.

1 基础知识

首先给出 Hilbert C*-模的定义,可参考文献[6].

假设 A 是一个 C*-代数,一个左准 Hilbert A-模就是一个与 A 的结构满足相容性的线性空间 U 按 A-值内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle: U\times U\rightarrow A$ 构成一个代数左 A 模,这个 A-值内积满足对于 $\forall f,g,h\in U, a\in A$,有 $\langle f,f\rangle\geqslant 0$, $\langle f,f\rangle=0$ 当且仅当 $f=0$, $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle^*$, $\langle af+g,h\rangle=a\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle$.如果 U 关于内积诱导的范数 $\|f\|=\|\langle f,f\rangle\|^{\frac{1}{2}}$是完备的,称 U 是一个 Hilbert A-模.假设 U,K 是两个 Hilbert A-模,如果映射 $T:U\rightarrow K$,都存在 $T^*: K\rightarrow U$,使得任意的

收稿日期: 2014-04-25
基金项目: 国家自然科学基金(11371279).
第一作者: 侯恩冉(1985—),男,博士生,主要研究方向为算子代数及其应用. E-mail: houenran@163.com.

$f\in U,g\in K$,都有$\langle Tf,g\rangle=\langle f,T^*g\rangle$,称 T 是可伴算子.令 $L(U,K)$表示所有从 U 到 K 的可伴算子的全体,所有可伴算子都是有界的并且都是 A-线性的.$L(U,U)$简记为 $L(U)$.

引理 1[6]　U 是一个 Hilbert A-模,$\forall f,g\in U$,都有:$\langle f,g\rangle\langle g,f\rangle\leqslant\|\langle f,f\rangle\|\langle g,g\rangle$.

引理 2　U 是一个 Hilbert A-模,$\forall f,g\in U$,都有:$\langle f\pm g,f\pm g\rangle\leqslant 2(\langle f,f\rangle+\langle g,g\rangle)$.

引理 3[13]　U,K 是两个 Hilbert A-模,$T\in L(U,K)$,则下列条件等价:

(1) T 是满射.

(2) 存在 $m>0$,使得对于所有的 $f\in U$,都有$\|T^*f\|\geqslant m\|f\|$.

(3) 存在 $m'>0$,使得对于所有的 $f\in U$,都有$\langle T^*f,T^*f\rangle\geqslant m'\langle f,f\rangle$.

假设 A 是作用在 Hilbert 空间 H 上的 von Neumann 代数,(M,S,μ)是一个可测空间,$a_m\in A(m\in M)$,若存在 $a\in A$ 使得对于任意的 $x,y\in H$,有 $\int_M\langle a_mx,y\rangle d\mu(m)=\langle ax,y\rangle$,称 a_m 在 A 中可积,记作 $\int_M a_m d\mu(m)=a$.类似地,假设 $f_m\in U(m\in M)$,若存在 $f\in U$ 使得任意的 $g\in U$,都有 $\int_M\langle f_m,g\rangle d\mu(m)=\langle f,g\rangle$,称 f_m 在 U 中可积,记作 $\int_M f_m d\mu(m)=f$.

引理 4[14]　A 是作用在 Hilbert 空间 H 上的 von Neumann 代数,(M,S,μ)是一个可测空间,a_m,$a\in A$,$N\subset M$ 是可测的,则 $\int_N aa_m d\mu(m)=a\int_N a_m d\mu(m)$.如果$\mu(N)<\infty$,则$\int_N(a_m-a)d\mu(m)=\int_N a_m d\mu(m)-a\mu(N)$.

设 K 是一个 Hilbert A-模,$L^2(M,K)$表示所有 μ-可测算子 φ: $M\to K$,满足 $\|\varphi\|=\left\{\int_M\|\varphi(m)\|^2d\mu(m)\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty$ 并且对于任意的 $y\in K$,$\langle\varphi(m),y\rangle$ 可积.在 $L^2(M,K)$ 中定义内积:$\langle\varphi,\psi\rangle_{L^2(M,K)}=\int_M\langle\varphi(m),\psi(m)\rangle d\mu(m)$,$\forall\varphi,\psi\in L^2(M,K)$.

现在假定 A 表示含有单位元的 C*-代数,U,K 是两个有限或可数生成的 Hilbert A-模,(M,S,μ)是一个可测空间,$L(U,K)$表示所有从 U 到 K 的可伴可积算子的全体,$K_m(m\in M)$是 K 的闭子模.

定义 1[12]　$\forall m\in M,\Lambda_m\in L(U,K),\Lambda_mU\subset K_m$,如果存在常数 $C,D>0$ 满足对于任意的 $f\in U$,都有 $C\langle f,f\rangle\leqslant\int_M\langle\Lambda_mf,\Lambda_mf\rangle d\mu(m)\leqslant D\langle f,f\rangle$,则称$\{\Lambda_m:m\in M\}$是 U 关于$\{K_m:m\in M\}$的广义 g-框架.C,D 分别称为广义 g-框架下界和上界.如果$\{\Lambda_m:m\in M\}$仅满足右边不等式,称$\{\Lambda_m:m\in M\}$是广义的 g-Bessel 序列,D 是其上界.

若$\{\Lambda_m:m\in M\}$和$\{\Gamma_m:m\in M\}$都是 U 关于$\{K_m:m\in M\}$的广义 g-框架,如果存在一个可逆算子 $T\in L(U)$,使得对于任意的 $m\in M$ 都有 $\Gamma_m=\Lambda_mT$,称$\{\Lambda_m:m\in M\}$和$\{\Gamma_m:m\in M\}$是相似的,如果 T 是酉算子,称$\{\Lambda_m:m\in M\}$和$\{\Gamma_m:m\in M\}$是酉等价的.

引理 5[12]　$\{\Lambda_m:m\in M\}$是 U 关于$\{K_m:m\in M\}$的广义 g-框架,$T\in L(U)$是可逆的,则$\{\Lambda_mT:m\in M\}$也是 U 关于$\{K_m:m\in M\}$的广义 g-框架.

假设$\{\Lambda_m:m\in M\}$是 U 关于$\{K_m:m\in M\}$的广义 g-框架,其框架下界和上界分别是 C,D,对于任意的 $f\in U$,定义 $\overline{f}(m)=\Lambda_mf\in K_m$,容易验证 $\overline{f}\in L^2(M,K)$,则 $\|\overline{f}\|=\left\|\int_M\langle\Lambda_mf,\Lambda_mf\rangle d\mu(m)\right\|^{\frac{1}{2}}$.令 $T_\Lambda:U\to L^2(M,K)$,$T_\Lambda f=\overline{f}$,称 T_Λ 是$\{\Lambda_m:m\in M\}$的广义分析算子,其伴随算子是 $T_\Lambda^*\overline{g}=\int_M\Lambda_m^*\overline{g}(m)d\mu(m)$ ($\forall\overline{g}\in L^2(M,K)$).令 $S=T_\Lambda^*T_\Lambda$,则 $\forall f\in U$,都有 $Sf=\int_M\Lambda_m\Lambda_m^*fd\mu(m)$,$\langle Sf,f\rangle=\int_M\langle\Lambda_mf,\Lambda_mf\rangle\cdot d\mu(m)$.由广义 g-框架的定义可知 S 是可伴的算子,且 $CI\leqslant S\leqslant DI$,其中 I 是恒等算子,因而 S 是可逆的正算子,$C\leqslant\|S\|\leqslant D$,$\|T_\Lambda\|\leqslant\sqrt{D}$,$\|S^{-1}\|\leqslant 1/C$.称 S 是$\{\Lambda_m:m\in M\}$的广义 g-框架算子.由 S 的定义可知 $\forall f\in U$,$f=SS^{-1}f=\int_M\Lambda_m^*\Lambda_mS^{-1}f\cdot d\mu(m)$.

引理 6[12]　$\{\Lambda_m:m\in M\}$是 U 关于$\{K_m:m\in M\}$的广义 g-框架,C,D 分别是其框架下界和上界,则$\{\Lambda_mS^{-1}:m\in M\}$也是 U 关于$\{K_m:m\in M\}$的广义 g-框架,其框架下界和上界分别是 $1/D,1/C$.

令 $\overline{\Lambda}_m=\Lambda_mS^{-1}$,则$\{\overline{\Lambda}_m:m\in M\}$是 U 关于$\{K_m:m\in M\}$的广义 g-框架,称$\{\overline{\Lambda}_m:m\in M\}$是$\{\Lambda_m:m\in M\}$的广义典范对偶 g-框架,其框架下界和上界分别是 $1/D,1/C$.

引理 7[15]　X 是一个 Banach 空间,$T:X\to X$ 是个线性算子,如果存在常数 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1)$,使得对于任意的 $x\in X$,都有$\|x-Tx\|\leqslant\lambda_1\|x\|+\lambda_2\|Tx\|$,

则 T 是可逆的,且 $\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2}\|x\|\leqslant\|Tx\|\leqslant\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2}\|x\|$, $\frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_1}\|x\|\leqslant\|T^{-1}x\|\leqslant\frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_1}\|x\|$.

2 主要结果

下面将给出关于广义 g-框架在扰动条件下的稳定性定理

定理 1 $\{\Lambda_m: m\in M\}$ 是 U 关于 $\{K_m: m\in M\}$ 的广义 g-框架, $\{\Gamma_m: m\in M\}\subset L(U,K)$, 则下列条件等价:

(1) $\{\Gamma_m: m\in M\}$ 是 U 关于 $\{K_m: m\in M\}$ 的广义 g-框架.

(2) 存在常数 $\alpha>0$, 使得 $\forall f\in U$, 都有

$$\int_M\langle(\Lambda_m-\Gamma_m)f,(\Lambda_m-\Gamma_m)f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\leqslant \alpha\min\left\{\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m),\int_M\langle\Gamma_m f,\Gamma_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\right\}.$$

证明 (1) ⇒ (2). 假定 C_1,D_1 和 C_2,D_2 分别是广义 g-框架 $\{\Lambda_m: m\in M\}$ 和 $\{\Gamma_m: m\in M\}$ 的框架界, 由引理 2 可得, $\forall f\in U$,

$$\int_M\langle(\Lambda_m-\Gamma_m)f,(\Lambda_m-\Gamma_m)f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\leqslant 2\left(\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)+D_2\langle f,f\rangle\right)\leqslant 2\left(\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)+\frac{D_2}{C_1}\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\right)=2\left(1+\frac{D_2}{C_1}\right)\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m).$$

同理可得: $\int_M\langle(\Lambda_m-\Gamma_m)f,(\Lambda_m-\Gamma_m)f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\leqslant 2\left(1+\frac{D_1}{C_2}\right)\int_M\langle\Gamma_m f,\Gamma_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)$.

令 $\alpha=\min\left\{2\left(1+\frac{D_2}{C_1}\right),2\left(1+\frac{D_1}{C_2}\right)\right\}$, 则式(2)成立.

(2) ⇒ (1). 假设 $\{\Lambda_m: m\in M\}$ 的框架下界和上界分别是 C_1,D_1, 则 $\forall f\in U$, 有

$$C_1\langle f,f\rangle\leqslant\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)=\int_M\langle(\Lambda_m-\Gamma_m+\Gamma_m)f,(\Lambda_m-\Gamma_m+\Gamma_m)f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\leqslant 2\left(\int_M\langle(\Lambda_m-\Gamma_m)f,(\Lambda_m-\Gamma_m)f\rangle\mathrm{d}\mu(m)+\int_M\langle\Gamma_m f,\Gamma_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\right)\leqslant(2\alpha+1)\int_M\langle\Gamma_m f,\Gamma_m f\rangle d\mu(m),$$

$$\int_M\langle\Gamma_m f,\Gamma_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)=\int_M\langle(\Gamma_m-\Lambda_m+\Lambda_m)f,(\Gamma_m-\Lambda_m+\Lambda_m)f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\leqslant 2\left(\int_M\langle(\Gamma_m-\Lambda_m)f,(\Gamma_m-\Lambda_m)f\rangle\mathrm{d}\mu(m)+\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\right)\leqslant(2\alpha+1)\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\leqslant(2\alpha+1)D_1\langle f,f\rangle.$$

综上所述可得 $\frac{C_1}{(2\alpha+1)}\langle f,f\rangle\leqslant\int_M\langle\Gamma_m f,\Gamma_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\leqslant(2\alpha+1)D_1\langle f,f\rangle$. 所以 $\{\Gamma_m: m\in M\}$ 是 U 关于 $\{K_m: m\in M\}$ 的广义 g-框架.

定理 2 $\{\Lambda_m: m\in M\}$ 是 U 关于 $\{K_m: m\in M\}$ 的广义 g-框架, C,D 分别是其框架下界和上界, $\{\Gamma_m: m\in M\}\subset L(U,K)$, 若存在常数 $\lambda_1,\lambda_2,\gamma\geqslant 0$ 使得 $\max\left\{\lambda_1+\frac{\gamma}{\sqrt{C}},\lambda_2\right\}<1$ 且 $\forall f\in U$, 有 $\left\|\int_M(\Lambda_m^*-\Gamma_m^*)\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|\leqslant\lambda_1\left\|\int_M\Lambda_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|+\lambda_2\left\|\int_M\Gamma_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|+\gamma\left\|\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\right\|^{\frac{1}{2}}$, 则 $\{\Gamma_m: m\in M\}$ 也是 U 关于 $\{K_m: m\in M\}$ 的广义 g-框架, 且其框架下界和上界分别是

$$\left(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}{1+\lambda_2}\right)^2C,\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{D}}}{1-\lambda_2}\right)^2D.$$

证明 对于 $\forall f\in U$, 有

$$\left\|\int_M\Gamma_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|=\left\|\int_M(\Gamma_m^*-\Lambda_m^*)\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)+\int_M\Lambda_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|\leqslant\left\|\int_M(\Gamma_m^*-\Lambda_m^*)\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|+\left\|\int_M\Lambda_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|\leqslant\lambda_1\left\|\int_M\Lambda_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|+\lambda_2\left\|\int_M\Gamma_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|+\gamma\left\|\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\right\|^{\frac{1}{2}}+\left\|\int_M\Lambda_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|=(1+\lambda_1)\left\|\int_M\Lambda_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|+\lambda_2\left\|\int_M\Gamma_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|+\gamma\left\|\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\right\|^{\frac{1}{2}},$$

$$\left\|\int_M\Gamma_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|\leqslant$$

$$\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2}\left\|\int_M \Lambda_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|+$$
$$\frac{\gamma}{1-\lambda_2}\left\|\int_M\langle\Lambda_m f,\Lambda_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\right\|^{\frac{1}{2}}\qquad(1)$$

令 $Q:L^2(M,K)\to U,Q\bar{f}=\int_M\Gamma_m^*\bar{f}(m)\mathrm{d}\mu(m)$ ($\forall\bar{f}\in L^2(M,K),m\in M$)，显然 Q 的定义有意义，且其伴随算子是：$Q^*:U\to L^2(M,K),Q^*g=\bar{g}$，$\bar{g}(m)=\int_M\Gamma_m g\mathrm{d}\mu(m)$ ($\forall g\in U,m\in M$)．事实上

$$\langle g,Q\bar{f}\rangle_U=\langle g,\int_M\Gamma_m^*\bar{f}(m)d\mu(m)\rangle_U=$$
$$\int_M\langle g,\Gamma_m^*\bar{f}(m)\rangle_U\mathrm{d}\mu(m)=$$
$$\int_M\langle\bar{g}(m),\bar{f}(m)\rangle_K\mathrm{d}\mu(m)=$$
$$\langle\bar{g},\bar{f}\rangle_{L^2(M,K)}=\langle Q^*g,\bar{f}\rangle_{L^2(M,K)}.$$

令 $\bar{f}(m)=\Lambda_m f$ ($\forall f\in U,m\in M$)，由式(1)可得

$$\|Q\bar{f}\|\leqslant\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2}\|T_\Lambda^*\bar{f}\|+\frac{\gamma}{1-\lambda_2}\|\bar{f}\|\leqslant$$
$$\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2}\sqrt{D}\|\bar{f}\|+\frac{\gamma}{1-\lambda_2}\|\bar{f}\|\leqslant$$
$$\frac{(1+\lambda_1)\sqrt{D}+\gamma}{1-\lambda_2}\|\bar{f}\|$$

故 $\|Q\|\leqslant\dfrac{(1+\lambda_1)\sqrt{D}+\gamma}{1-\lambda_2}$.

$$\int_M\langle\Gamma_m f,\Gamma_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)=$$
$$\int_M\langle\bar{f}(m),\bar{f}(m)\rangle\mathrm{d}\mu(m)=\langle\bar{f},\bar{f}\rangle_{L^2(M,K)}=$$
$$\langle Q^*f,Q^*f\rangle_{L^2(M,K)}\leqslant$$
$$\|Q\|^2\langle f,f\rangle\leqslant\left(\frac{(1+\lambda_1)\sqrt{D}+\gamma}{1-\lambda_2}\right)^2\langle f,f\rangle=$$
$$\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{D}}}{1-\lambda_2}\right)^2 D\langle f,f\rangle.$$

假定 S 是 $\{\Lambda_m:m\in M\}$ 的广义 g-框架算子，则 $S=T_\Lambda^*T_\Lambda$ 是可逆的．令 $T^\dagger:U\to L^2(M,K)$，

$$(T^\dagger f)(m)=(T_\Lambda(T_\Lambda^*T_\Lambda)^{-1}f)(m)=$$
$$(T_\Lambda S^{-1}f)(m)=$$
$$\Lambda_m S^{-1}f\ (\forall f\in U,m\in M),$$
$$\langle T^\dagger f,T^\dagger f\rangle_{L^2(M,K)}=$$
$$\int_M\langle(T^\dagger f)(m),(T^\dagger f)(m)\rangle_K\mathrm{d}\mu(m)=$$
$$\int_M\langle\Lambda_m S^{-1}f,\Lambda_m S^{-1}f\rangle_K\mathrm{d}\mu(m)=$$
$$\int_M\langle\Lambda_m^*\Lambda_m S^{-1}f,S^{-1}f\rangle_U\mathrm{d}\mu(m)=$$
$$\left\langle\int_M\Lambda_m^*\Lambda_m S^{-1}f\mathrm{d}\mu(m),S^{-1}f\right\rangle_U=$$
$$\langle f,S^{-1}f\rangle\leqslant\|S^{-1}\|\langle f,f\rangle\leqslant\frac{1}{C}\langle f,f\rangle,$$

所以 $\|T^\dagger f\|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{C}}\|f\|$.

由已知可得：

$$\|f-QT^\dagger f\|\leqslant\lambda_1\|f\|+\lambda_2\|QT^\dagger f\|+$$
$$\gamma\|T^\dagger f\|\leqslant\left(\lambda_1+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}\right)\|f\|+\lambda_2\|QT^\dagger f\|.$$

由引理 7，$QT^\dagger$ 可逆且 $\|QT^\dagger\|\leqslant\dfrac{1+\lambda_1+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}{1-\lambda_2}$，$\|(QT^\dagger)^{-1}\|\leqslant\dfrac{1+\lambda_2}{1-\lambda_1-\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}$，$\forall f\in U$ 有，

$$\langle f,f\rangle\langle f,f\rangle^*\leqslant\frac{1}{C}\left(\frac{1+\lambda_2}{1-\lambda_1-\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}\right)^2\|f\|^2\langle Q^*f,Q^*f\rangle.$$

故 $C\left(1-\dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}{1+\lambda_2}\right)^2\|\langle f,f\rangle\|\leqslant\|\langle Q^*f,Q^*f\rangle\|$，

$$\|Q^*f\|\geqslant\sqrt{C}\left(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}{1+\lambda_2}\right)\|f\|.$$

由引理 3 可知 Q^* 是单射．令 $S_1=QQ^*$，容易验证 S_1 是可逆的正的算子，则

$$C\left(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}{1+\lambda_2}\right)^2\|\langle f,f\rangle\|\leqslant\|\langle Q^*f,Q^*f\rangle\|=$$
$$\|\langle QQ^*f,f\rangle\|=\|\langle S_1f,f\rangle\|=\|\langle S_1^{\frac{1}{2}}f,S_1^{\frac{1}{2}}f\rangle\|$$

则 $\sqrt{C}\left(1-\dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}{1+\lambda_2}\right)\|f\|\leqslant\|S_1^{\frac{1}{2}}f\|$，用 $S_1^{-\frac{1}{2}}f$ 代替 f 可得

$\|S_1^{-\frac{1}{2}}f\|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{C}}\left(1-\dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}{1+\lambda_2}\right)^{-1}\|f\|$，所以

$\|S_1^{-\frac{1}{2}}\|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{C}}\left(1-\dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}{1+\lambda_2}\right)^{-1}$，则 $\forall f\in U$，

$$\int_M\langle\Gamma_m f,\Gamma_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)=\langle Q^*f,Q^*f\rangle=$$
$$\langle S_1^{\frac{1}{2}}f,S_1^{\frac{1}{2}}f\rangle\geqslant\|S_1^{-\frac{1}{2}}\|^{-2}\langle f,f\rangle\geqslant$$
$$C\left(1-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}{1+\lambda_2}\right)^2\langle f,f\rangle.$$

综上所述，

$$\left[1-\frac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{C}}}{1+\lambda_2}\right]^2 C\langle f,f\rangle\leqslant\int_M\langle\Gamma_m f,$$

$$\Gamma_m f\rangle \mathrm{d}\mu(m)\leqslant\left[1+\frac{\lambda_1+\lambda_2+\frac{\gamma}{\sqrt{D}}}{1-\lambda_2}\right]^2 D\langle f,f\rangle.$$

推论1 $\{\Lambda_m: m\in M\}$是U关于$\{K_m: m\in M\}$的广义g-框架,C,D分别是其框架的下界和上界,$\{\Gamma_m: m\in M\}\subset L(U,K)$,如果存在常数$\lambda_1,\lambda_2\in[0,1)$使得$\forall f\in U$,都有

$$\left\|\int_M(\Lambda_m^*-\Gamma_m^*)\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|\leqslant$$

$$\lambda_1\left\|\int_M\Lambda_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|+\lambda_2\left\|\int_M\Gamma_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|$$

则$\{\Gamma_m: m\in M\}$也是U关于$\{K_m: m\in M\}$的广义g-框架,且其框架下界和上界分别是

$$\left(\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2}\right)^2 C,\left(\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2}\right)^2 D.$$

推论2 $\{\Lambda_m: m\in M\}$是U关于$\{K_m: m\in M\}$的广义g-框架,C,D分别是其框架下界和上界,$\{\Gamma_m: m\in M\}\subset L(U,K)$,如果存在常数$\lambda\in[0,1)$,使得$\forall f\in U$,都有

$$\left\|\int_M(\Lambda_m^*-\Gamma_m^*)\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|\leqslant\lambda\left\|\int_M\Lambda_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|$$

则$\{\Gamma_m: m\in M\}$也是U关于$\{K_m: m\in M\}$的广义g-框架,且其框架下界和上界分别是$(1-\lambda)^2C$,$(1+\lambda)^2D$.

注1 在定理2的已知条件中令$\gamma=0$,显然可以得到推论1,再令$\lambda_2=0$,可以得到推论2.由此可以看出定理2是更为一般的结论,对$\{\Gamma_m: m\in M\}$的下界和上界的估计更为精确.

定理3 $\{\Lambda_m: m\in M\}$是U关于$\{K_m: m\in M\}$的广义g-框架,C,D分别是其框架下界和上界,$\{\Gamma_m: m\in M\}\subset L(U,K)$,如果$R=\int_M\|\Lambda_m-\Gamma_m\|^2\mathrm{d}\mu(m)<C$,则$\{\Gamma_m: m\in M\}$也是$U$关于$\{K_m: m\in M\}$的广义g-框架,且其框架下界和上界分别是

$$\left(1-\sqrt{\frac{R}{C}}\right)^2 C,\left(1+\sqrt{\frac{R}{D}}\right)^2 D.$$

证明 令$Q: L^2(M,K)\to U$,$Q\bar{f}=\int_M\Gamma_m^*\bar{f}(m)\cdot\mathrm{d}\mu(m)$($\forall\bar{f}\in L^2(M,K),m\in M$),$\bar{f}(m)=\Lambda_m f$,$Q^*: U\to L^2(M,K)$,$Q^*g=\bar{g},\bar{g}(m)=\int_M\Gamma_m g\mathrm{d}\mu(m)$($\forall g\in U,m\in M$).

对于$\forall f\in U$,易得$\left\|\int_M(\Lambda_m^*-\Gamma_m^*)\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|\leqslant\sqrt{R}\|\bar{f}\|$.

$$\|Q\bar{f}\|=\left\|\int_M\Gamma_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|\leqslant$$

$$\left\|\int_M(\Gamma_m^*-\Lambda_m^*)\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|+$$

$$\left\|\int_M\Lambda_m^*\Lambda_m f\mathrm{d}\mu(m)\right\|\leqslant(\sqrt{R}+\sqrt{D})\|\bar{f}\|,$$

所以$\|Q\|\leqslant(\sqrt{R}+\sqrt{D})$.则对于任意的$f\in U$,有$\int_M\langle\Gamma_m f,\Gamma_m f\rangle\mathrm{d}\mu(m)=\langle Q^*f,Q^*f\rangle\leqslant$

$$\|Q\|^2\langle f,f\rangle\leqslant D\left(1+\sqrt{\frac{R}{D}}\right)^2\langle f,f\rangle.$$

假定S是$\{\Lambda_m: m\in M\}$的广义g-框架算子,令$T: U\to U$,$Tf=\int_M\Gamma_m^*\Lambda_m S^{-1}f\mathrm{d}\mu(m)$,$T^*: U\to U$,$T^*g=\int_M S^{-1}\Lambda_m^*\Gamma_m g\mathrm{d}\mu(m)$($\forall g\in U$),余下的证明与定理2类似.

注2 由文献[12]中的讨论可知,如果$\forall m\in M$,令$K_m=A$,则U中广义框架的集合和广义g-框架的集合是一一对应的.对于U中任意的广义框架$\{h_m: m\in M\}$,任意的$f\in U$,如果令$\Lambda_{h_m}f=\langle f,h_m\rangle$则可以得到文献[11]中关于$U$中广义框架稳定性的对应的判别定理.

定理4 $\{\Lambda_m: m\in M\}$,$\{\Gamma_m: m\in M\}$都是U关于$\{K_m: m\in M\}$的广义g-框架,C_1,D_1和C_2,D_2分别是其框架的下界和上界,S和T分别是$\{\Lambda_m: m\in M\}$和$\{\Gamma_m: m\in M\}$的广义g-框架算子,$\bar{\Lambda}_m=\Lambda_m S^{-1}$,$\bar{\Gamma}_m=\Gamma_m T^{-1}$,则

(1) $\{\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m: m\in M\}$是一个广义g-Bessel序列.

(2) 若$\{\Lambda_m-\Gamma_m: m\in M\}$是上界为$\delta$的广义g-Bessel序列,则$\{\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m: m\in M\}$是一个上界为

$$\min\left\{\frac{2\delta(C_1^2+D_1(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2)}{C_1^2C_2^2},\frac{2\delta(C_2^2+D_2(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2)}{C_1^2C_2^2}\right\}$$

的广义g-Bessel序列.

证明 (1) 对于$f\in U$,有

$$\int_M\langle(\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m)f,(\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m)f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\leqslant$$

$$2\int_M\langle\Lambda_m S^{-1}f,\Lambda_m S^{-1}f\rangle\mathrm{d}\mu(m)+$$

$$2\int_M\langle\Gamma_m T^{-1}f,\Gamma_m T^{-1}f\rangle\mathrm{d}\mu(m)\leqslant$$

$$2D_1\langle S^{-1}f,S^{-1}f\rangle+2D_2\langle T^{-1}f,T^{-1}f\rangle\leqslant$$

$$\left(\frac{2D_1}{C_1^2}+\frac{2D_2}{C_2^2}\right)\langle f,f\rangle.$$

所以$\{\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m: m\in M\}$是一个广义 g-Bessel 序列.

(2) 对于任意的 $f,g\in U$,有

$$\begin{aligned}\|\langle (S-T)f,g\rangle\| &= \left\|\int_M \langle(\Lambda_m^*\Lambda_m - \Gamma_m^*\Gamma_m)f,g\rangle \mathrm{d}\mu(m)\right\| \leqslant \\ &\left\|\int_M\langle(\Lambda_m-\Gamma_m)f,\Lambda_m g\rangle \mathrm{d}\mu(m)\right\| + \\ &\left\|\int_M \langle \Gamma_m f,(\Lambda_m-\Gamma_m)g\rangle \mathrm{d}\mu(m)\right\| \leqslant \\ &\left\|\int_M\langle(\Lambda_m-\Gamma_m)f,(\Lambda_m-\Gamma_m)f\rangle \mathrm{d}\mu(m)\right\|^{\frac{1}{2}}\cdot \\ &\left\|\int_M\langle\Lambda_m g,\Lambda_m g\rangle \mathrm{d}\mu(m)\right\|^{\frac{1}{2}} + \\ &\left\|\int_M\langle\Gamma_m f,\Gamma_m f\rangle \mathrm{d}\mu(m)\right\|^{\frac{1}{2}} + \\ &\left\|\int_M\langle(\Lambda_m-\Gamma_m)g,(\Lambda_m-\Gamma_m)g\rangle \mathrm{d}\mu(m)\right\|^{\frac{1}{2}} \leqslant \\ &\sqrt{\delta}(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})\|f\|\|g\|,\end{aligned}$$

故$\|S-T\|\leqslant\sqrt{\delta}(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})$.

因此 $\|S^{-1}-T^{-1}\|=\|T^{-1}(T-S)S^{-1}\|\leqslant$

$$\|T^{-1}\|\|T-S\|\|S^{-1}\|\leqslant\frac{\sqrt{\delta}(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})}{C_1C_2}.$$

$$\begin{aligned}&\int_M\langle(\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m)f,(\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m)f\rangle \mathrm{d}\mu(m) = \\ &\int_M\langle(\Lambda_m(S^{-1}-T^{-1})f+(\Lambda_m-\Gamma_m)T^{-1}f, \\ &(\Lambda_m(S^{-1}-T^{-1})f+(\Lambda_m-\Gamma_m)T^{-1}f\rangle \mathrm{d}\mu(m) \leqslant \\ &2\int_M\langle(\Lambda_m(S^{-1}-T^{-1})f,(\Lambda_m(S^{-1}-T^{-1})f\rangle \mathrm{d}\mu(m) + \\ &2\int_M\langle(\Lambda_m-\Gamma_m)T^{-1}f,(\Lambda_m-\Gamma_m)T^{-1}f\rangle \mathrm{d}\mu(m) \leqslant \\ &2D_1\langle(S^{-1}-T^{-1})f,(S^{-1}-T^{-1})f\rangle + \\ &2\delta\langle T^{-1}f,T^{-1}f\rangle \leqslant 2D_1\|S^{-1}-T^{-1}\|^2\langle f,f\rangle + \\ &2\delta\|T^{-1}\|^2\langle f,f\rangle \leqslant \frac{2\delta(C_1^2+D_1(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2)}{C_1^2C_2^2}\langle f,f\rangle.\end{aligned}$$

同理可得 $\int_M\langle(\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m)f,(\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m)f\rangle \mathrm{d}\mu(m)\leqslant$

$$\frac{2\delta(C_2+D_2(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2)}{C_1^2C_2^2}\langle f,f\rangle.$$

故 $\int_M\langle(\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m)f,(\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m)f\rangle \mathrm{d}\mu(m)\leqslant$

$$\min\left\{\frac{2\delta(C_1^2+D_1(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2)}{C_1^2C_2^2},\ \frac{2\delta(C_2^2+D_2(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2)}{C_1^2C_2^2}\right\}\langle f,f\rangle.$$

所以 $\{\bar{\Lambda}_m-\bar{\Gamma}_m: m\in M\}$是一个广义 g-Bessel 序列.

参考文献:

[1] Duffin R J, Schaeffer A C. A class of nonharmonic Fourier series [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1952, 72(2): 341.

[2] Daubechies I, Grossmann A, Meyer Y. Painless nonorthogonal expansions [J]. Journal of Mathematical Physics, 1986, 27 (5): 1271.

[3] Frank M, Larson D R. Frames in Hilbert C* -modules and C* -algebras [J]. Journal of Operator Theory, 2002, 48(2): 273.

[4] Khosravi A, Khosravi B. Frames and bases in tenor products of Hilbert spaces and Hilbert C* -modules [J]. Proceedings Mathematical Sciences, 2007, 117(1): 1.

[5] Khosravi A, Khosravi B. Fusion frames and g-frames in Hilbert C* -modules [J]. International Journal of Wavelets Multiresolution and Information Processing, 2008, 6(3): 433.

[6] Lance E C. Hilbert C* -modules: a toolkit for operator algebraists [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[7] Favier S, Zalik R. On the stability of frames and Riesz bases [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1995, 2 (2): 160.

[8] Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases [C]// Applied and Numerical Harmonic Analysis. New York: Birkhauser Boston, 2003: 347-362.

[9] Sun W C. Stability of g-frames [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 326(2): 858.

[10] Xiao X C, Zeng X M. Some properties of g-frames in Hilbert C* -modules [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2010, 363(2): 399.

[11] 付焕坤, 孟彬, 董芳芳. Hilbert W*-模上标准广义框架的摄动[J]. 数学物理学报, 2011, 31A(2): 478.
FU Huankun, MENG Bin, DONG Fangfang. Perturbations of standard generalized frames in Hilbert W*-modules [J]. Acta Mathematical Scientia, 2011, 31A(2): 478.

[12] 靳世华, 孟彬, 肖秀梅. Hilbert C*-模上的广义 g-框架[J]. 数学进展, 2011,40(1): 95.
JIN Shihua, MENG Bin, XIAO Xiumei. Generalized g-frames in Hilbert C*-modules [J]. Advances in Mathematics, 2011, 40(1): 95.

[13] Arambasic L. On frames for countably generated Hilbert C*-modules [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2007, 135(2): 469.

[14] Guo M Z, Meng B, Cao X H. Operator-valued free entropy and modular frames [J]. Methods and Applications of Analysis, 2004, 11(3): 331.

[15] Cazassa P G, Christensen O. Perturbation of operators and applications to frames theory [J]. Journal Fourier Analysis and Applications, 1997, 3(5): 543.