

# 基于格子 Boltzmann 方法的液力 变矩器导轮流场仿真

王立军<sup>1,3</sup>, 吴光强<sup>1,2</sup>

(1. 同济大学 汽车学院, 上海 201804; 2. 东京大学 生产技术研究所, 东京 153-8505;

3. 上海萨克斯动力总成部件系统有限公司, 上海 201718)

**摘要:** 研究了基于格子 Boltzmann 方法(LBM)的液力变矩器导轮内流场数值计算理论与方法. 首先, 提出了 LBM 中处理旋转周期性边界条件的方法. 然后, 分析了 LBM 中各项参数对于计算稳定性以及计算效率之间的影响. 为了保证粒子迁移与碰撞计算的稳定进行, 必须合理选定弛豫时间  $\tau$ , 从而避免在计算过程中平衡态分布函数  $f^{\text{eq}}$  出现负值的情形. 此外, 在 LBM 中运用大涡模拟(LES)可以降低计算稳定性对于弛豫时间  $\tau$  选取的限制, 在一定程度上提高计算效率. 最后, 在开源代码 Palabos 的基础上进行功能拓展, 实现导轮内流场的仿真计算, 得到了导轮尾迹区域瞬时非定常流动分布特征. 结果表明, LBM 与传统计算流体力学(CFD)方法相比, 液流对导轮作用力的计算结果在数值上较为接近. 然而, 使用 LBM 可以获得详细流场形成过程的时间历程以及局部复杂的流动细节.

**关键词:** 液力变矩器; 导轮; 格子 Boltzmann 方法; 旋转周期性边界

**中图分类号:** U463.22

**文献标志码:** A

## Flow Field Simulation of Stator Cascade in Automotive Torque Converters based on Lattice-Boltzmann Method

WANG Lijun<sup>1,3</sup>, WU Guangqiang<sup>1,2</sup>

(1. School of Automotive Studies, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. Institute of Industrial Science, the University of Tokyo, Tokyo 153-8505, Japan; 3. Shanghai Sachs Powertrain Components Systems Co., Ltd., Shanghai 201718, China)

**Abstract:** Theory and application of the lattice-Boltzmann method (LBM) for flow field simulation in the torque converter stator cascade is studied. Firstly, treatment for rotational periodic boundary is proposed. Then, influence of

different parameters on computational stability and efficiency is analyzed. In order to ensure stable calculation of migration and collision process of particles, it is essential to choose appropriate value of the relaxation time,  $\tau$  to avoid occurrence of negative value of the equilibrium distribution function,  $f^{\text{eq}}$ . Furthermore, the large eddy simulation (LES) is adopted in the LBM to lessen the restriction of computational stability on the relaxation time,  $\tau$  and to improve computational efficiency. Finally, flow field simulation of the stator cascade is realized by extending function of an open source code named 'Palabos', and instantaneous structure of unsteady wake flow behind the stator blade is obtained. The computational result shows that calculated force applied by fluid on the stator blade is nearly the same for the LBM to that of the tradition computational fluid dynamics (CFD) method. However, the LBM has advantage in calculating the forming history of flow filed and complex details of instantaneous flow structure.

**Key words:** torque converter; stator cascade; lattice Boltzmann method; rotational periodic boundary condition

传统计算流体力学通过数值方法求解基于欧拉法的流体宏观控制方程, 其基本特点为运用空间离散与时间离散方法将原本非线性的偏微分控制方程转变为线性代数方程组, 然后迭代求解线性方程组直至得到收敛解. 随着电子计算机计算能力的大幅提升, 传统计算流体力学已经得到了广泛运用, 并成为工程设计与科学研究不可或缺的手段.

建立流体运动的数学模型时, 不仅可以从宏观的角度将其视为连续的介质, 还可以分别从微观与介观层面进行建模. 在微观层面, 流体不再是连续分

收稿日期: 2014-05-08

基金项目: 国家自然科学基金(51175379)

第一作者: 王立军(1986—), 男, 工学博士, 主要研究方向为汽车液力变矩器设计理论及改型、优化方法. E-mail: wlijlu@163.com

通讯作者: 吴光强(1965—), 男, 工学博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为车辆现代化设计理论及方法以及车辆动力学及其控制.

E-mail: wuguangqiang@tongji.edu.cn

布的介质,而是由大量分子热运动组成,分子运动规律由各分子间相互作用力以及外界作用力决定.由于基于分子动力学的流体流动仿真对计算资源要求极大,因此该方法常用于研究基本流动现象,并成为辅助理论研究的重要工具<sup>[1]</sup>.在介观层面,假设流体由粒子系统组成,单个粒子在统计意义上反映了流体分子热运动的特征.对于上述粒子系统,只要建立合理的演化机制,便能得到符合实际物理规律的流体运动特征.格子 Boltzmann 方法(lattice Boltzmann method, LBM)是最近 20 多年来逐步发展起来的基于介观层面建模的流体动力学数值计算方法,最早由 Menamara 和 Aznetti<sup>[2]</sup>在 1988 年提出.

从诞生之日起,LBM 已被成功应用于传统计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)难以胜任的领域,如多孔介质流动、生物体内流动以及粒子悬浮流动等.然而,LBM 作为一种探索高精度方法的数值框架,其优点不仅局限于此.简单形式的 LBM 的数值精度可以与 Navier-Stokes(NS)方程组的高阶框架相提并论,比如二阶精度的 LBM 比基于二阶空间三阶 Runge-Kutta 方法的 NS 方程组具有更小的弥散误差.此外,LBM 的粒子推演过程只涉及相邻节点,可以方便地采用区域分割法进行并行计算.因此,LBM 在实际工程应用中同样具备独特的优势<sup>[3]</sup>.

本文研究了 LBM 在汽车自动变速器用液力变矩器导轮叶栅系统内部流场仿真计算中的应用.探讨了空间离散尺寸、时间离散间隔、弛豫时间  $\tau$  等参数的选取对于高雷诺数流动计算稳定性的影响.

由于 LBM 自身特点,其在处理旋转周期性边界条件时遇到一定困难,文中基于 Guo 边界条件处理方法<sup>[4]</sup>,推导了适用于透平机械流场计算的旋转周期性边界条件处理方法.此外,通过将格子 Boltzmann 方法与大涡模拟相结合,在保证计算稳定性的同时,提高了计算效率.最后在开源代码 Palabos 的基础上,实现了液力变矩器导轮流场的仿真计算.

## 1 格子 Boltzmann 方法的基础理论

### 1.1 Boltzmann 方程的建立

与传统 CFD 方法不同,格子 Boltzmann 方法从介观层面着手,计算粒子处于某一运动状态下的概率,并通过统计方法得出系统的宏观参数. LBM 中

描述粒子状态基本参数的物理量为粒子分布函数  $f$ ,其输运方程为

$$f(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}dt, \boldsymbol{\xi} + \mathbf{a}dt, t + dt)dv_r dv_\xi - f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}, t)dv_r dv_\xi = -\frac{1}{\tau_0}(f - f^{\text{eq}})dv_r dv_\xi dt \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\xi}$ 为粒子运动速度; $\mathbf{a}$ 为粒子受外力作用引起的加速度; $\mathbf{r}$ 为粒子所处的位置矢量; $dv_r$ 为空间微元,对于三维笛卡尔坐标系有  $dv_r = dx dy dz$ ;  $dv_\xi$ 为速度空间微元,对于三维笛卡尔坐标系有  $dv_\xi = d\xi_x d\xi_y d\xi_z$ ,  $f^{\text{eq}}$ 为 Maxwell 平衡态分布,该规律规定了粒子在静止平衡态时的最可几率速度分布; $\tau_0$ 为粒子两次碰撞间的平均时间间隔,称为弛豫时间.

### 1.2 离散形式的 Boltzmann 方程

格子 Boltzmann 方程是 Boltzmann-BGK 方程的一种特殊离散形式,其中包括空间离散,时间离散以及速度离散<sup>[5]</sup>.空间离散及时间离散与传动 CFD 中的概念一致.速度离散是对粒子的介观运动速度矢量进行离散处理.对于粒子运动,其运动速度在速度空间中连续分布.然而,粒子运动的详细细节对流体宏观参数影响不大,为了简化计算,将粒子运动速度  $\boldsymbol{\xi}$ 简化为有限维数的速度空间  $\{\boldsymbol{\xi}_0, \boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N\}$ ,  $N$ 为粒子速度的个数.粒子分布函数  $f$ 相应地也离散为  $\{f_0, f_1, \dots, f_N\}$ .当空间离散与时间离散  $\Delta t$ 取适当值时,即  $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\xi}_a \cdot \Delta t$ ,能够保证各空间离散的节点位于粒子离散速度特征线上的节点位置,即

$$f_a(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_a \Delta t, \boldsymbol{\xi}_a, t + \delta \Delta t) - f_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_a, t) = -\frac{\Delta t}{\tau_0}[f_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_a, t) - f_a^{\text{eq}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_a, t)] - F_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_a, t) \Delta t \quad (2)$$

式中: $\mathbf{r}_0$ 为中心点的位置矢量; $\mathbf{r}_a$ 为离散化后的位置矢量; $\boldsymbol{\xi}_a$ 为离散化后的速度; $f_a^{\text{eq}}$ 为对应离散速度空间的局部平衡态分布函数; $F_a$ 为外力在离散速度方向上的投影,  $F_a = -(\partial f / \partial \boldsymbol{\xi})_a \cdot \mathbf{a}$ .

根据该特性,求解格子 Boltzmann-BGK 方程不再像传统 CFD 一样需要迭代求解偏微分方程组,而可以将粒子运动分为碰撞与迁移两部分,即

$$f_a^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_a, t) = \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)f_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_a, t) + \frac{1}{\tau}f_a^{\text{eq}}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_a, t) - F_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_a, t) \Delta t \quad (3)$$

$$f_a(\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_a \Delta t, \boldsymbol{\xi}_a, t + \Delta t) = f_a^+(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_a, t) \quad (4)$$

式(3)—(4)中: $f_a^+$ 为粒子发生碰撞以后的分布函数; $\tau_0$ 为量纲一弛豫时间,  $\tau = \tau_0 / \Delta t$ .

特别地,当  $\tau = 1$  时,式(3)右边不再有  $f_a(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}_a, t)$ ,此时只剩下处于平衡态的粒子发生迁移.然而量纲一弛豫时间  $\tau$  不能随意选取,其值还与运动粘度  $\nu$

有如下关系:

$$\nu = c_s^2 \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta t \quad (5)$$

式中:  $c_s$  为格子声速.

### 1.3 D3Q19 模型参数

不同格子模型区别在于粒子速度的离散方法以及平衡态分布函数的确定<sup>[6]</sup>. 研究中使用 D3Q19 模型, 该模型用于计算三维流动, 具有 19 种离散速度

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_1 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \xi_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \xi_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \\ \xi_7 &= \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_8 = \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_9 = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \xi_{10} &= \begin{pmatrix} -c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_{11} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \xi_{12} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \\ \xi_{13} &= \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, \xi_{14} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \xi_{15} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c \end{pmatrix}, \\ \xi_{16} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ -c \end{pmatrix}, \xi_{17} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -c \end{pmatrix}, \xi_{18} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{pmatrix} \quad (6) \end{aligned}$$

式中,  $c = \Delta x / \Delta t$ .  $\Delta x$ 、 $\Delta t$  分别为空间离散后的网格尺寸以及时间离散步长, 为了保证所有网格节点都位于粒子离散速度的特征线上, 一般取  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ , 即空间离散网格为正六面体.

D3Q19 所采用的平衡态分布函数形式如下:

$$f_a^{\text{eq}} = \text{Feq}(\mathbf{V}, \rho, \xi_a) = \rho w_a \left[ 1 + \frac{\xi_a \cdot \mathbf{V}}{c_s^2} + \frac{(\xi_a \cdot \mathbf{V})^2}{2c_s^4} - \frac{\mathbf{V}^2}{2c_s^2} \right] \quad (7)$$

式中:  $c_s = c / \sqrt{3}$ , 这里所指的格子声速并不等于实际介质处声速;  $\rho$  为流体介质密度;  $\mathbf{V}$  为流体介质宏观运动的速度矢量;  $w_a$  为对应于离散速度的权系数, 其值为  $w_0 = 1/3$ ,  $w_1 = w_2 = \dots = w_6 = 1/18$ ,  $w_7 = w_8 = \dots = w_{18} = 1/36$ .

## 2 格子参数对计算稳定性的影响

对于格子 Boltzmann 方法, 数值计算的稳定性一直是困扰研究者的难题<sup>[7-10]</sup>. 首先考察平衡态分布函数, 其物理意义要求其只能存在正值, 即:

$$f_a^{\text{eq}} =$$

$$\rho w_a \left[ 1 + \frac{\xi_a \cdot \mathbf{V}}{c_s^2} + \frac{(\xi_a \cdot \mathbf{V})^2}{2c_s^4} - \frac{3C_0^2}{2} \right] > 0 \quad (8)$$

$$C_0 = \frac{|\mathbf{V}|}{c} =$$

$$\frac{|\mathbf{V}| \cdot \Delta t}{\Delta x} = \frac{|\mathbf{V}| \cdot \Delta x}{3\nu} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \quad (9)$$

式(9)中,  $C_0$  称为库朗数, 当其值过大时, 平衡态分布函数会出现负值的情形. 文献[7]指出, 在计算过程中, 当局部的平衡态分布函数出现负值时会迅速引起数值计算的不稳定. 为了保证计算能够稳定进行, 需要保证在整个计算区域内的库朗数都维持在稳定区间内. 文献[8]研究了计算均匀流场时, 雷诺数、库朗数与弛豫时间  $\tau$  之间的关系. 研究指出随着雷诺数与库朗数的不断增高, 计算会变得不稳定, 并且当弛豫时间  $\tau \rightarrow 0.5$  时, 计算稳定区域不断减小.

根据式(9), 为了保证计算的稳定性, 可以通过减小弛豫时间  $\tau$  来减小库朗数. 但是, 如上所述, 弛豫时间  $\tau$  减小同样受到限制. 当弛豫时间  $\tau$  的减小依旧无法保证足够小的库朗数时, 只能通过减小网格尺寸, 增加计算网格数来实现. 由此可见, 对于格子 Boltzmann 计算, 弛豫时间  $\tau$  选取十分关键.

另一方面, 根据式(9), 对于一定的特征流速  $\mathbf{V}$  以及弛豫时间  $\tau$ , 随着运动粘度  $\nu$  不断减小, 为了保持库朗数不变, 网格尺寸  $\Delta x$  也必须等比例减小, 此外, 时间与空间离散存在  $\Delta t \propto \Delta x^2$  的关系. 因此, 随着雷诺数的提高, 格子 Boltzmann 的计算量将大幅增加.

## 3 大涡模拟

虽然格子 Boltzmann 方法在理论上并没有对雷诺数进行限制, 然而, 随着计算雷诺数的不断提高, 所需的空间与时间分辨率也要急剧增加. 因此, 对高雷诺数问题进行直接数值计算是不切合实际的. 为了解决这一难题, 人们提出将大涡模拟与格子 Boltzmann 方法相结合<sup>[11]</sup>.

大涡模拟模型将湍流划分为大尺度各向异性湍流运动与小尺度中各向同性的扰动. 其中大尺度的运动由格子 Boltzmann 方法自身求解, 而小尺度的运动与大尺度之间的影响由亚格子模型确定. 时空平均后的格子 Boltzmann 方程为

$$\begin{aligned} & \bar{f}_a(\mathbf{r} + \xi_a \Delta t, \xi_a, t + \Delta t) - \bar{f}_a(\mathbf{r}, \xi_a, t) \\ &= -\frac{1}{\tau_{\text{total}}} [\bar{f}_a(\mathbf{r}, \xi_a, t) - \bar{f}_a^{\text{eq}}(\mathbf{r}, \xi_a, t)] \quad (10) \end{aligned}$$

式中:  $\tau_{\text{total}}$  是由分子粘性  $\nu$  与涡粘性  $\nu_t$  共同决定的等效弛豫时间,采用格子单位时,存在如下关系:

$$\tau_{\text{total}} = 3(\nu + \nu_t) + \frac{1}{2} = \tau + 3\nu_t \quad (11)$$

通过将格子 Boltzmann 方法与大涡模拟相结合,使得对弛豫时间  $\tau$  的选取更加宽松. 因为,此时影响格子 Boltzmann 计算稳定性的参数变为等效弛豫时间  $\tau_{\text{total}}$ ,而根据式(11)存在  $\tau_{\text{total}} > \tau$ . 回到式(11),当分子粘度减小时,为了保持库朗数不变,不再需要减小空间离散的尺寸,而可以通过进一步减小弛豫时间  $\tau$  来实现.

## 4 边界条件处理

### 4.1 曲面几何边界条件的处理

对于曲面几何边界的处理,Guo 等<sup>[4]</sup>提出了一种结合非平衡外推格式与空间插值的处理方法,如图1所示. 图中,  $r_w$  为壁面点  $w$  的位置矢量,  $r_f$  为计算域内与壁面相邻的第一个格子节点  $f$  点的位置矢量,  $r_h$  为计算域内与壁面相邻的第二个格子节点  $h$  点的位置矢量,  $r_b$  为计算域外与壁面相邻的节点  $b$  点的位置矢量. 文献<sup>[4]</sup>指出该方法具有二阶精度,并且具有较好的数值计算稳定性.

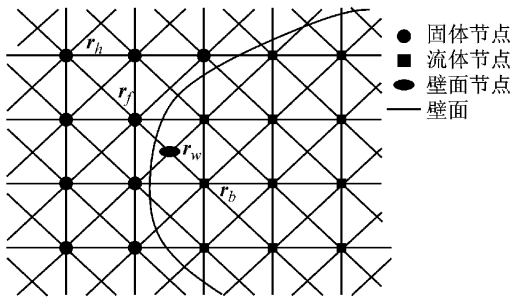


图1 曲面几何边界条件处理示意图

Fig.1 Boundary condition processing on curved surface

对于位于计算域内的格子节点  $r_f$ ,在粒子迁移时需要知道位于计算域外的节点  $r_b$  处的分布函数  $f_a^+$ ,根据非平衡外推格式将分布函数  $f_a^+$  分解为平衡态  $f_a^{+,eq}$  与非平衡态  $f_a^{+,neq}$  两部分,其中平衡态分布函数由节点上的宏观参数计算获得,而节点  $r_b$  处的宏观参数以及非平衡态分布函数则由相邻节点向外插值获得,即:

$$\begin{aligned} f_a^+(r_b, \xi_a, t) &= f_a^{+,eq}(r_b, \xi_a, t) + f_a^{+,neq}(r_b, \xi_a, t) \\ &= \text{Feq}(\mathbf{V}_b, \rho_b, \xi_a) + f_a^{+,neq}(r_b, \xi_a, t) \end{aligned} \quad (12)$$

式中,宏观流动的速度矢量  $\mathbf{V}_b$  ( $b$  点)以及密度  $\rho_b$  由以下插值计算:

$$\mathbf{V}_b = \frac{\mathbf{V}_w + (q-1)\mathbf{V}_f}{q} \quad (13)$$

$$\rho(r_b) = \rho(r_f) \quad (14)$$

其中,  $q$  为位置参数,  $q = |\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_w| / |\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_b|$

由于式(13)中  $q$  出现在分母上,为了避免当  $q$  小于某一经验值  $q_c$  时,出现数值计算不稳定时,采用以下插值公式:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_b &= [\mathbf{V}_w + (q-1)\mathbf{V}_f] + \\ &(1-q) \frac{2\mathbf{V}_w + (q-1)\mathbf{V}_h}{1+q} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\rho(r_b) = \rho(r_f) \quad (16)$$

对于非平衡态,由式(17)–(18)插值获得:

当  $q \geq q_c$  时

$$\begin{aligned} f_a^{+,neq}(r_b, \xi_a, t) &= \\ f_a^+(r_f, \xi_a, t) - f_a^{+,eq}(r_f, \xi_a, t) \end{aligned} \quad (17)$$

当  $q < q_c$  时

$$\begin{aligned} f_a^{+,neq}(r_b, \xi_a, t) &= q[f_a^+(r_f, \xi_a, t) - f_a^{+,eq}(r_f, \xi_a, t)] + \\ &(1-q)[f_a^+(r_h, \xi_a, t) - f_a^{+,eq}(r_h, \xi_a, t)] \end{aligned} \quad (18)$$

### 4.2 旋转周期性边界条件

#### 4.2.1 周期点的处理

与平移周期性边界条件不同,旋转周期性边界上的格子节点经过旋转后不能保证在旋转周期性边界的另一侧有格子节点与之对应. 更困难的是,粒子速度离散特征线也随之旋转了一定角度,如图2所示. 图中,  $r_c$  为中心点  $c$  的位置矢量,  $r_1 \sim r_6$  表示不同点的位置矢量.

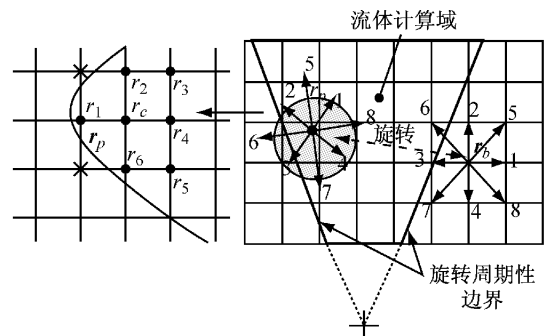


图2 旋转周期性边界条件处理示意图

Fig.2 Boundary condition process of rotational periodicity

为了解决上述问题,基于 Guo 边界条件<sup>[4]</sup>,将临近旋转周期性边界外的格子节点  $r_b$  分解成平衡态与非平衡态量部分,即

$$\begin{aligned} f_a^+(r_b, \xi_a, t) &= \text{Feq}(\mathbf{V}_p, \rho_p, \xi_a) + \\ &f_a^{+,neq}(r_b, \xi_a, t) \end{aligned} \quad (19)$$

式中,  $\mathbf{V}_p, \rho_p$  分别为  $p$  点的速度矢量和密度.

对于非平衡态分布函数依旧由式(17)–(18)计

算得到. 所不同的是, 用于计算平衡态分布函数的宏观参数(速度矢量  $\mathbf{V}$  与密度  $\rho$ ) 由旋转周期性条件另一侧  $\mathbf{r}_p$  的流动参数确定.

由于周期性点  $\mathbf{r}_p$  不一定与流体格子节点重合, 因此采用数值差分方法计算得到此处宏观参数. 对离周期性点  $\mathbf{r}_p$  最近的流体格子节点  $\mathbf{r}_c$  进行 Taylor 展开有:

$$\varphi_{r_p} = \varphi_{r_c} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right|_{r_c} \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_c) + O[(\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_c)^2] \quad (20)$$

式中:  $\varphi$  为宏观参数, 可取速度分量  $V_x, V_y, V_z$  或密度  $\rho$ .

有不少数值差分方法可以用来计算  $\varphi$  的梯度. 然而, 由于周期性点  $\mathbf{r}_p$  邻近计算域边界, 在格子节点  $\mathbf{r}_c$  周围并且位于计算域内的格子节点数目由相邻边界的几何形态决定. 因此, 很难推导出确定的差分方程, 这将对算法实现产生不利. 在此, 选用最小二乘法来计算梯度值, 其精度取决于所能搜索到的插值点, 即:

$$\begin{cases} \varphi_{r_c} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right|_{r_c} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c) = \varphi_1 \\ \varphi_{r_c} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right|_{r_c} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c) = \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{r_c} + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right|_{r_c} \cdot (\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_c) = \varphi_N \end{cases} \quad (21)$$

对于三维问题可得到如下线性方程组:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 & \Delta z_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 & \Delta z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta x_N & \Delta y_N & \Delta z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \varphi_x \\ \nabla \varphi_y \\ \nabla \varphi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 - \varphi_{r_c} \\ \varphi_2 - \varphi_{r_c} \\ \vdots \\ \varphi_N - \varphi_{r_c} \end{bmatrix} \quad (22)$$

式(22)为超定线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , 其一般解法为在等式两边分别乘以系数矩阵的转置  $\mathbf{A}^T$ , 即  $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$ . 然而, 该方法在实际数值计算时很少采用, 因为其对系数矩阵的条件数十分敏感<sup>[12]</sup>. 在这里采用 Gram-Schmidt 展开, 该方法将系数矩阵  $\mathbf{A}$  分解为正交矩阵  $\mathbf{Q}$  与上三角矩阵  $\mathbf{R}$  的积,  $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ . 于是超定线性方程组的解为  $\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{b}$ . 矩阵  $\mathbf{R}^{-1} \mathbf{Q}^T$  可以事先计算得到, 而不需要在每个时间步长内反复求解线性方程组, 即:

$$\begin{cases} \nabla \varphi_x = \sum_{i=1}^N W_i^x (\varphi_i - \varphi_{r_c}) \\ \nabla \varphi_y = \sum_{i=1}^N W_i^y (\varphi_i - \varphi_{r_c}) \\ \nabla \varphi_z = \sum_{i=1}^N W_i^z (\varphi_i - \varphi_{r_c}) \end{cases} \quad (23)$$

式中,  $W_i^x, W_i^y, W_i^z$  为加权系数, 为

$$\begin{cases} W_i^x = \frac{\Delta x_i}{r_{11}^2} - \frac{r_{12}}{r_{11} r_{22}} \left( \Delta y_i - \frac{r_{12}}{r_{11}} \Delta x_i \right) + \\ \frac{r_{12} r_{23} - r_{13} r_{22}}{r_{11} r_{22} r_{33}^2} \left[ \Delta z_i - \frac{r_{13}}{r_{11}} \Delta x_i - \frac{r_{23}}{r_{22}} \left( \Delta y_i - \frac{r_{12}}{r_{11}} \Delta x_i \right) \right] \\ W_i^y = \frac{1}{r_{22}^2} \left( \Delta y_i - \frac{r_{12}}{r_{11}} \Delta x_i \right) + \\ \frac{r_{23}}{r_{22} r_{33}^2} \left[ \Delta z_i - \frac{r_{13}}{r_{11}} \Delta x_i - \frac{r_{23}}{r_{22}} \left( \Delta y_i - \frac{r_{12}}{r_{11}} \Delta x_i \right) \right] \\ W_i^z = \frac{1}{r_{33}^2} \left[ \Delta z_i - \frac{r_{13}}{r_{11}} \Delta x_i - \frac{r_{23}}{r_{22}} \left( \Delta y_i - \frac{r_{12}}{r_{11}} \Delta x_i \right) \right] \end{cases} \quad (24)$$

式中,  $r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{22}, r_{23}, r_{33}$  均为上三角矩阵  $\mathbf{R}$  的元素.

#### 4.2.2 边界点的处理

如图 3 所示, 对于某些相邻于旋转周期性边界上的格子点, 经过旋转变换后, 其坐标仍旧处于计算域外, 称这些格子点为边界点. 对于这些边界点的处理, 首先需要搜索与周期点  $\mathbf{r}_p$  邻近并且位于计算域内的格子点  $\mathbf{r}_f$ , 然后由式(13)~(16)计算宏观参数. 此时可能出现  $q$  值过小的情形, 然而由于周期点  $\mathbf{r}_p$  不位于粒子离散速度特征线上, 因此无法沿特征线找寻下一个格子节点  $\mathbf{r}_h$ . 为了避免数值计算出现不稳定, 需要进一步扩大搜索范围, 直到搜索到某点使  $q \geq q_c$  得到满足.

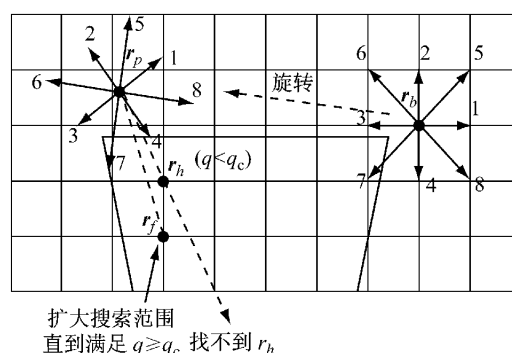


图 3 边界点的边界条件处理示意图

Fig.3 Boundary condition process of corner points

## 5 导轮流场计算

### 5.1 格子 Boltzmann 算法的实现

本文基于开源项目 Palabos 开发流场仿真计算代码, 其基本代码在 C++ 环境下编写. 图 4 为计算程序流程图, 计算程序通过 STL (STereo Lithography) 接口读入几何模型, 其文件由三角形面片构成, 每个三角形面片的定义包括三角形各个顶点的三维坐标

值及三角形面片的法矢量. 提高三角形面片储存与检索效率的方法可参见文献[13].

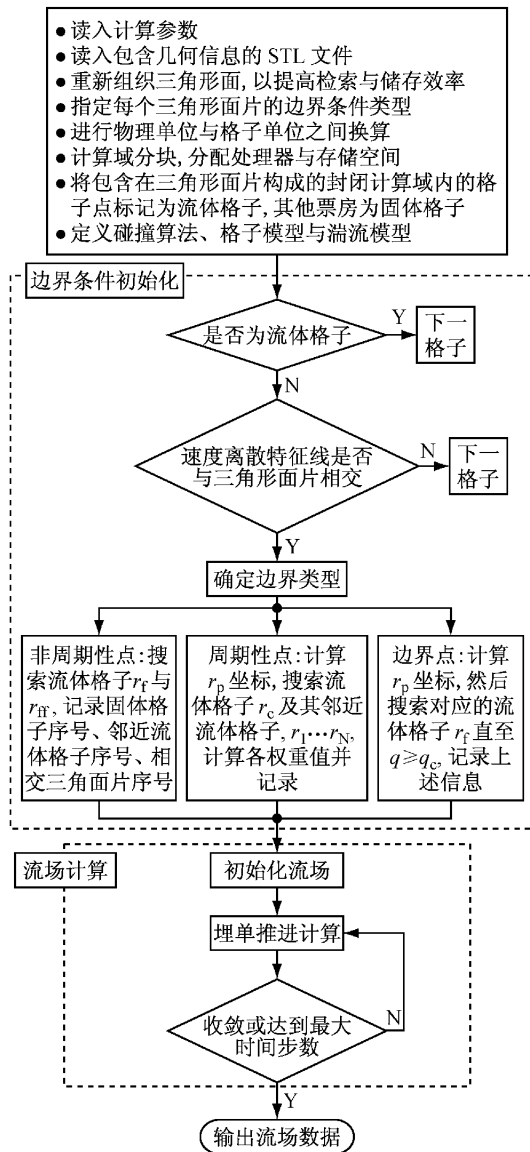


图4 计算程序流程图

Fig.4 Flow chart of simulation program

## 5.2 导轮流场计算结果分析

如图5所示为导轮流场计算的几何模型, 导轮叶片的平均作用半径为  $0.083\text{ m}$ . 入口面边界条件为速度入口, 根据计算资源确定入口流速为  $0.8\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 流动方向与流道轴线平行. 出口面边界条件为速度 Neumann 出口. 流动特征尺寸取导轮流道水力半径  $R_y = 0.012\text{ m}$ , 传动油运动粘度为  $5.88 \times 10^{-6}\text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , 由此得到的雷诺数  $\text{Re} = 1\,632$ . 对于以上雷诺数, 采用直接数值计算需要花费巨大的运算资源, 所以计算时采用湍流模型, 从而可以采用较小的弛豫时间  $\tau = 0.501\,86$ . 由于导轮周围流场的速度梯度较大, 最大流动速度可以达到均匀来流流速

的3至4倍, 为了保证计算过程的稳定性, 特征库朗数定为  $C_o = 0.05$ , 根据式(9)可计算得到空间离散尺寸为  $\Delta x = 0.15\text{ mm}$ , 总计算节点数约为  $2.2 \times 10^3$  万, 物理时间步长  $\Delta t = 2.43 \times 10^{-6}\text{ s}$ . 由于旋转周期性边界需要在每个时间步长结束后交换边界上的格子信息, 因此根据 CPU 内核数沿轴向将计算区域分为8块.

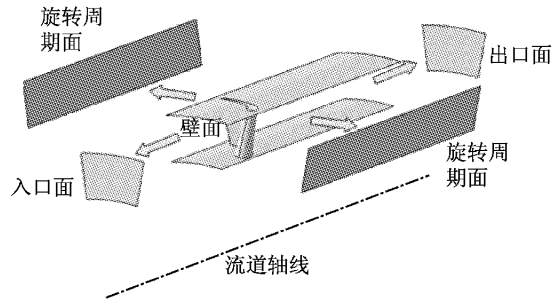


图5 导轮几何模型

Fig.5 Geometry of stator cascade

计算所使用的电子计算机为 Dell Optiplex 990, 所配备的 CPU 为 Intel i7-2600, 该 CPU 共有 8 个计算内核, 单核计算频率为  $3.40\text{ GHz}$ , 总内存容量为  $8\text{ GB}$ . 在经过 438 150 步仿真计算后流场总压降波动小于  $1\%$ , 流场计算趋于收敛, 仿真计算约耗时  $319\text{ h}$ . 为了与基于有限体积法的传统 CFD 方法进行对比, 使用传统 CFD 方法进行计算. 由于两种计算方法对网格类型、网格数量以及计算算法的要求不同, 因此采用液力变矩器流场计算时已被广泛采用并验证的计算参数, 计算时采用贴体网格, 网格总数约为 360 万, 湍流模型为标准  $k-\epsilon$  模型, 使用同一台计算机进行仿真计算, 仿真计算约耗时  $7\text{ h}$ .

图6a—6d为使用 LBM 计算得到的导轮流场的发展历程, 图中显示了导轮吸力面处边界层分离逐步形成的过程, 边界层流动分离在导轮叶片后部造成明显的非定常尾迹区域.

图7显示, 使用 LBM 计算得到的尾迹区域内流动情况十分复杂, 存在若干较小结构的涡旋互相影响. 对比图6e发现, 求解雷诺时均 N-S 方程的传统 CFD 方法计算得到的尾迹区域内的瞬时微小的流动变化被抹平.

表1对比了传统 CFD 方法与 LBM 的计算结果. 可以看出两种流场仿真方法在计算结果的数值上比较接近, 然而由于 LBM 采用严格的时间推进, 其计算结果能够揭示更多流场局部细节, 作为代价, 其计算所需时间要大于传统 CFD 方法.

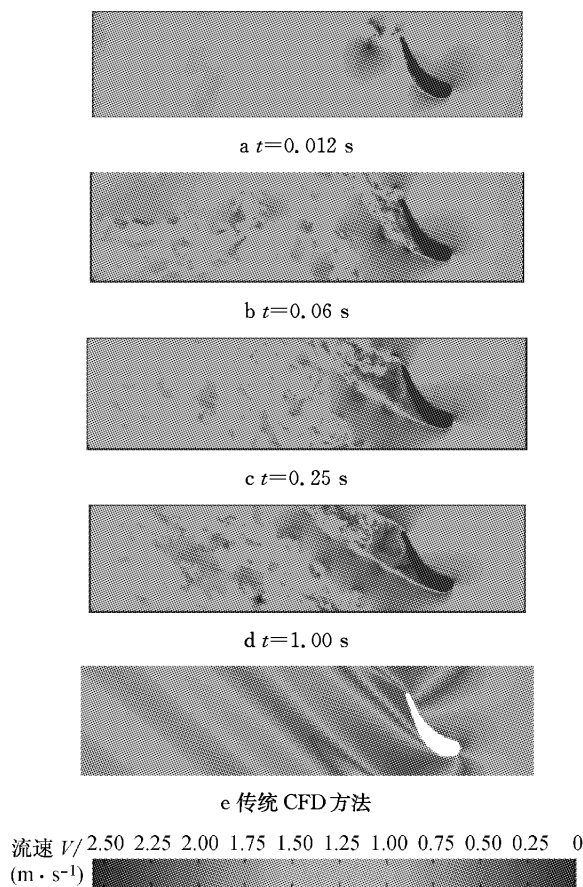


图 6 导轮中展面流场流速云图

Fig.6 Contour of flow velocity on the mid-span plane

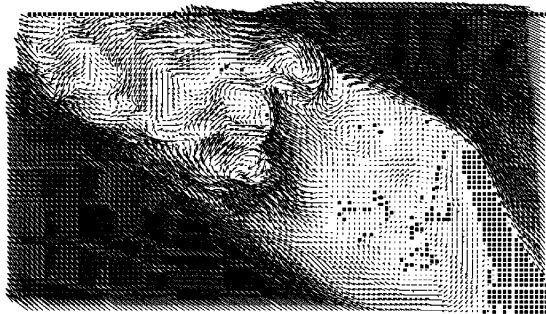


图 7 导轮中展面流场速度矢量

Fig.7 Velocity vector in the mid-span plane of stator

表 1 传统 CFD 与 LBM 计算结果对比

Tab.1 Comparison between results of traditional CFD and LBM

	传统 CFD	LBM
总压降/Pa	917.4	896.6~905.5
轴向作用力/N	0.642 2	0.631 5~0.632 2
作用力矩/(N·m)	0.024 35	0.024 82~0.024 83

## 6 结论

(1)详细推导了 LBM 中旋转周期性边界条件的处理方法.在格子 Boltzmann 开源代码 Palabos 的构

架内,实现了液力变矩器导轮流场的仿真计算.

(2)LBM 与传统 CFD 方法相比,导轮叶片受液流的作用力在数值上比较相近.然而,由于 LBM 计算时为严格时间推进,因此可以获得十分详细的流场形成过程以及局部微小的流动细节,但是作为代价,其对计算资源要求要高于传统 CFD 方法.

(3)弛豫时间  $\tau$  的选取对计算收敛性十分关键.通过在 LBM 中建立大涡模拟可以在一定程度上放宽弛豫时间  $\tau$  的选择范围,在保证计算稳定性的同时,提高计算效率.

## 参考文献:

- [1] 何雅玲,王勇,李庆. 格子 Boltzmann 方法的理论及应用[M]. 北京:科学出版社,2009.  
HE Yaling, WANG Yong, LI Qing. Lattice Boltzmann method: theory and applications [M]. Beijing: Science Press, 2009.
- [2] Menamara G R, Aznetti G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice automata[J]. Physical Review Letters, 1988, 61(20): 2332.
- [3] XU Hui, Sagaut P. Optimal low-dispersion low-dissipation LBM schemes for computational aeroacoustics [J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(13):5353.
- [4] GUO Zhaoli, ZHENG Chuguang. An extrapolation method for boundary conditions in lattice boltzmann method[J]. Physics of Fluids. 2002, 14(6):2007.
- [5] HE Xiaoyi, LUO Lishi. Theory of the lattice Boltzmann method: from the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation[J]. Physical Review E. 1997, 56(12): 6811.
- [6] Wolf-Gladrow D A. Lattice-Gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction[M]. New York: Springer, 2000.
- [7] Servan-Camas B, Tsai F T C. Non-Negativity and stability analyses of lattice Boltzmann method for advection-diffusion equation[J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(1): 236.
- [8] Sterling J D. Stability analysis of lattice Boltzmann methods [J]. Journal of Computational Physics. 1996, 123(1): 196.
- [9] Worthing R A, Mozer J, See ley G. Stability of lattice Boltzmann methods in hydrodynamic regimes [J]. Physical Review E. 1997, 56(2):2243.
- [10] LIU Tiancheng, LIU Gao, GE Yaojun, et al. Extended lattice Boltzmann equation for simulation of flows around bluff bodies in high reynolds number [C]//BBAA VI International Colloquium on: bluff Bodies Aerodynamics & Applications. Milano: [s.n], 2008: 1-16.
- [11] Teixeira C M. Incorporating turbulence models into the lattice-Boltzmann method [J]. International Journal of Modern Physics, 1998, 9(8):1159.
- [12] Anderson W K, Bonhaus D L. An implicit upwind algorithm for computing turbulent flows on unstructured grids [J]. Computers Fluids. 1994, 23(1):1.
- [13] Campagna S, Kobbelt L, Seidel H P. Directed edges-a scalable representation for triangle meshes [J]. Journal of Graphics Tools. 1998, 3(4):1.