

单调型非线性椭圆问题的边残量型后验误差估计

郭利明, 黄自萍, 王 琤

(同济大学 数学系, 上海 200092)

摘要: 针对单调型非线性椭圆问题, 研究了线性协调有限元的边残量型后验误差估计. 在真解 u 仅具有 $H^1(\Omega)$ 正则性的情况下, 证明了边残量在后验误差估计中是占优的, 并得到了自适应有限元方法的 H^1 -范数误差可计算的上下界. 不计高阶项, 边残量可作为线性协调有限元的后验误差估计子. 数值算例验证了该边残量型后验误差估计子的有效性.

关键词: 后验误差估计; 单调型; 非线性椭圆问题; 边残量
中图分类号: O241.8 **文献标志码:** A

A Posteriori Error Estimates of Edge Residual Type of Finite Element Method for Monotone Nonlinear Elliptic Problems

GUO Liming, HUANG Ziping, WANG Cheng

(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The edge residual-based a posteriori error estimates of conforming linear finite element method are studied for the monotone nonlinear elliptic problems. Under the assumption of $u \in H^1(\Omega)$, we prove that the edge residuals dominate a posteriori error estimates, and obtain the computable global upper and local lower bounds on the error of the adaptive finite element method in H^1 -norm. Up to higher order terms, edge residuals can be a posteriori error estimators. Numerical examples show the efficiency of the edge residual-based a posteriori error estimators.

Key words: a posteriori error estimates; monotone; nonlinear elliptic problems; edge residuals

最优收敛阶. 自适应有限元方法^[3]通过计算每个单元上的后验误差子, 获得每个单元的误差范围, 从而对网格进行局部加密或放粗, 提高了计算效率, 因此在科学和工程计算中有着十分重要的应用价值.

后验误差估计子通常被作为自适应有限元方法中网格加密或者放粗的指示子. 线性椭圆方程的后验误差估计已经被广泛地研究^[4-5]. 近年来, 非线性问题的后验误差估计也是学者关注的重点, Verfürth^[5]给出了非线性方程后验误差估计的一般框架, Fierro 等^[6]研究了给定平均曲率方程的残量型的后验误差估计, Demlow^[7]考虑了更为一般的非线性椭圆方程, 给出了 $\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\infty}$ 的残量型后验误差估计. Liu 等^[8]研究了非单调型非线性问题的基于超收敛性质的后验误差估计子. 对于上述提到的残量型的后验误差估计子, 通常包含两个部分: 内部残量和边残量. 文献[9]分析了线性问题的最低阶协调有限元的后验误差估计, 证明了边残量在后验误差估计中是占优的. 对于非单调型非线性椭圆问题, 文献[10]假设 $u \in H_0^1(\Omega) \cap W^{2,\infty}(\Omega)$, 证明了在最低阶有限元方法的后验误差估计中, 边残量也是占优的.

本文考虑单调型非线性椭圆问题. 在真解 u 仅具有 $H^1(\Omega)$ 正则性的情况下, 证明了边残量在最低阶有限元的后验误差估计中是占优的. 主要技巧在于利用单调算子的性质, 将误差分成了两个部分, 然后分别对误差的两个部分进行了估计. 文中字母 C 表示不依赖于网格尺寸的正常数, 在不同地方可能取值不同.

1 预备知识

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是一个有界的多边形区域. 考虑下面非线性椭圆问题:

对于二阶椭圆问题, 当真解 $u \in H^2(\Omega)$ 时, 其相应的 H^1 和 L^2 范数的收敛性已经有了比较成熟的理论^[1-2]. 但是在求解实际问题时, 经常会遇到解具有局部奇性, 使得采用标准有限元方法求解, 达不到

收稿日期: 2014-07-30

基金项目: 国家自然科学基金(11101311); 中德教席基金(0900101021)

第一作者: 郭利明(1988—), 女, 博士生, 主要研究方向为偏微分方程数值解. E-mail: guoliming07@126.com

通讯作者: 黄自萍(1961—), 男, 理学博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为偏微分方程数值解. E-mail: huangziping@tongji.edu.cn

$$\begin{cases} L(u) := -\nabla \cdot \mathbf{a}(x, \nabla u) = f & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (1)$$

其中 $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{a}(x, \mathbf{y}) = \lambda(x, |\mathbf{y}|) \mathbf{y} = (a_1(x, \mathbf{y}), a_2(x, \mathbf{y}))^T$. 为了简便起见, 假设 $\lambda(x, |\mathbf{y}|)$ 仅依赖于 \mathbf{y} , 下面将用 $\lambda(|\mathbf{y}|)$ 和 $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ 分别代替 $\lambda(x, |\mathbf{y}|)$ 和 $\mathbf{a}(x, \mathbf{y})$. 本文采用标准的索伯列夫空间记号^[1]. 对于 $D \subseteq \Omega$, 分别记 $W^{k,p}(D)$ 的范数和半范数为 $\|\cdot\|_{k,p,D}$ 和 $|\cdot|_{k,p,D}$. 当 $p=2$ 和 $D=\Omega$, $\|\cdot\|_{k,2,D} = \|\cdot\|_{k,D}$, $|\cdot|_{k,p,\Omega} = \|\cdot\|_{k,p}$, $\|\cdot\|_{k,2,\Omega} = \|\cdot\|_k$.

问题(1)的弱解是找 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$A(u; u, v) = f(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} A(w; \varphi, v) &= \int_{\Omega} \lambda(|\nabla w|) \nabla \varphi \cdot \nabla v dx, \\ f(v) &= \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

假设存在常数 $\alpha_0 > 0$ 使得 $\mathbf{a}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ 满足

$$\xi^T D_{\mathbf{y}} \mathbf{a}(\boldsymbol{\eta}) \xi \geq \alpha_0 |\xi|^2, \quad \forall \xi, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^2, \quad (3)$$

其中 $D_{\mathbf{y}} \mathbf{a}$ 表示 \mathbf{a} 关于 \mathbf{y} 的导数. 令 L 在 u 处的线性化算子, 即 L 在 u 处的 Fréchet 导数为 $L'(u)$, 直接计算可得 $L'(u)v = -\nabla \cdot (D_{\mathbf{y}} \mathbf{a}(x, \nabla u) \nabla v)$. 假设 $L'(u)$ 是 $H_0^1(\Omega)$ 到 $H^{-1}(\Omega)$ 上的一个同构映射, 那么方程(2)具有唯一的解^[11].

不等式(3)保证了 $A(\cdot; \cdot, \cdot)$ 关于 $|\cdot|_1$ 半范数具有单调性^[12]. 即

$$\begin{aligned} A(v; v, v-w) - A(w; w, v-w) &\geq \\ C |v-w|_1^2, \quad \forall v, w \in H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (4a)$$

假设 $A(\cdot; \cdot, \cdot)$ 具有 Lipschitz 性质即

$$A(v; v, \varphi) - A(w; w, \varphi) \leq C \|v-w\|_1 \|\varphi\|_1 \quad (4b)$$

$$\forall v, w, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

此类问题在现实生活中有着广泛的应用, 例如: 虚拟气体的速度势^[13] u 由方程(1)给出, 其中

$$\mathbf{a}(\nabla u) = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \nabla u$$

当 $\gamma \leq -1$ 时, 该流动是亚音速的, 符合式(3)的假设. 当 $\gamma = -1$ 时, 该方程就是给定平均曲率方程.

2 有限元逼近

对于区域 Ω 的三角形剖分 $\mathcal{T}_h = \{K\}$, 记单元 K 的直径为 h_K , $h = \max\{h_K : K \in \mathcal{T}_h\}$. 假设三角形剖分 \mathcal{T}_h 是正则的, 局部拟一致^[4]的. 用 \mathcal{N} 和 $\bar{\mathcal{N}}$ 表示 \mathcal{T}_h 内部节点的集合和全部节点的集合. 对于任意的 $z \in \mathcal{N}$, 对应的节点基函数记为 ϕ_z . 令 $\omega_z = \text{supp}(\phi_z)$,

$|\omega_z|$ 是其面积. 记 \mathcal{T}_h 所有的边的集合为 ε , 其中内部的边集合为 ε_h , 边界的边集合为 ε_{∂} . 对于内部的边 $E = \partial K_1 \cap \partial K_2$ 和分片连续的向量值函数 \mathbf{q} , 定义 \mathbf{q} 在 E 上的跳量为: $[\mathbf{q}]|_E = \mathbf{q}|_{K_1} \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{q}|_{K_2} \cdot \mathbf{n}_2$, 其中 \mathbf{n}_i 是 ∂K_i 限制在 E 上的单位外法向量.

考虑最低阶的有限元空间, 即

$$V_h = \{v \mid v \in H_0^1(\Omega) : v|_K \text{ 是一次多项式}, \forall K \in \mathcal{T}_h\}$$

那么问题(2)的有限元解是找 $u_h \in V_h$ 使得

$$A(u_h; u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (5)$$

对于有限元问题(5), 由式(4a)和(4b), 解的存在唯一性以及相应的先验误差估计已经在文献[1]中给出了证明.

在后面的证明中, 会用到下面的迹不等式.

引理 1^[14] 对于任意的 $K \in \mathcal{T}_h$ 和 $E \subset \partial K$, 存在常数 C , 使得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_{0,E}^2 &\leq C(h_E^{-1} \|\mathbf{w}\|_{0,K}^2 + h_E \|\nabla \mathbf{w}\|_{0,K}^2), \\ \forall \mathbf{w} &\in H^1(K). \end{aligned} \quad (6)$$

3 后验误差估计

3.1 Clément 型的插值算子

给定函数 $v \in L^1(\Omega)$, 令

$$\pi_z v = \begin{cases} \left(\int_{\omega_z} \phi_z v dx \right) / \left(\int_{\omega_z} \phi_z dx \right), & z \in \mathcal{N} \\ 0, & z \in \bar{\mathcal{N}} \setminus \mathcal{N} \end{cases}$$

定义插值算子 $Q_h: L^1(\Omega) \rightarrow V_h$

$$Q_h v = \sum_{z \in \mathcal{N}} (\pi_z v) \phi_z$$

引理 2^[9] 对于任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$, 存在常数 C , 使得

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|v - Q_h v\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \leq C \|v\|_1 \quad (7a)$$

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(v - Q_h v)\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \leq C \|v\|_1 \quad (7b)$$

3.2 误差上界

假设 u_h 是方程(5)的解, 定义边残量型的单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 上的后验误差估计子为

$$\eta_{1,K} = \left(\frac{1}{2} \sum_{E \subset \partial K} h_E \|\lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h\|_{0,E}^2 \right)^{1/2},$$

该估计子由文献[5]定义的单元 $K \in \mathcal{T}_h$ 上的后验误差估计子

$$\eta_{2,K} =$$

$$\left(h_K^2 \|f\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \subset \partial K} h_E \|\lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h\|_{0,E}^2 \right)^{1/2}.$$

去掉 $\eta_{2,K}$ 中内部残量来得到. 如果 $E \in \varepsilon_{\partial}$, 定义 $[\lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h]|_E = 0$. 它们相应全局后验误

差估计子是 $\eta_i = (\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{i,K}^2)^{1/2}$, $i = 1, 2$.

为了证明 H^1 -范数的误差上界, 首先给出下面几个引理.

引理 3 假设 u 和 u_h 分别是式(2)和(5)的解, $e = u - u_h$, 则

$$C\|e\|_1^2 \leq I_1 + I_2 \quad (8)$$

其中,

$$I_1 = (f, e - Q_h e), \quad I_2 = -A(u_h; u_h, e - Q_h e).$$

证明 由单调性式(4)可知:

$$C|e|_1^2 \leq A(u; u, e) - A(u_h; u_h, e)$$

因为 $Q_h e \in V_h$, 由式(2)和(5)得到:

$$A(u; u, Q_h e) = A(u_h; u_h, Q_h e) \quad (9)$$

利用式(9), 可以得到:

$$\begin{aligned} C|e|_1^2 &\leq A(u; u, e - Q_h e) + A(u; u, Q_h e) - \\ &\quad A(u_h; u_h, e) \\ &= (f, e - Q_h e) - A(u_h; u_h, e - Q_h e) \end{aligned}$$

由 $H_0^1(\Omega)$ 空间中范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $|\cdot|_1$ 的等价性^[1], 得到了该引理的证明.

下面对式(8)中右端二项分别进行估计.

引理 4^[9] 假设 u 和 u_h 分别是式(2)和(5)的解, $e = u - u_h$, 则

$$|I_1| \leq CH_f \|e\|_1 \quad (10)$$

其中 $H_f =$

$$\left(\sum_{z \in \mathcal{N}} |\omega_z| \|f - \bar{f}_{\omega_z}\|_{0, \omega_z}^2 + \sum_{z \in \mathcal{N}/\mathcal{N}'} |\omega_z| \|f\|_{0, \omega_z}^2 \right)^{1/2},$$

\bar{f}_{ω_z} 是 f 在 ω_z 上的积分平均值.

引理 5 假设 u 和 u_h 分别是式(2)和(5)的解, $e = u - u_h$, 则

$$|I_2| \leq C\eta_1 \|e\|_1 \quad (11)$$

证明 因为 u_h 是分片线性多项式, 由格林公式, 可以得到:

$$\begin{aligned} I_2 &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h \cdot \nabla(e - Q_h e) dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \cdot (\lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h) (e - Q_h e) dx - \\ &\quad \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h \cdot n (e - Q_h e) ds \\ &= - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E [\lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h] (e - Q_h e) ds \end{aligned}$$

由柯西-施瓦茨不等式得:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E |\lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h| (e - Q_h e)| ds \\ &\leq C \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E |\lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h|_{0, E}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|e - Q_h e\|_{0, E}^2 \right)^{1/2} \quad (12)$$

利用引理 1 和引理 2 得

$$\begin{aligned} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E^{-1} \|e - Q_h e\|_{0, E}^2 \right)^{1/2} &\leq \\ C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^{-2} \|e - Q_h e\|_{0, K}^2 + \|\nabla(e - Q_h e)\|_{0, K}^2) \right)^{1/2} \\ &\leq C\|e\|_1 \end{aligned} \quad (13)$$

结合(12)和(13)两个不等式, 可以得到该引理的证明.

根据引理 3~5, 可以得到下面的定理.

定理 1 (上界估计) 假设 u 和 u_h 分别是式(2)和(5)的解, $e = u - u_h$, 则误差估计子 η_1 满足

$$\|e\|_1 \leq C\eta_1 + CH_f \quad (14)$$

证明 结合引理 3、引理 4 和引理 5, 可以得到:

$$\|e\|_1^2 \leq CH_f \|e\|_1 + C\eta_1 \|e\|_1$$

由此可以得到定理 1 的结论.

注 1 当 $f \in L^2(\Omega)$ 时, H_f 中的第一项是 $o(h)$. 当 $f \in L^p(\Omega)$ ($p > 2$) 时, H_f 中的第二项也是 $o(h)$ ^[9].

3.3 局部误差下界

定义单元 K 内部残量和边残量分别为 $R_K = f + \nabla \cdot (\lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h)|_K$ 和 $J_E = [\lambda(|\nabla u_h|) \nabla u_h]|_E$. 其振荡为 $O_{SC, R_K} = h_K \|R_K - \bar{R}_K\|_{0, K}$ 和 $O_{SC, J_E} = h_E^{1/2} \|J_E - \bar{J}_E\|_{0, E}$, 其中 \bar{R}_K 是 R_K 在 K 上的积分平均值, \bar{J}_E 是 J_E 在 E 上的积分平均值. 局部误差下界可以用类似参考文献[5]的方法证明.

定理 2 (误差下界) 假设 u 和 u_h 分别是式(2)和(5)的解, $e = u - u_h$, 则误差估计子 η 满足

$$\begin{aligned} \eta_{1, K} &\leq C\|e\|_{1, \tilde{\omega}_K} + C \left(\sum_{K \in \tilde{\omega}_K} O_{SC, R_K}^2 + \right. \\ &\quad \left. \sum_{K \in \tilde{\omega}_K} \sum_{E \in \partial K \cap \mathcal{E}_h} O_{SC, J_E}^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $\tilde{\omega}_K$ 是与单元 K 至少有一条公共边的单元的并.

4 数值算例

本节分析对比两种后验误差估计子的数值结果, 一种是边残量型的误差估计子 η , 另一种是文献[5]中所研究的误差估计子 η_2 . 引入符号:

$$R_1 = \|u - u_h\|_1 / \eta_i, \quad i = 1, 2,$$

$$R_2 = \|\nabla(u - u_h)\|_0 / \|\nabla u\|_0$$

记网格剖分 \mathcal{T}_h 的自由度为 N , 采用 Dörfler 加密策略^[15]和最新顶点加密方法^[14], 停止准则是 $R_2 \leq \delta$,

其中 δ 是一个正常数.

4.1 算例 1

设正方形区域 $\bar{\Omega}=[-1,1]\times[-1,1]$, 考虑问题(1), 其中 $\lambda(|\nabla u|)=1+e^{-|\nabla u|^2}$, 选择 $f(x)$ 使得精确解为 $u=(x^2-1)(y^2-1)$. 该数值算例的精确解没有奇性, 采用一致加密的方法. 从表 1 可以观察到 R_1 是有上下界的, 与理论相符合. 因此, 两种后验误差估计子都是有效的, 但是本文提出的误差子 η_1 更加简便, 易于计算.

表 1 后验误差估计子比较 ($\delta=0.01$)

Tab.1 Comparison of error indicators for $\delta=0.01$

| $h/\sqrt{2}$ | $\ u-u_h\ _1$ | $\ u-u_h\ _1/\eta_1$ | $\ u-u_h\ _1/\eta_2$ |
|--------------|---------------|----------------------|----------------------|
| 2^{-1} | 0.888 2 | 0.258 9 | 0.212 5 |
| 2^{-2} | 0.479 9 | 0.262 6 | 0.220 3 |
| 2^{-3} | 0.239 9 | 0.250 2 | 0.212 9 |
| 2^{-4} | 0.116 7 | 0.239 3 | 0.204 6 |
| 2^{-5} | 0.058 0 | 0.236 7 | 0.202 6 |
| 2^{-6} | 0.029 0 | 0.236 1 | 0.202 1 |
| 2^{-7} | 0.014 5 | 0.235 8 | 0.202 0 |

4.2 算例 2(有裂缝的区域)

设 $\Omega=(-1,1)^2\setminus\{0\leq x\leq 1,y=0\}$, 考虑问题(1), 其中 $\lambda(|\nabla u|)=1/\sqrt{1+|\nabla u|^2}$, 选择 $f(x)$ 使得精确解在极坐标下表示为 $u(r,\theta)=r^{1/2}\sin(\theta/2)(1-r^2\cos^2\theta)(1-r^2\sin^2\theta)$. 该数值算例的精确解 u 在原点有奇性, 这表明了自适应加密应该围绕着原点进行. 该算例中选择 Dörfler^[15] 加密参数 $\theta_1=0.5$.

表 2 是两种后验误差估计子的比较. 从表 2 中可以看出, 因为 $\|u-u_h\|_1/\eta_1$ 更接近 1, 所以边残量型后验误差估计子更能反映真实的误差. 图 1 和图 2 是两种误差估计子生成的网格, 由图 1 和图 2 可以

表 2 后验误差估计子比较 ($\delta=0.05$)

Tab.2 Comparison of error indicators for $\delta=0.05$

| η | 层数 | 自由度 | R_1 | R_2 |
|----------|----|-------|-------|-------|
| η_1 | 14 | 5 154 | 0.70 | 0.049 |
| η_2 | 15 | 5 917 | 0.59 | 0.045 |

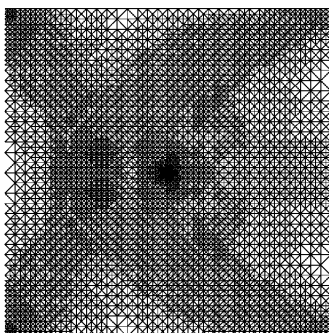


图 1 基于 η_1 的自适应算法的最终网格

Fig.1 Final mesh for the adaptive algorithm based on η_1

看出, 两种误差估计子都准确地检测到了 u 的奇点. 图 3 和图 4 是两种误差估计子各自的收敛历史. 从图 3 和图 4 可以看出 $\|u-u_h\|_1\approx O(N^{-1/2})$, 因此两种自适应加密的方法都是有效的. 但是本文提出的边残量型的后验误差估计子 η_1 , 更容易计算, 并且该误差估计子与方程的右端项没有关系, 适用性更广.

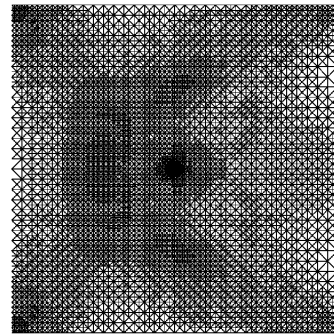


图 2 基于 η_2 的自适应算法的最终网格

Fig.2 Final mesh for the adaptive algorithm based on η_2

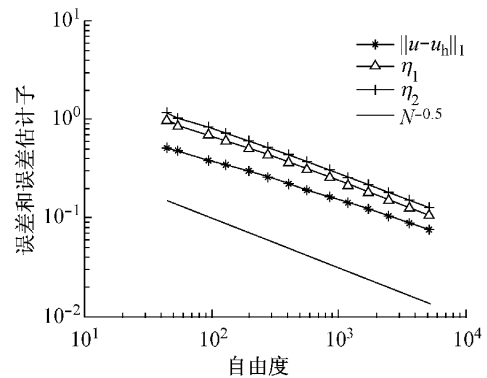


图 3 基于 η_1 的自适应算法的收敛历史

Fig.3 Convergence history for the adaptive algorithm based on η_1

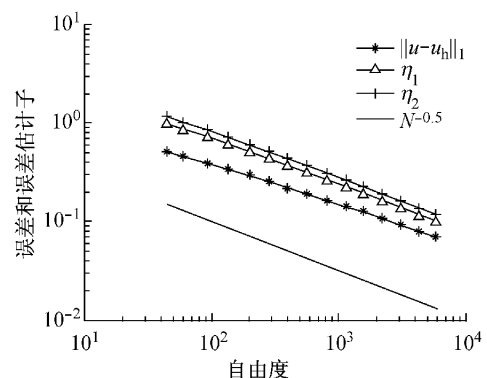


图 4 基于 η_2 的自适应算法的收敛历史

Fig.4 Convergence history for the adaptive algorithm based on η_2

5 结论

对于单调型非线性椭圆问题, 本文分析证明了

边残量型后验误差估计子的有效性. 数值算例表明, 边残量型后验误差估计子和文献[5]中的后验误差估计子所生成的网格和收敛性历史都是相似的. 但是边残量型后验误差估计子只与微分方程的系数有关, 因此更易于计算和编程实现.

参考文献:

- [1] Ciarlet P G. The finite element method for elliptic problems [M]. Amsterdam: North-Holland, 1978.
- [2] Brenner S C, Scott R. The mathematical theory of finite element methods[M]. New York: Springer, 2008.
- [3] Nochetto R H, Siebert K G, Veese A. Theory of adaptive finite element methods: an introduction[M]. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [4] Ainsworth M, Oden J T. A posteriori error estimation in finite element Analysis[M]. New York: Wiley, 2000.
- [5] Verfürth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement [M]. Stuttgart: Wiley-Teubner, 1996.
- [6] Fierro F, Veese A. On the a posteriori error analysis for equations of prescribed mean Curvature[J]. Mathematics of Computation, 2003, 72(244):1611.
- [7] Demlow A. Localized pointwise a posteriori error estimates for gradients of piecewise linear finite element approximations to second-order quasilinear elliptic problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2006, 44(2):494.
- [8] Liu L P, Liu T, Krízek M, *et al.* Global superconvergence and a posteriori error estimators of the finite element method for a quasi-linear elliptic boundary value problem of nonmonotone type[J]. SIAM journal on numerical analysis, 2004, 42(4): 1729.
- [9] Carstensen C, Verfürth R. Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element methods[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1999, 36(5):1571.
- [10] Guo L M, Huang Z P, Wang C. A posteriori error estimates of edge residual type of finite element method for nonmonotone quasi-linear elliptic problems [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2014, 30(3):813.
- [11] Xu J. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, 33(5):1759.
- [12] Bi C J, Lin Y P, Yang M. Finite volume element method for monotone nonlinear elliptic problems[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2013, 29(4):1097.
- [13] Chow S S. Finite element error estimates for nonlinear elliptic equations of monotone type [J]. Numerische Mathematik, 1989, 54(4):373.
- [14] Chen Z M, Wu H J. Selected topics in finite element methods [M]. Beijing: Science Press, 2010.
- [15] Dörfler W. A convergent adaptive algorithm for Poisson's equation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1996, 33(3):1106.

更正说明

本刊 2015 年第 4 期“一般大气环境中混凝土桥梁长期受力性能分析”一文作者在后续研究中发现原文存在错误, 现予以更正, 作者对文章存在的错误向读者致歉。

第 486 页第 3 节第一段改为“本文以一座跨径 25 m 预应力混凝土简支梁为分析对象, 其截面及普通钢筋布置如图 5 所示。其中预应力钢筋采用 $\phi^{15.2}$ 钢绞线, 普通钢筋强度设计值取 300 MPa, 保护层厚度取 30 mm, 边缘 5 普通钢筋直径为 20 mm, 其余边缘普通钢筋直径均为 12 mm。”

第 486 页第 3 节第二段原话“程序中对相应位置的 CO_2 浓度、环境局部系数等环境作用参数等给予一定折减”改为“程序中对相应位置的 CO_2 浓度、环境局部系数等环境作用参数给予一定折减”。

第 487 页表 1 中环境年平均相对湿度原为 0.75, 改为 0.7。