

结构动力稳定性判定新准则

李 杰^{1,2}, 徐 军¹

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

摘要: 利用非线性弹簧模型分析了静力失稳与动力失稳的区别, 指出拟静力刚度准则不能用于判定结构动力稳定. 给出了结构动力系统特征能量的概念, 发现结构动力失稳源于结构特征能量超过输入到结构中的总能量, 由此提出了一种判定结构动力稳定性的新准则. 实例分析表明, 本文建议的准则可以准确分析并判定结构在任意动力荷载激励下的动力失稳.

关键词: 结构动力稳定; 切线刚度; 特征能量; 输入总能量; 判定准则

中图分类号: TU311

文献标志码: A

Novel Criterion for Identification of Dynamic Stability of Structures

LI Jie^{1,2}, XU Jun¹

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: In this paper, the differences between static instability and dynamic instability are explored with the aid of a nonlinear spring model. It is pointed out that the dynamic instability of structures can not be identified by the pseudo static stiffness criterion. The concept of intrinsic energy of system is then put forward and it is found that the essence of dynamic instability of structures lies in that the intrinsic energy surpasses the energy imported into the structure, where a novel criterion for the identification of dynamic instability of structures is proposed accordingly. The relevant numerical computations indicate that the proposed criterion can analyze and judge the dynamic instability of structures subjected to arbitrary dynamic loadings effectively.

Key words: dynamic stability; tangent stiffness; intrinsic energy; input energy; identification criterion

稳定问题是结构工程研究中的一个重要问题. 结构稳定性虽然有不同的定义, 但概略来讲, 是研究系统在外界微小干扰时, 系统状态的变化是否也不超出预期范围的问题. 如果在微小干扰下, 系统的状态发生了较大变化并超出了预期范围, 则称为系统失稳^[1-3].

在实际工程中, 结构会遭受地震、强风、波浪等灾害性动力作用的影响. 在灾害性动力作用下, 结构可能会发生动力失稳甚至倒塌. 事实上, 结构的动力失稳可由参数激振、自激振动、共振或强迫振动所诱发, 对应的动力失稳现象有大振幅的振动或者动力逃逸(跳跃)运动^[4-6].

本文首先简要评述了已有的动力稳定研究成果, 然后利用一类非线性弹簧模型, 详细分析了动力失稳的机理与特点. 从动力系统能量变化角度考察结构动力稳定问题, 发现若结构特征能量始终小于外部输入到结构中的总能量, 则结构是动力稳定的. 据此, 提出了一类结构动力稳定状态的新判据, 并采用典型动力失稳案例验证了所提准则的有效性.

1 结构动力稳定性研究现状

根据荷载的类型, 结构的动力稳定性问题可分为冲击荷载作用下的动力稳定、周期荷载作用下的动力稳定、任意激励(如地震动、脉动风等)作用下的动力稳定. 目前, 虽然已经发展了各种各样的动力失稳判别准则, 但是对动力稳定性的本质及机理却没有达成统一的认识. 这里, 仅对已经提出的主要动力失稳判别准则进行总结与评述.

第一类动力稳定问题是在冲击荷载作用下的结构稳定问题. 迄今较有影响的判定准则包括 B-R 运动准则、Hsu(徐皆苏)能量准则、Simitses 总势能原理、王仁能量准则等. 这些准则建立的前提是保守系

统,推广至非保守系统的合理性仍未得到解决.在实际应用中,这些方法存在不同的限制条件^[1].

第二类动力稳定问题是在周期荷载作用下的动力稳定问题,动力失稳的典型形式有共振、参数共振及强迫与参数联合共振失稳等.一般来说,这类问题可以 Lyapunov 理论为基础求解^[2,6].但值得注意的是,目前所得到的结果大多针对简单结构,对于复杂的强非线性系统,应用 Lyapunov 准则判定系统稳定性是困难的.

Lyapunov 稳定的定义来自于周期激励,若将该

定义推广至其他荷载形式,得出的结果有可能是 inaccurate.因此,对于在任意激励下的结构非线性动力稳定问题,惟一的途径是求取结构的时程响应,并据此判定结构的动力稳定性.通常,可以依据结构切线刚度的某种特征量变化来判别任意荷载作用下的动力稳定性,称之为拟静力刚度准则^[7-9].对于大型复杂结构,则可通过构造与刚度性质密切相关的隐式物理量(总势能变化量或应变能变化量)来判断结构切线刚度的变化,其本质是拟静力刚度准则^[10].

结构动力稳定性判定准则如图 1 所示.

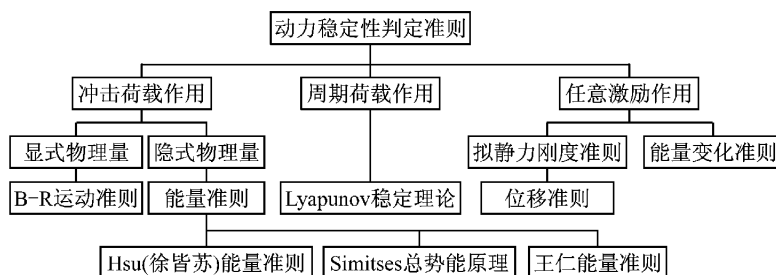


图 1 动力稳定性判定准则

Fig.1 Criteria for identification of dynamic stability

2 动力失稳与静力失稳的本质区别

以跳跃型失稳为例,采用如图 2 所示的非线性弹簧模型,说明静力失稳与动力失稳的本质区别.在图 2 所示模型中,小球无质量且其初始位置位于 O 点;非线性弹簧的承载力为 $f(x)$,其变化规律如图 3 所示,最大承载力与最小承载力分别为 P_0 和 $-P_0$. (图 3 为跳跃型失稳的典型荷载-位移曲线);小球所受外荷载为 $P(t)$,方向如图 2 所示.假定小球一直沿着合力方向运动.

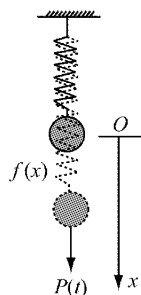


图 2 非线性弹簧模型

Fig.2 Nonlinear spring model

静力作用的特征是作用在小球上的外荷载不随时间变化,即 $P(t) = P_0 + \Delta P, \Delta P \rightarrow 0$ (见图 4).此时,弹簧受力过程可描述如下:

(1) 若 $\Delta P \leq 0$,则 $P(t) \leq P_0$,意味着外荷载始

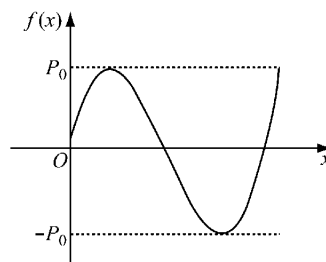


图 3 非线性弹簧承载力变化

Fig.3 Variation of nonlinear bearing capacity with displacement

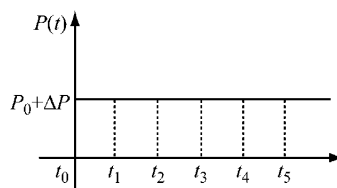


图 4 静力作用

Fig.4 Static load

终不会超过小球的极限承载力.在初始时刻 t_0 ,由于只有外力作用,小球的位移不断增大,弹簧承载力也随之增大,直至与外力相平衡(图 5 中 A 点左侧).在该过程中,切线刚度始终为正.

(2) 若 $\Delta P > 0$,则 $P(t) > P_0$.在 t_0 到 t_1 时刻,小球从 O 点运动到 A 点,由于此时作用在小球上的力是不平衡的,合力方向与外荷载一致,导致小球的位移继续增大,弹簧出现软化并使承载力下降,从而

作用在小球上的合力进一步增大,并且方向不发生变化.在A点(t_1 时刻)后,随着小球位移的不断增加,非线性弹簧的承载力逐渐减至零,然后在 t_2 至 t_3 时刻反向增至C点处.此后,弹簧从C点到D点反向软化(t_3 至 t_4 时刻).在 t_4 时刻,弹簧承载力在D点处再次变向,直至弹簧的承载力在E点处再次与外荷载相平衡.

从上述整个过程可以看到,自A点后到重新平衡,小球的合力方向始终保持不变(即与外力方向一致).同时,从A点转换到E点的整个过程通常是非常短暂的,可观察到小球的跳跃失稳现象,跳跃现象发生的标志是弹簧开始出现软化(即切线刚度开始负定).分析可知,静力失稳的发生与切线刚度出现负定是等价的.静力失稳的“动态过程”如图5所示.

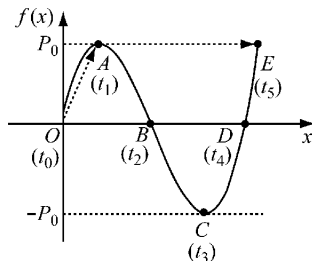


图5 静力失稳的动态过程

Fig.5 Dynamic process of static instability

对于动力过程,作用在小球上的外荷载随时间发生变化.为简计,考虑如图6所示的阶跃荷载.此时,外荷载且 $\Delta P \rightarrow 0$ 为阶跃性变化.弹簧受力过程将表现出完全不同的特征,描述如下:

(1) 从初始时刻 t_0 到 t_1 时刻,设 $P(t) = P_0 + \Delta P$, $\Delta P \leq 0$,则弹簧内力逐步增大至其临界承载力 P_0 (A点),由于处于临界平衡状态,弹簧有软化的趋势,切线刚度趋于小于零的方向.

(2) 在 t_1 时刻外荷载发生突变(卸载),弹簧内力方向随之发生突变且与 x 方向相反.随时间增加,弹簧回缩,小球位移减小,其位置从 t_1 时刻的A点回运动到 t_2 时刻的B点,如图7所示.

(3) 在 t_2 时刻,外荷载再次发生突变(加载),弹簧内力方向随之发生突变且与 x 方向相同.若 $P(t) = P_0 + \Delta P$, $\Delta P > 0$,则到 t_3 时刻,外荷载始终大于弹簧的临界承载力,弹簧发生软化(即切线刚度为负).在 t_3 时刻,小球位于图7中的C点.

(4) 在 t_3 时刻再次撤去外荷载,小球将回缩至图7中的D点.从 t_3 时刻到 t_4 时刻,弹簧内力方向与 x 方向相反.

(5) 在 t_4 时刻再次施加外荷载,弹簧内力方向

再次与方向相同.此后,若一直施加外荷载,则弹簧内力方向将不再发生改变,因而小球的合力方向与外荷载方向一致.从 t_4 到 t_7 时刻,小球位移持续增大,并可以观察到小球从D点到G点的跳跃失稳现象.

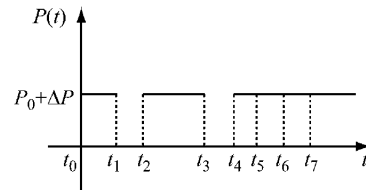


图6 阶跃荷载

Fig.6 Step load

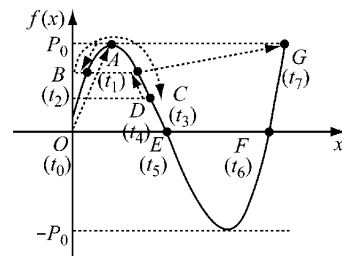


图7 动力失稳动态过程

Fig.7 Dynamic instability process

从图7中可以看到,动力失稳发生在D点,而非在可能出现负刚度的A点.切线刚度出现负定与发生动力失稳并不是等价的.

若作用于小球上的动力荷载为不断反复变化方向的动力荷载(如地震动),则即使考虑阻尼力与惯性力,小球合力的方向也将不停地发生变化,直到合力方向持续一致,促使小球位移迅速增大,才会发生动力失稳.极值型失稳与跳跃型失稳的根本区别在于,后者发生失稳后,弹簧的承载力将会一直反向增强,而不会像前者那样出现反向软化并再次回复到正向承载力的过程;两者的相似点在于,发生失稳后,小球合力的方向将始终不变.

以上分析表明,结构动力稳定性的判别,不仅与结构自身特性有关,亦与作用在结构上的动力荷载有关.因此,需要综合考虑结构特性与外部荷载特征来判定结构的动力稳定性.

3 动力稳定性判定的新准则

对于非线性动力系统,结构系统发生动力失稳的本质在于:在振动过程中,除去结构动能、阻尼耗能吸收一部分能量外,结构非线性恢复力将耗散或吸收大量能量,如果输入到结构中的总能量与上述

耗能总量相平衡,则结构是动力稳定的;反之,如果输入的能量小于上述总耗能,则必然在结构内部存在其他的吸收能量过程,结构将在系统吸收能量总量大于结构总输入能量的时刻发生突变,即发生动力失稳.换言之,动力失稳的本质是结构振动过程中所消耗的能量大于输入系统的能量.

不失一般性,可以将结构等效为前文中的非线性弹簧模型,且将惯性力和阻尼力也视为施加在弹簧上的外荷载,则在动力作用的任一时刻 t , 即时广义外力做功可以表述为

$$W_{\text{ext}}(t) = (\mathbf{F}(t) - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t))^T \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{F}(t)$ 为结构遭受的任意外激励; \mathbf{M} 和 \mathbf{C} 分别为质量矩阵与阻尼矩阵; $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ 和 $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ 分别为时刻 t 的结构位移、速度及加速度响应.

显然,在动力过程 $[0, t]$ 时段内,非线性弹簧内力累积做功为

$$W_{\text{int}}(t) = \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{u}, t) d\mathbf{u} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ 为结构非线性恢复力的表达式. 特别地,对于弹性结构,内力功与应变能是等价的,若引入有限单元法,则

$$W_{\text{int}}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T(t) \boldsymbol{\varepsilon}(t) dV \quad (3)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}(t)$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ 分别为结构单元的应力、应变向量; V 表示每个单元的体积; n 为结构的总单元数目. 即时广义外力功与系统累积内力功之差为

$$W(t) = W_{\text{ext}}(t) - W_{\text{int}}(t) = (\mathbf{F}(t) - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t))^T \mathbf{u}(t) - \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{u}, t) d\mathbf{u} \quad (4)$$

显然, $W(t)$ 表征了系统能量的变化量,其绝对值应对应于系统内能量的变化,因此可以定义系统特征能量为

$$E_{\text{intr}}(t) = |W(t)| \quad (5)$$

另一方面,在动力过程 $[0, t]$ 时段内,输入到结构中的总能量为

$$E_{\text{in}}(t) = \int_0^t \mathbf{F}^T(t) \dot{\mathbf{u}}(t) dt + E_0 \quad (6)$$

式(6)中,等号右端第1项为外荷载输入到结构中的能量,第2项为初始时刻输入到系统中的能量.

可以发现,在任意动力荷载作用下,当结构特征能量小于输入到结构中的总能量时,结构系统始终保持动平衡状态,结构系统保持动力稳定;反之,结构系统发生动力失稳. 表达式如下所示:

$$E_{\text{intr}}(t) \leq E_{\text{in}}(t), \quad \text{动力稳定} \quad (7)$$

$$E_{\text{intr}}(t) > E_{\text{in}}(t), \quad \text{动力失稳} \quad (8)$$

结构动力失稳是指结构在动力荷载作用下不能继续保持动平衡状态,产生远离稳定振动位置的“逃逸运动”. 上述结果表明:一旦系统特征能量超过输入到结构中的总能量,结构将借助系统常规耗能之外的其他方式吸收能量,以弥补系统耗能与输入总能量之间的差距,这一吸收能量过程将致使结构系统的动平衡状态不能继续维持,结构系统丧失动力稳定性.

进一步,可以定义动力稳定性函数如下:

$$S(t) = E_{\text{in}}(t) - E_{\text{intr}}(t) \quad (9)$$

显然,当 $S(t) \geq 0$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立时,结构保持动力稳定;当首次出现 $S(t) < 0$ 时,结构将发生动力失稳.

上述准则同时考虑了动力系统的外部荷载和结构特征,反映了动力失稳机理,可以预测结构发生动力失稳的时刻.

4 实例分析

为验证上述准则的正确性,分析了不同的标准案例和实际结构,限于篇幅,这里仅给出了两个分析实例.

4.1 两杆桁架

考虑如图8所示的两杆桁架系统. 结构参数为:弹性模量 $E = 2.1 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, 杆件横截面积 $A = 0.1 \text{ m}^2$, 半跨长度 $L = 1 \text{ m}$, 高度 $H = 0.5 \text{ m}$, 密度 $\rho = 110 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, 阻尼 $c = 0.2 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$. 外部激励 $F(t) = P_0 + P_1 \sin(\omega t)$, 其中 ω 为激励频率, P_1 为正弦荷载幅值. 结构的荷载-位移曲线如图9所示.

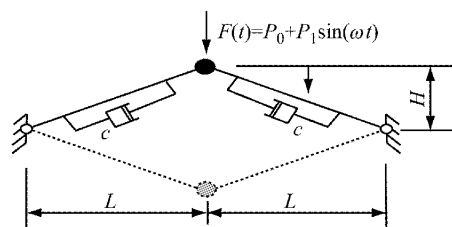


图8 两杆桁架系统动力模型
Fig.8 Two-bar truss model

工况1: $P_0 = 600 \text{ N}$, $P_1 = 300 \text{ N}$, $\omega = 0.5\omega_0$, ω_0 为结构基频,初始条件均为零.

图10所示为结构动力响应时程. 可以看到,结构位移响应并未发生很大的变化,而切线刚度却在“零线”附近不断地来回跳跃(见图11),说明合力的

方向在不断地发生变化. 因此,切向刚度的负定并不意味着结构一定会发生动力失稳.

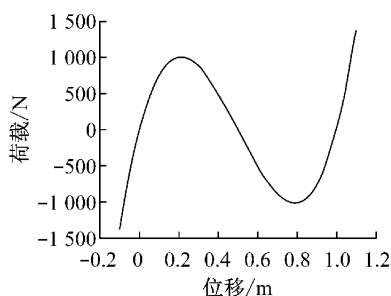


图9 两杆桁架荷载-位移曲线(工况1)

Fig.9 Load-displacement relationship of two-bar truss (Case 1)

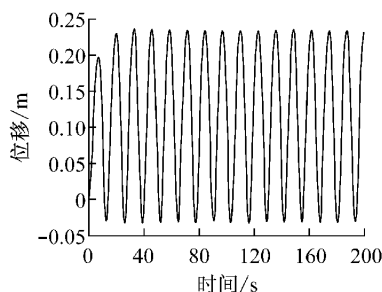


图10 两杆桁架结构位移响应(工况1)

Fig.10 Displacement of two-bar truss(Case 1)

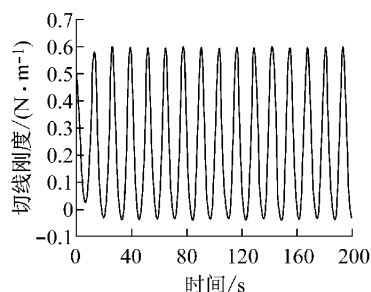


图11 两杆桁架结构切线刚度(工况1)

Fig.11 Tangent stiffness of two-bar truss(Case 1)

图12为系统输入总能量与特征能量的关系图. 从图12可以看到,在动力作用下,结构特征能量变化较小,始终在总能量的“管辖”范围之内,从而结构是动力稳定的.

工况2: $P_0=600\text{ N}$, $P_1=600\text{ N}$,其余条件不变. 分析结果见图13~15. 图14中,切线刚度在5s附近就已经出现小于零的现象,但在位移曲线图13中,5s时结构仍处于稳定状态. 从图15中的能量关系可以看到,系统特征能量在55s处发生了较大变化,并且超过输入到结构中的总能量,这与结构位移响应信息是吻合的.

值得注意的是,发生动力失稳后,系统特征能量

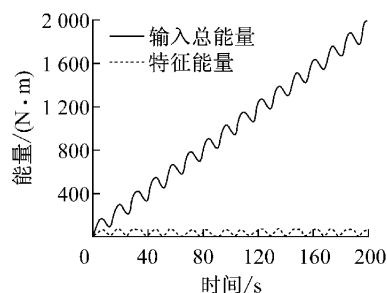


图12 两杆桁架输入总能量与特征能量(工况1)

Fig.12 Input energy and intrinsic energy of two-bar truss (Case 1)

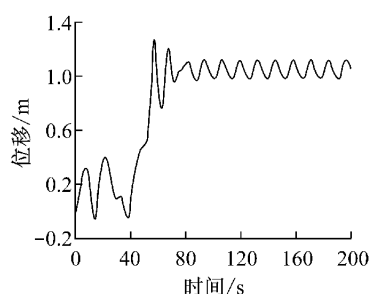


图13 两杆桁架结构位移响应(工况2)

Fig.13 Displacement of two-bar truss (Case 2)

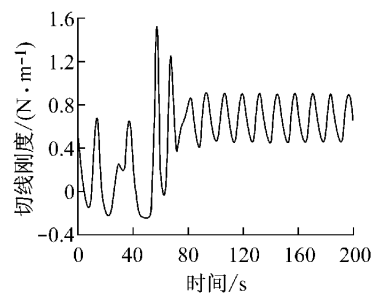


图14 两杆桁架结构切线刚度(工况2)

Fig.14 Tangent stiffness of two-bar truss (Case 2)

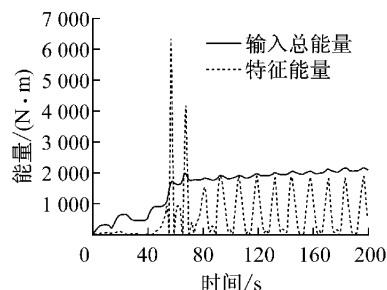


图15 两杆桁架输入总能量与特征能量(工况2)

Fig.15 Input energy and intrinsic energy of two-bar truss (Case 2)

再次小于输入到结构中的总能量,这就意味着结构会在新的平衡位置稳定,这也是跳跃型失稳的典型特点.

4.2 穹顶网壳结构

图 16 所示为穹顶网壳结构,其基本参数如表 1 所示.

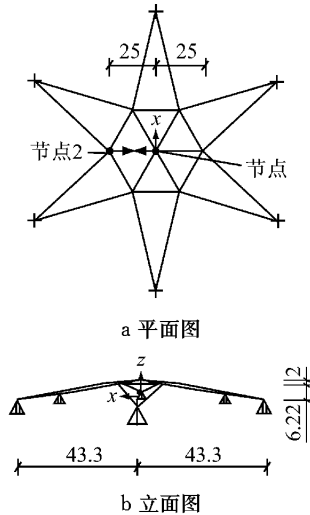


图 16 穹顶网壳(单位:cm)
Fig. 16 Lattice dome (unit:cm)

表 1 穹顶网壳结构参数

结构参数	取值
弹性模量/($\text{N} \cdot \text{cm}^{-2}$)	303 000
密度/($\text{kg} \cdot \text{cm}^{-3}$)	2.508 5
杆件截面积/ cm^2	3.24
泊松比	0.3

以 El centro 地震波南北分量作为竖向地震动激励,结构的动力响应信息如图 17~19 所示.

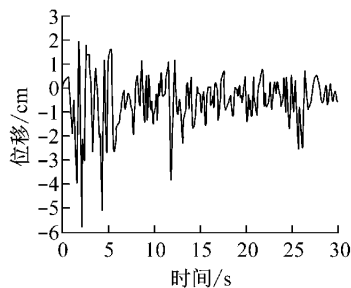


图 17 穹顶网壳节点 1 位移响应(动力稳定)
Fig. 17 Displacement of node 1 for lattice dome (dynamic stability)

可以看到,由于系统特征能量始终小于输入到结构中的总能量(见图 19),结构位移响应并未超出预期范围,系统保持动力稳定状态.

其次,仍然将 El centro 地震波南北分量作为竖向地震动激励,但将激励的幅值调大至其原始值的 2 倍,结构动力响应信息如图 20~22 所示.

在图 20 中,节点 1 的位移响应有明显的动力跳跃行为;在图 21 中,特征节点荷载-位移曲线出现了

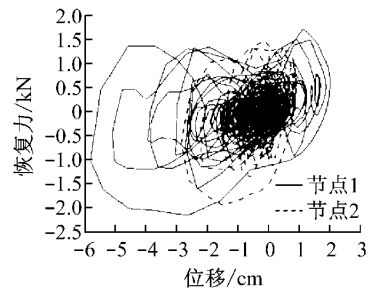


图 18 穹顶网壳特征节点荷载-位移关系(动力稳定)
Fig. 18 Relationship between displacement and restoring force of characteristic nodes for lattice dome (dynamic stability)

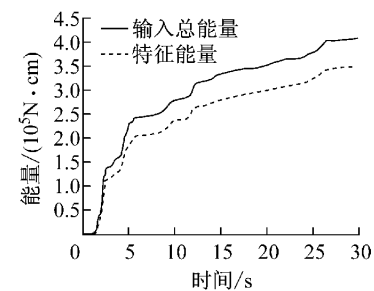


图 19 穹顶网壳输入总能量与特征能量(动力稳定)
Fig. 19 Input energy and intrinsic energy for lattice dome (dynamic stability)

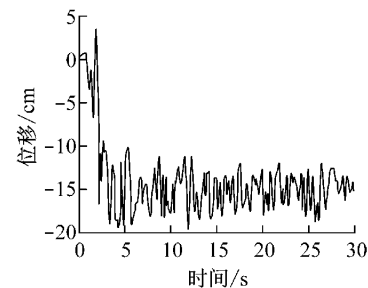


图 20 穹顶网壳节点 1 位移响应(动力失稳)
Fig. 20 Displacement of node 1 for lattice dome (dynamic instability)

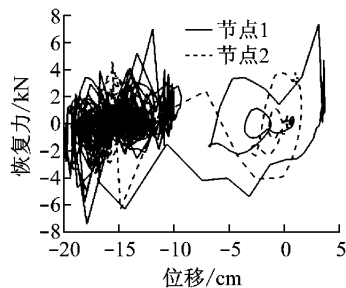


图 21 穹顶网壳特征节点荷载-位移关系(动力失稳)
Fig. 21 Relationship between displacement and restoring force of characteristic nodes for lattice dome (dynamic instability)

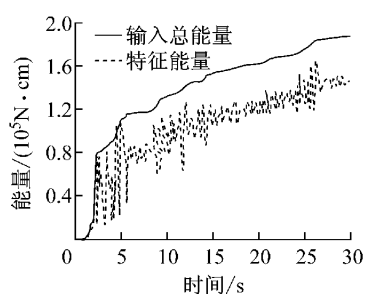


图22 穹顶网壳输入总能量与特征能量(动力失稳)

Fig.22 Input energy and intrinsic energy for lattice dome (dynamic instability)

两个吸引子. 根据本文建议的动力稳定性准则,可以判断该结构在 2.52 s 时发生了整体动力失稳,这恰与图 20 的位移响应结果互为印证,再次验证了本文建议准则的有效性. 同时,发生动力失稳后,系统特征能量再次小于输入到结构中的总能量,意味着结构在新的平衡位置形成稳定的振动状态,这又与图 21 的结果互为印证.

5 结语

本文回顾了既有的动力失稳判定准则及其存在的问题,并利用非线性弹簧模型分析了静力失稳与动力失稳的本质区别,指出切线刚度的负定性不等价于结构发生动力失稳. 研究动力失稳问题,必须同时考虑动力系统的结构特征和外部荷载特征. 动力失稳的本质在于系统特征能量超出了输入到结构中的总能量,据此提出了一种新的动力稳定性判断准则. 实例分析表明,本文建议准则不仅能准确判断结构发生动力失稳与否,还能给出结构发生动力失稳的时刻.

参考文献:

[1] 韩强. 弹塑性系统的动力屈曲与分叉[M]. 北京: 科学出版

社, 2000.

HAN Qiang. Dynamic buckling and bifurcation of elastoplastic system[M]. Beijing: Science Press, 2000.

[2] Xie W C. Dynamic stability of structures[M]. Cambridge, Eng.: Cambridge University Press, 2005.

[3] 鲍洛金. 弹性体系的动力稳定性[M]. 林砚田, 译. 北京: 高等教育出版社, 1960.

Bolotin V. Dynamic stability of elastic system [M]. LIN Yantian, trans. Beijing: Higher Education Press, 1960.

[4] 罗永峰, 韩庆华, 李海旺. 建筑钢结构稳定理论与应用[M]. 北京: 人民交通出版社, 2010.

LUO Yongfeng, HAN Qinghua, LI Haiwang. The theory and application of stability of steel structure [M]. Beijing: China Communications Press, 2010.

[5] 王策, 沈士钊. 单层球面网壳结构动力稳定分析[J]. 土木工程学报, 2000, 33(6):17.

WANG Ce, SHEN Shizhao. Dynamic stability of single layer reticulated dome[J]. China Civil Engineering Journal, 2000, 33(6):17.

[6] Lasallae J, Lefschetz S. Stability by Lyapunov's direct method with applications[M]. New York: Academic Press, 1960.

[7] 李忠学, 沈祖炎, 邓长根. 杆系钢结构非线性动力稳定性识别与判定准则[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2000, 28(2): 148.

LI Zhongxue, SHEN Zuyan, DENG Changgen. Identification and judgement criteria of nonlinear dynamic stability in lattice steel structures [J]. Journal of Tongji University: Nature Science, 2000, 28(2):148.

[8] 李忠学, 李元齐, 严慧, 等. 结构非线性动力稳定研究中的关键问题[J]. 空间结构, 2000, 6(4):29.

LI Zhongxue, LI Yuanqi, YAN Hui, et al. Note on pinch points in nonlinear dynamic stability analysis of large-span space structures[J]. Spatial Structures, 2000, 6(4):29.

[9] 沈祖炎, 叶继红. 运动稳定性理论在结构动力分析中的应用[J]. 工程力学, 1997, 14(3):21.

SHEN Zuyan, YE Jihong. Structural dynamic by motion stability[J]. Engineering Mechanics, 1997, 14(3):21.

[10] 张其林, Peil U. 任意激励下弹性结构的稳定分析[J]. 土木工程学报, 1998, 31(1):26.

ZHANG Qilin, Peil U. Numerical analysis of dynamic stability of elastic truss structures[J]. China Civil Engineering Journal, 1998, 31(1):26.