

基于统一强度准则的柱孔扩张问题及扩孔孔径分析

赵春风^{1,2}, 贾尚华^{1,2}, 赵程^{1,2}

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 通过轴对称问题的应变协调方程, 利用统一强度准则和相关联流动法则分析了柱孔扩张问题. 利用柱孔扩张问题的基本位移公式和塑性区孔口位移条件, 推导了柱孔初始半径 a_0 、扩孔半径 a 和对应的孔压 p 三者的理论关系式. 通过此关系式和塑性区半径相关公式求得柱孔扩张问题的塑性区半径 r_p , 进而求出相关扩孔问题的应力场、应变场和位移场. 探讨了统一强度理论和土体的参数问题, 并且通过算例分析, 对柱孔扩张问题中的应力场和位移场的分布规律、塑性区半径和扩孔压力的变化规律进行了分析.

关键词: 柱孔扩张理论; 统一强度准则; 扩孔压力; 塑性区半径

中图分类号: TU43

文献标志码: A

Theoretical Analysis of Expansion and Expanded Radius of Cylindrical Cavity Based on Unified Strength Criterion

ZHAO Chunfeng^{1,2}, JIA Shanghua^{1,2}, ZHAO Cheng^{1,2}

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The problem of cylindrical cavity expansion in soil was analyzed with the unified strength yield criterion, strain compatibility equations in cylindrical coordinates and the associative flow rule. The theoretical relationship among the initial radius a_0 , expansion radius a and expansion pressure p of the cylindrical bore was derived by employing the basic displacement formula of plastic zone and the displacement changes of soil around the cylindrical bore. Then, the radius of plastic zone r_p was obtained by this theoretical relationship and the relative formulas about the radius of plastic zone r_p . In addition, the closed-form solutions of stresses, strains, displacements in the elastic and plastic regions were obtained in concrete problems of cavity expansion. Furthermore, the

parameters of the unified strength theory and the soil were analyzed. Finally, an illustrative example was taken to analyze the change rules of stress and displacement fields, the radius of plastic zone a_0 and expansion pressure p .

Key words: cylindrical cavity expansion theory; unified strength criterion; internal pressure; radius of plastic zone

圆柱孔扩张问题是一个经典问题. 1972 年 Vesic^[1]将其应用到岩土工程之后, 国外学者 Yu^[2]、Cao 等^[3]对小孔扩张进行了系统的研究, 并且将小孔扩张理论广泛应用于隧道开挖、锚杆支护、井筒沉桩等应力应变问题的分析中, 同时也应用到静力触探、旁压等土工原位试验中. 国内学者蒋明镜等^[4-6]从 20 世纪 90 年代开始, 从土体软化、剪胀等特性方面系统研究小孔扩张问题. 经过多年的研究, 目前圆孔扩张理论在国内外学者的共同努力下取得了长足的发展, 应用的屈服准则有 Mohr-Coulomb、Tresca、修正剑桥模型、SMP (Matsuoka-Nakai) 等^[1,3,7-9], 初始应力场从各项同性到各项异性^[10], 研究土体从不考虑渗流影响到考虑渗流影响、从饱和土体到非饱和土体等^[11-13], 并且考虑了土体的大小应变、剪胀、应变软化和结构性等^[7,11-14].

综上, 国内外学者对柱孔扩张问题的研究考虑了众多的影响因素, 得到了许多有重要意义的科研成果. 总结这些文献, 笔者认为柱孔扩张理论中比较关键的基本问题为: ① 塑性区变形对柱孔应力场、位移场的影响; ② 初始孔径和扩孔后孔径对扩孔压力的影响. 对于第一个问题, 已有的文献采用计算塑性区平均应变^[1,15]、剪胀理论^[11,16-17]、流动法则^[18-20]等方法和理论获得柱孔扩张的解析解. 其中剪胀理论只适用于砂土, 可以考虑砂土的剪胀性, 但是土体的剪胀参数不易获得, 即使对于同一种土, 由于土体

收稿日期: 2014-07-07

基金项目: 国家自然科学基金(41202193, 41272295); 广东省交通运输厅科技项目

第一作者: 赵春风(1964—), 男, 教授、博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为岩土工程的理论与应用. E-mail: tjzhchf@sohu.com

通讯作者: 贾尚华(1984—), 男, 博士生, 主要研究方向为桩基础和软土地基. E-mail: jiashanghua327@163.com

的密实程度不同,土体的剪胀特性也是不同的,因此应用有些难度.对于第二个问题,目前的文献资料多数只能给出扩孔后半径、塑性区半径与扩孔压力的关系式,从这些问题中难以获得扩孔压力和初始孔径的关系^[3,8-9,18,21-22].然而在实际问题中,只有知道初始孔径和扩孔后孔径之间的关系才能知道柱孔是扩孔还是缩孔.初始孔径和扩孔后孔径容易获得,从这两个已知条件出发求解柱孔扩张问题较为可行,因此研究初始孔径、扩孔后孔径与扩孔压力之间的关系比较重要.统一强度准则充分考虑了中间主应力效应,该理论系统性强,对于岩土材料适用性强^[23],结合相关联流动法则较容易得出柱孔扩张问题的解析解.

正是基于以上原因,本文使用统一强度屈服准则和相适应的流动准则求解柱孔周围弹性区、塑性区应力、位移的分布规律;并且得出了初始孔径、扩孔后孔径和扩孔压力三者之间的关系式,通过该关系式,只要已知初始孔径和扩孔后孔径就可得出扩孔压力.从而完善了柱孔扩张理论,为分析沉桩、压密注浆、静力触探等发生大变形的土工问题提供一些可供实际工程应用的土体变形和应力分布规律.

1 基本假定、力学模型及解答

无限半空间土体中轴对称的圆孔扩张问题,可视为完全排水条件下的平面应变问题,计算模型参见图 1.土体中初始应力各向同性均为 p_0 ,初始孔半径为 a_0 ,当均匀分布的内压力从 p_0 变为 p 时,孔半径由 a_0 变为 a ,随着内压力的不断增加,孔周围土体开始屈服,从原来整体弹性状态转变为同时含有弹性区和塑性区的弹塑性状态,此时塑性区半径为 r_p ,弹性与塑性区交界面位移为 u_p ,对应的径向应力为临塑压力 p_y ^[9].求解时,规定应力、应变以压为正,初

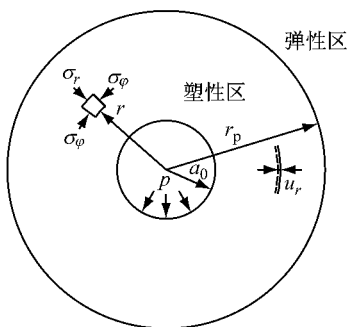


图 1 柱形扩张力学模型平面示意图
Fig.1 Mechanical model for expansion of cylindrical cavity

始孔半径为 a_0 简称为初始半径,扩孔后的孔半径 a 简称为扩孔半径, p 称为扩孔压力, p_0 称为扩孔压力极限值.

柱孔周围土体满足以下应力平衡微分方程:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 \tag{1}$$

式中: σ_r, σ_ϕ 分别为径向正应力和环向正应力.

弹性区的几何方程和物理方程为

$$\begin{cases} \epsilon_r = -\frac{du_r}{dr} \\ \epsilon_\phi = -\frac{u_r}{r} \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\phi \right) \\ \epsilon_\phi = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_\phi - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r \right) \end{cases} \tag{3}$$

式中: E 为弹性模量; ν 为泊松比.

平面应变条件下土的统一强度准则为^[24]

$$\begin{cases} F = \sigma_r - M\sigma_\phi - \sigma_0 = 0 \\ \sigma_r = M\sigma_\phi + \sigma_0 \\ M = \frac{2(1+b)(1+\sin \varphi) + mb(\sin \varphi - 1)}{[2(1+b) - mb](1 - \sin \varphi)} \\ \sigma_0 = \frac{4(1+b)c \cos \varphi}{[2(1+b) - mb](1 - \sin \varphi)} \end{cases} \tag{4}$$

式中: b 为统一强度理论中表征中主应力影响程度的参数,可由试验测定; m 为中主应力与大小主应力平均值的比值,在平面应变条件下,土体处于塑性时,通常 $m=1$; c 为土体的黏聚力; φ 为内摩擦角,由三轴压缩试验测得.公式(4)具体说明可参阅文献^[24].

应力边界条件为

$$\begin{cases} \sigma_{r(r=a)} = p \\ \sigma_{r(r \rightarrow \infty)} = p_0 \end{cases} \tag{5}$$

2 弹塑性解答

2.1 弹性区应力、应变及位移

当扩孔压力 p 增大,使孔壁土体产生屈服后,孔周围土体分为弹性区和塑性区,弹塑性界面处的临塑压力为 p_y .根据弹性理论由公式(1)~(3)和(5),得弹性区的应力、应变和位移场分别为^[24]

$$\begin{cases} \sigma_r = p_0 + (p_y - p_0) \left(\frac{r_p}{r} \right)^2 \\ \sigma_\phi = p_0 - (p_y - p_0) \left(\frac{r_p}{r} \right)^2 \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{1}{2G}(p_y - p_0)\left(\frac{r_p}{r}\right)^2 \\ \epsilon_\varphi = -\frac{1}{2G}(p_y - p_0)\left(\frac{r_p}{r}\right)^2 \\ u_r = \frac{p_y - p_0}{2G}\left(\frac{r_p}{r}\right)^2 r \end{cases} \quad (7)$$

式中: G 为剪切模量, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

2.2 塑性应力求解

将式(6)带入统一强度准则式(4), 则临塑压力 p_y 为

$$p_y = \sigma_{r(r=r_p)} = \frac{2Mp_0 + \sigma_0}{1+M} \quad (8)$$

塑性区应力同时满足应力平衡微分方程(1)和统一强度屈服准则式(4), 将式(4)带入式(1)得

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - (\sigma_r - \sigma_0)/M}{r} = 0$$

解之得

$$\sigma_r = K\left(\frac{1}{r}\right)^{(1-\frac{1}{M})} - \frac{\sigma_0}{M-1} \quad (9)$$

式中: K 为积分常数.

将塑性区应力边界条件式(5)第 1 式、式(8)带入式(9), 可得积分常数 K 为

$$K = \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}\right)r_p^{(1-\frac{1}{M})} = \left(p + \frac{\sigma_0}{M-1}\right)a^{(1-\frac{1}{M})} \quad (10)$$

则塑性区径向、环向应力为

$$\begin{cases} \sigma_r = \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}\right)\left(\frac{r_p}{r}\right)^{(1-\frac{1}{M})} - \frac{\sigma_0}{M-1} \\ \sigma_\varphi = \frac{1}{M}\left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}\right)\left(\frac{r_p}{r}\right)^{(1-\frac{1}{M})} - \frac{\sigma_0}{M-1} \end{cases} \quad (11)$$

由式(10)得

$$\frac{p + \frac{\sigma_0}{M-1}}{p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}}\left(\frac{a}{r_p}\right)^{(1-\frac{1}{M})} = 1 \quad (12)$$

由于式(12)中 p_y 是一个与初始应力、土体参数相关的常数, 因此式(12)可认为有 3 个未知数: r_p , a , p , 任知其中两个即可求得第三个.

联立公式(4), (6)和(11)可得柱孔扩张的弹塑性应力解为

$$\begin{cases} \sigma_r = \begin{cases} p_0 + (p_y - p_0)\left(\frac{r_p}{r}\right)^2, & r \geq r_p \\ \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}\right)\left(\frac{r_p}{r}\right)^{(1-\frac{1}{M})} - \frac{\sigma_0}{M-1}, & r_p > r \geq a \end{cases} \\ \sigma_\varphi = \begin{cases} p_0 - (p_y - p_0)\left(\frac{r_p}{r}\right)^2, & r \geq r_p \\ \frac{1}{M}\left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}\right)\left(\frac{r_p}{r}\right)^{(1-\frac{1}{M})} - \frac{\sigma_0}{M-1}, & r_p > r \geq a \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

2.3 塑性区应变、位移求解

柱孔塑性区土体屈服后, 采用相关联流动准则^[25]:

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (14)$$

将式(4)带入式(14)得

$$\begin{cases} d\epsilon_r^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_r} = d\lambda \\ d\epsilon_\varphi^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_\varphi} = -M d\lambda \\ d\epsilon_z^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

由式(15)第 1, 2 式可得

$$\frac{d\epsilon_r^p}{d\epsilon_\varphi^p} = -\frac{1}{M} \quad (16)$$

对式(16)两端进行积分, 根据初始屈服时各向塑性应变为零的条件, 得

$$\epsilon_r^p = -\frac{1}{M}\epsilon_\varphi^p \quad (17)$$

将式(15)中第 3 式积分得

$$\epsilon_z^p = A \quad (18)$$

式中: A 为积分常数.

因为土体在弹性和塑性屈服的临界点处各个方向的塑性应变都为 0, 因此 $\epsilon_z^p = 0$.

在平面应变条件下, 有

$$\epsilon_z = \epsilon_z^e + \epsilon_z^p = 0 \quad (19)$$

可见竖向弹性应变也为 0, 即

$$\epsilon_z^e = 0 \quad (20)$$

根据虎克定律, 有

$$\epsilon_z^e = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)] = 0 \quad (21)$$

得

$$\begin{cases} \epsilon_r^e = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_\varphi\right) \\ \epsilon_\varphi^e = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_\varphi - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_r\right) \end{cases} \quad (22)$$

将式(11)带入式(22), 得

$$\begin{cases} \epsilon_r^e = \frac{1}{2G}\left(1-\nu-\frac{\nu}{M}\right)\left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}\right)\left(\frac{r_p}{r}\right)^{(1-\frac{1}{M})} - \frac{1-2\nu}{2G}\frac{\sigma_0}{M-1} \\ \epsilon_\varphi^e = \frac{1}{2G}\left(\frac{1-\nu}{M}-\nu\right)\left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}\right)\left(\frac{r_p}{r}\right)^{(1-\frac{1}{M})} - \frac{1-2\nu}{2G}\frac{\sigma_0}{M-1} \end{cases} \quad (23)$$

无论弹性问题还是塑性问题都应满足变形协调

方程,轴对称荷载作用下的平面问题的的变形协调方程为

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dr} + \frac{\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r}{r} = 0 \quad (24)$$

塑性区的应变关系为

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p \\ \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^e + \varepsilon_\varphi^p \end{cases} \quad (25)$$

将式(17),(25)带入式(24)并化简得

$$\frac{d\varepsilon_\varphi^p}{dr} + \frac{\varepsilon_\varphi^p + \frac{1}{M}\varepsilon_\varphi^p}{r} + \frac{\varepsilon_\varphi^e - \varepsilon_r^e}{r} + \frac{d\varepsilon_\varphi^e}{dr} = 0 \quad (26)$$

式(26)是以 ε_φ^p 为因变量、 r 为自变量的一阶线性微分方程,其通解为

$$\varepsilon_\varphi^p = Cr^{-(1+\frac{1}{M})} + \frac{1-\nu}{4G} \left(M - \frac{1}{M} \right) \cdot \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(\frac{1}{M}-1 \right)} \quad (27)$$

塑性区边界 $r=r_p$ 处塑性应变为 0,则

$$C = -\frac{1-\nu}{4G} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) r_p^{\left(1+\frac{1}{M} \right)} \quad (28)$$

则塑性区的塑性应变为

$$\begin{cases} \varepsilon_r^p = \frac{1-\nu}{4GM} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1+\frac{1}{M} \right)} - \frac{1-\nu}{4GM} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1-\frac{1}{M} \right)} \\ \varepsilon_\varphi^p = -\frac{1-\nu}{4G} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1+\frac{1}{M} \right)} + \frac{1-\nu}{4G} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1-\frac{1}{M} \right)} \end{cases} \quad (29)$$

联立式(23)和式(29)即可得塑性区应变值

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1-\nu}{4GM} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1+\frac{1}{M} \right)} + \frac{1}{4GM} \left(M - M\nu - 2\nu + \frac{1}{M} - \frac{\nu}{M} \right) \cdot \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1-\frac{1}{M} \right)} + \frac{2\nu-1}{2G} \frac{\sigma_0}{M-1} \\ \varepsilon_\varphi = -\frac{1-\nu}{4G} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1+\frac{1}{M} \right)} + \frac{1}{4G} \left(M - M\nu - 2\nu + \frac{1}{M} - \frac{\nu}{M} \right) \cdot \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1-\frac{1}{M} \right)} + \frac{2\nu-1}{2G} \frac{\sigma_0}{M-1} \end{cases} \quad (30)$$

在以上的弹塑性应变求解过程中,通过关系式(3)和(30)求得的应变公式为总应变公式,而实际工

程中关心的是相对应变.即初始应力产生的应变在施工开始前已经存在,人们关心的是施工后相对于初始状态时的相对应变.因此将式(3)和(30)求得的应变减去一个初始应变即可获得相对应变.

初始应力产生的应变为

$$\varepsilon_r' = \varepsilon_\varphi' = \frac{1-2\nu}{2G} p_0 \quad (31)$$

将式(30)减去式(31)中对应的量即可得塑性区应变(相对应变).本文为了求解塑性区位移值,仅列出环向应变公式.

$$\varepsilon_\varphi = -\frac{1-\nu}{4G} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1+\frac{1}{M} \right)} + \frac{1}{4G} \left(M - M\nu - 2\nu + \frac{1}{M} - \frac{\nu}{M} \right) \cdot \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1-\frac{1}{M} \right)} + \frac{2\nu-1}{2G} \left(\frac{\sigma_0}{M-1} + p_0 \right) \quad (32)$$

将式(32)带入几何方程(2)得出塑性区位移公式为

$$u_r = -\varepsilon_\varphi r = \frac{1-\nu}{4G} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1+\frac{1}{M} \right)} r - \frac{1}{4G} \left(M - M\nu - 2\nu + \frac{1}{M} - \frac{\nu}{M} \right) \cdot \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{r} \right)^{\left(1-\frac{1}{M} \right)} r - \frac{2\nu-1}{2G} \left(\frac{\sigma_0}{M-1} + p_0 \right) r \quad (33)$$

2.4 初始半径、扩孔半径和扩孔压力之间的关系

柱孔孔口位移等于初始半径和扩孔半径的差,则

$$a - a_0 = u_a = \frac{1-\nu}{4G} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{a} \right)^{\left(1+\frac{1}{M} \right)} a - \frac{1}{4G} \left(M - M\nu - 2\nu + \frac{1}{M} - \frac{\nu}{M} \right) \cdot \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left(\frac{r_p}{a} \right)^{\left(1-\frac{1}{M} \right)} a - \frac{2\nu-1}{2G} \left(\frac{\sigma_0}{M-1} + p_0 \right) a \quad (34)$$

根据公式(10)可得

$$\left(\frac{r_p}{a} \right)^{\left(1-\frac{1}{M} \right)} = \frac{p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}}{p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}}$$

即

$$\frac{r_p}{a} = \left[\frac{p + \frac{\sigma_0}{M-1}}{p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}} \right]^{\frac{M}{M-1}} \quad (35)$$

将式(10)带入式(34)得

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a} = & 1 - \frac{1-\nu}{4G} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \cdot \\ & \left[\frac{p + \frac{\sigma_0}{M-1}}{p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}} \right]^{\frac{M+1}{M-1}} + \frac{1}{4G} \left(M - M\nu - 2\nu + \right. \\ & \left. \frac{1}{M} - \frac{\nu}{M} \right) \left(p + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) + \\ & \left. \frac{2\nu-1}{2G} \left(\frac{\sigma_0}{M-1} + p_0 \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

式(36)为扩孔压力 p 、初始半径 a_0 和扩孔半径 a 三者的关系式,同时可见柱孔扩孔压力是初始半径 a_0 和扩孔半径 a 比值的函数,并且式(36)为 p 的超越方程,只能采用数值解法求解 p 。

2.5 求解过程说明及扩孔压力极限值问题

从式(7)中的弹性位移公式分析可知,不论塑性区半径为多大,弹塑性界面处的位移为

$$u_{rp} = \frac{p_y - p_0}{2G} r_p \quad (37)$$

计算柱孔扩张问题的弹塑性解,首先应计算柱孔扩张是否进入塑性状态.如果弹塑性界面发生在孔口处,则

$$u_{rp} = u_{r(r=a)} = \frac{p_y - p_0}{2G} a = a - a_0 \quad (38)$$

如果柱孔扩张只在弹性状态,则

$$u_{r(r=a)} = \frac{p_y - p_0}{2G} a > a - a_0 \quad (39)$$

如果柱孔扩张进入弹塑性状态,必然存在

$$u_{rp} = \frac{p_y - p_0}{2G} r_p < a - a_0 \quad (40)$$

由于 $r_p > a$,则

$$u_{r(r=a)} = \frac{p_y - p_0}{2G} a < a - a_0 \quad (41)$$

对比式(39)与式(41),可见满足式(41)后,柱孔进入弹塑性状态,不满足式(41)则为弹性状态。

如柱孔扩张进入弹塑性阶段,已知初始孔径为 a_0 ,扩孔孔径为 a ,即可通过式(36)求出扩孔压力 p ,将 p 带入式(35)就可以求出塑性区半径 r_p ,然后将 r_p 及相关的已知参数带入前面的应力、应变和位移场公式就可得出柱孔扩张的解.如果已知 a_0 和 p ,通过式(36)求得 a ,将 a 带入式(35)就可求出 r_p ,进而可求得应力场、位移场等。

在打桩过程中,柱孔扩张是从 0 孔径开始的,因此式(36)右边为零,对于不为 0 的初始半径 a_0 ,扩孔半径为无穷大时式(36)右边才能为零,则

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1-\nu}{4G} \left(M - \frac{1}{M} \right) \left(p_y + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) \left[\frac{p + \frac{\sigma_0}{M-1}}{p_y + \frac{\sigma_0}{M-1}} \right]^{\frac{M+1}{M-1}} + \\ & \frac{1}{4G} \left(M - M\nu - 2\nu + \frac{1}{M} - \frac{\nu}{M} \right) \left(p + \frac{\sigma_0}{M-1} \right) + \\ & \left. \frac{2\nu-1}{2G} \left(\frac{\sigma_0}{M-1} + p_0 \right) = 0 \right) \end{aligned} \quad (42)$$

从式(42)计算出的扩孔压力即为扩孔压力极限值 p_u 。

上述推导过程为黏土中柱孔扩张问题的推导过程.砂土可以认为是黏聚力 $c=0$ 的黏土,因此砂土中柱孔扩张问题为黏土中的一个特例.根据屈服准则,对于砂土, $\sigma_0=0$.将 $\sigma_0=0$ 带入上面推导出的各个公式,即可得到砂土中应力场、应变场、位移场以及极限扩孔压力相关公式等。

通过上述推导和分析可知:只要已知土体参数、初始半径 a_0 、扩孔半径 a 和扩孔压力 p 之一,即可求得相关问题的应力场、位移场等。

4 参数分析及取值

从以上弹塑性应力场分析可知,必须满足

$$1 - \frac{1}{M} > 0 \quad (43)$$

即 $M > 1$ 恒成立,否则塑性区应力随半径的增加逐渐变大,不符合实际情况。

对于本文平面应变条件来说

$$M = \frac{2(1+b)(1+\sin\varphi) + mb(\sin\varphi-1)}{[2(1+b) - mb](1-\sin\varphi)} > 1 \quad (44)$$

当

$$1 + \sin\varphi > 1 - \sin\varphi \quad (45)$$

求解不等式得

$$M > \frac{[2(1+b) - mb](1-\sin\varphi)}{[2(1+b) - mb](1-\sin\varphi)} = 1$$

恒成立,得 $\sin\varphi > 0$

因此只要土体的内摩擦角 $\varphi > 0$,则柱孔扩张的弹塑性解成立。

夏桂云等^[26]利用大量试验结果,说明砂土和上海黏土统一强度理论参数 b 可以取为 0.50,原状黄土可以采用 1.00. $b=0.50$ 的统一强度准则近似为 D-P(Drucker-Prager)准则的一个替代者.石修松

等^[27]的研究表明,堆石料参数 b 为 0.25. 隋凤涛等^[28]的研究表明,粉土、粉质粘土、黏土统一强度参数 b 取 0~0.50. 但是该文的验证是采用计算出地基承载力和试验测试的地基承载力对比得出的,因此波动性较大.

经过上述讨论,稍做保守处理,可以认为散体状态的土体统一强度参数 b 取 0.25 较为合适.

俞茂宏等^[29]对于平面应变塑性状态下中主应力系数 m 提出了半经验半理论的推断,认为 $m \rightarrow 1$,因此取 $m=1$.

对于土体的 c, φ 可以通过三轴试验测得.

4 算例分析

假设各向同性的均质黏性土受到初始均匀土压力 p_0 的作用, $p_0 = 100$ kPa, 土的弹性模量 $E = 26$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 内摩擦角为 25° , 黏聚力为 20 kPa. 土体中存在一孔, 初始孔压力也为 p_0 . 计算得到柱孔扩张的临塑压力为 162.4 kPa, 扩孔压力极限值为 1642.5 kPa.

4.1 应力场、位移场

大部分论文是基于扩孔后的状态求解柱孔问题的,取文献[30]计算值与本文计算值进行对比. 本文算例的初始条件为:初始孔半径为 1.0 m, 扩孔后半径为 1.2 m, 经过式(35), (36) 计算得出扩孔压力为 776.6 kPa, 塑性区半径为 12.0 m; 文献[30]算例的初始条件为:扩孔后半径为 1.2 m, 扩孔压力为 776.6 kPa, 计算得塑性区半径为 12.5 m. 二者应力场、位移场对比结果见图 2、图 3.

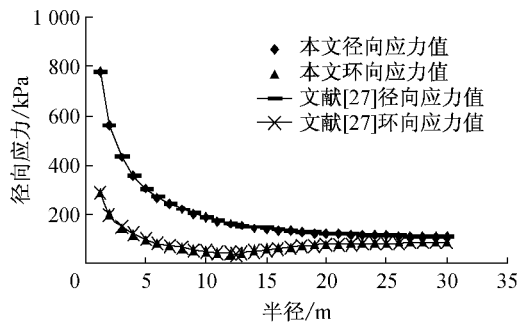


图 2 径向、环向应力沿径向的分布情况
Fig.2 Stresses distributions of cylindrical cavity

从图 2、图 3 可以看出,本文求解的应变场、位移场与文献[30]基本一致. 依据文献[30]计算求得的孔口初始半径为 0.99 m, 与本文算例初始半径 1.0 m 非常接近,因此本文的求解方法可靠性较强. 从图 2、3 可知,应力和径向位移随极坐标半径的增

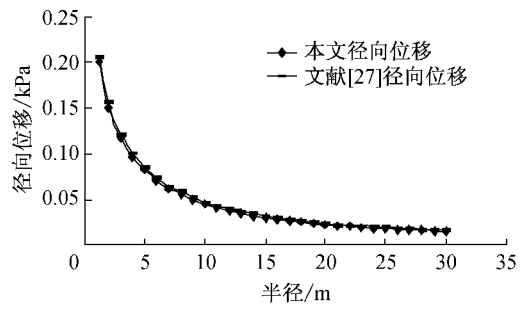


图 3 径向位移沿径向的分布情况
Fig.3 Displacement distributions of cylindrical cavity

加逐渐趋于定值,最终径向和环向应力趋于土体初始应力 p_0 , 径向位移随半径越来越小. 依据本文求解的环向应力在极坐标半径约为 12 m 的时候出现最小值,该最小值大于零,这个极值对应的正好为弹塑性分界面. 在弹性区的一侧因柱孔扩孔使环向应力逐渐减小,在界面处环向应力达到最小;对于塑性区的一侧,所有土体都满足屈服准则,环向应力和径向应力成正比,随着径向应力的变化而变化,因此也在弹塑性界面处最小.

4.2 扩孔半径对塑性区半径及扩孔压力的影响

图 4、图 5 给出了初始半径为 1.0 m 柱孔的扩孔半径对塑性区半径、孔壁径向压力(即扩孔压力 p) 的影响.

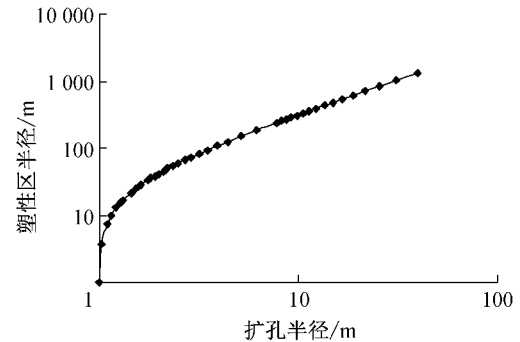


图 4 扩孔半径对塑性区半径的影响
Fig.4 Variations of r_p with a

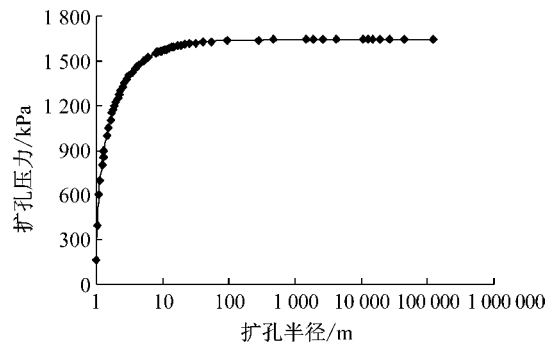


图 5 扩孔半径对扩孔压力的影响
Fig.5 Variations of p with a

图 4、5 反映了扩孔半径和塑性区半径、孔压 p 的一一对应关系。塑性区半径随扩孔半径的增长,起初增速较快,但到达一定值后其增长速率趋于一定值。孔压力随扩孔后孔半径的增长逐渐增长,但是增长速率不断减缓,最终趋于零。

5 结论

(1) 基于平面应变条件下土体的统一强度准则求解柱孔扩张问题,得出了柱孔扩张问题的弹塑性应力场基本公式;使用相关联流动准则求解出柱孔扩张问题的弹塑性应变、位移基本公式;依据孔口边界条件,推导出在孔周土体存在塑性屈服的前提下,扩孔压力 p 、柱孔初始半径 a_0 和扩孔半径 a 三者的关联公式,为求解柱孔扩张问题奠定基础,同时得到了塑性区半径 r_p 的关联公式。

(2) 针对柱孔扩张问题的复杂性,给出了求解柱孔扩张问题的具体求解过程。

(3) 基于统一强度准则参数的不确定性,根据相关文献总结了土体的统一强度理论参数取值。

(4) 推导了柱孔扩张问题的全应力场和全位移场,其中环向应力存在一个极小值,该极小值对应的位置正好为塑性区半径 r_p 。简要分析了扩孔半径对塑性区半径 r_p 、扩孔压力的影响。

参考文献:

- [1] Vesic A S. Expansion of cavities in infinite soil mass[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1972, 98(SM3): 265.
- [2] Yu H S. Cavity expansion methods in geomechanics [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 2000.
- [3] Cao L F, Teh C I, Chang M F. Undrained cavity expansion in modified Cam clay I: theoretical analysis[J]. Geotechnique, 2001, 51(4): 323.
- [4] 蒋明镜,沈珠江. 考虑材料应变软化的柱形孔扩张问题[J]. 岩土工程学报,1995,17(4):10.
JIANG Mingjing, SHEN Zhujiang. Expansion of cylindrical cavity of materials with strain-softening behaviour[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995,17(4):10.
- [5] 蒋明镜,沈珠江. 岩土类软化材料的柱形孔扩张统一解问题[J]. 岩土力学,1996,17(1):1.
JIANG Mingjing, SHEN Zhujiang. Unified solution to expansion of cylindrical cavity for geomaterials with strain-softening behaviour[J]. Rock and Soil Mechanics, 1996,17(1):1.
- [6] 蒋明镜,沈珠江. 考虑剪胀的线性软化柱形孔扩张问题[J]. 岩石力学与工程学报,1997,16(6):550.
JIANG Mingjing, SHEN Zhujiang. On expansion of cylindrical cavity with linear softening and shear dilatation behaviour [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1997,16(6):550.
- [7] 邹金锋,吴亚中,李亮,等. 考虑大变形和排水条件时柱孔扩张问题统一解析[J]. 工程力学,2010,27(6):1.
ZOU Jinfeng, WU Yazhong, LI Liang, et al. Unified elastic plastic solution for cylindrical cavity expansion considering large strain and drainage condition [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(6): 1.
- [8] 邹金锋,彭建国,张进华,等. 基于非线性 Mohr-Coulomb 强度准则下的扩孔问题解析[J]. 土木工程学报,2009,42(7):90.
ZOU Jinfeng, PENG Jianguo, ZHANG Jinhua, et al. Analytical solution of cavity expansion with the non-linear Mohr-Coulomb failure rule[J]. China Civil Engineering Journal, 2009, 42(7): 90.
- [9] 刘时鹏,施建勇,雷国辉. 基于 SMP 准则柱孔扩张问题相似解[J]. 岩土力学,2012,33(5):1375.
LIU Shipeng, SHI Jianyong, LEI Guohui. Similarity solutions of cylindrical cavity expansion based on SMP criterion [J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33(5): 1375.
- [10] 章定文,刘松玉,顾沉颖. 各向异性初始应力状态下圆柱孔扩张理论弹塑性分析[J]. 岩土力学,2009,30(6):1631.
ZHANG Dingwen, LIU Songyu, GU Chenying. Elastoplastic analysis of cylindrical cavity expansion with anisotropic initial stress[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(6): 1631.
- [11] 饶平平,李镜培,张常光. 考虑各向异性、剪胀和渗流的柱孔扩张问题统一解[J]. 岩土力学,2010,31(S2):79.
RAO Pingping, LI Jingpei, ZHANG Changguang. Unified solutions of cylindrical cavity expansion considering anisotropy, shear dilatation and seepage[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(S2): 79.
- [12] 肖昭然,张昭,杜明芳. 饱和土体小孔扩张问题的弹塑性解析解[J]. 岩土力学,2004,25(9):1373.
XIAO Zhaoran, ZHANG Zhao, DU Mingfang. An elastoplastic closed-form approach of cavity expansion in saturated soil based on modified Cam clay model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(9): 1373.
- [13] 胡伟,刘明振. 非饱和土中球形孔扩张的弹塑性分析[J]. 岩土工程学报,2006,28(10):1292.
HU Wei, LIU Mingzhen. Elastic-plastic solution of expansion of sphere cavity in unsaturated soils [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(10): 1292.
- [14] 刘维正,石名磊,徐林荣. 考虑软黏土结构性损伤的圆柱孔扩张弹塑性分析[J]. 岩土工程学报,2013,35(3):487.
LIU Weizheng, SHI Minglei, XU Linrong. Elastoplastic analysis of cylindrical cavity expansion in natural sedimentary soft clay with structure damage [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(3): 487.
- [15] 韩同春,豆红强. 柱孔扩张理论的空间轴对称解在沉桩挤土效应中的应用[J]. 岩石力学与工程学报,2012,31(S1):3209.
HAN Tongchun, DOU Hongqiang. Application of space axisymmetric solutions of cavity expansion to soil squeezing of pile driving [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 31(S1): 3209.
- [16] Cao L F, Teh C I, Chang M F. Analysis of undrained cavity expansion in elastoplastic soils with nonlinear elasticity[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in

- Geomechanics, 2002, 26(1): 25.
- [17] 刘时鹏, 施建勇, 雷国辉, 等. K0 固结饱和土柱孔扩张问题弹塑性分析[J]. 岩土力学, 2013, 34(2): 389.
LIU Shipeng, SHI Jianyong, LEI Guohui, *et al.* Elastoplastic analysis of cylindrical cavity expansion in K0 consolidated saturated soils [J]. Rock and Soil Mechanics, 2013. 34(2): 389.
- [18] 罗汀, 姚仰平, 松冈元. 基于 SMP 准则的土的平面应变强度公式[J]. 岩土力学, 2000, 21(4): 390.
LUO Ting, YAO Yangping, Matsuoka Hajime. Soil strength equation in plane strain based on SMP [J]. Rock and Soil Mechanics, 2000, 21(4): 390.
- [19] 迟明杰. 砂土的剪胀性及本构模型的研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2008.
CHI Mingjie. Study on the dilatancy and constitutive model of sand [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2008.
- [20] Ishihara K, Tatsuoka F, Yasuuda S. Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stress [J]. Soils and Foundations, 1975, 15(1): 29.
- [21] Wood D M. Soil behaviour and critical state soil mechanics [M]. New York: Cambridge University Press, 1990.
- [22] 罗承昌. 等主应力比路径砂土的弹塑性本构方程[D]. 武汉: 华中科技大学, 2006.
LUO Chengchang. Elastic-plastic constitutive model for sand under constant principal stress ratio path [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2006.
- [23] 俞茂宏. 强度理论新体系[M]. 2 版. 西安: 西安交通大学出版社, 2011.
YU Maohong. New system of strength theory [M]. 2nd ed. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2011.
- [24] 蔡春明, 莫斌, 聂春龙, 等. 饱和土体柱形扩孔时大变形不排水统一解析解[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(4): 827.
QI Chunming, MO Bin, NIE Chunlong, *et al.* Unified analytical solutions for cylindrical cavity expansion in saturated soil under large deformation and undrained conditions [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(4): 827.
- [25] 陈晓平, 杨光华, 杨雪强. 土的本构关系[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2011.
CHEN Xiaoping, YANG Guanghua, YANG Xueqiang. Constitutive relation of soils [M]. Beijing: China Water & Power Press, 2011.
- [26] 夏桂云, Yoshimine M, 宋丽. 统一强度理论对土质材料的实验验证和对比[C]//第一届全国岩土本构理论研讨会论文集. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2008: 354-360.
XIA Guiyun, Yoshimine M, SONG Li. Experimental verification and comparison of the unified strength theory for soils [C] // The First Geotechnical Constitutive Theory Seminar. Beijing: Beihang University Press, 2008: 354-360.
- [27] 石修松, 程展林. 堆石料平面应变条件下统一强度理论参数研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(11): 2244.
SHI Xiusong, CHENG Zhanlin. Unified strength theory parameters of rockfill material in plane strain state [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2011, 30(11): 2244.
- [28] 隋凤涛, 王士杰. 统一强度理论在地基承载力确定中的应用研究[J]. 岩土力学, 2011, 32(10): 3038.
SUI Fengtao, WANG Shijie. Research on application of unified strength theory to determining of bearing capacity of foundations [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(10): 3038.
- [29] 俞茂宏, 杨松岩, 刘春阳, 等. 统一平面应变滑移线场理论[J]. 土木工程学报, 1997, 30(2): 14.
YU Maohong, YANG Songyan, LIU Chunyang, *et al.* Unified plane-strain slip line field theory system [J]. China Civil Engineering Journal, 1997, 30(2): 14.
- [30] YU Haisui. 岩土介质小孔扩张理论[M]. 周国庆, 等译. 北京: 科学出版社, 2013.
YU Haisui. Cavity expansion methods in geomechanics [M]. Translated by Zhou guoqing, *et al.* Beijing: Science Press, 2013.