第 43 卷第 9 期
2015 年 9 月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 43 No. 9
Sep. 2015

文章编号：0253-374X(2015)09-1443-04　　DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2015.09.025

P_n 和 C_n^k 的 Ramsey 数

裴超平，李雨生
(同济大学 数学系，上海 200092)

摘要：称 F^k 为图 F 的 k 幂次图，如果 $V(F^k)=V(F)$，且 F^k 中的任意两个顶点相邻当且仅当在 F 中的距离至多为 k. 给定图 G 和 H，Ramsey 数 $R(G,H)$ 为最小的正整数 N，使得完全图 K_N 的任意红蓝-边着色都会含有一个红色的子图 G 或者蓝色的子图 H. 证明了渐近阶 $R(P_n,C_n^k)=(n-1)(\chi(C_n^k)-1)+\sigma(C_n^k)+o(n)$，其中 k 是常数.

关键词：Ramsey 数；k-幂次图；Ramsey 完备性
中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A

Ramsey number of a path and C_n^k

PEI Chaoping, LI Yusheng
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Define the kth power F^k of a graph F as a graph on $V(F)$, in which two vertices are adjacent if their distance in F is at most k. Given graphs G and H, Ramsey number $R(G,H)$ is the smallest integer N such that any red-blue edge-coloring of K_N contains a red copy of G or a blue copy of H. We show that $R(P_n,C_n^k)=(n-1)(\chi(C_n^k)-1)+\sigma(C_n^k)+o(n)$ holds for fixed k and large n.

Key words: Ramsey number; kth power; Ramsey goodness

用 $|G|$ 表示图 G 的阶，用 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示 G 的最大度和最小度. 如果用 k 种颜色对 G 的顶点进行着色，使得任意一条边的两个邻点颜色不同，则称该着色为 G 的真着色，并将这类最小的颜色数称为色数，记为 $\chi(G)$. 用 $\sigma(G)$ 表示 G 的任意真着色中，具有相同颜色的顶点的最小数. Burr[1] 得到如下的下界.

Ramsey 数 $R(G,H)$ 是最小的正整数 N，使得在完全图 K_N 的任意红蓝两种颜色的着色中存在红色子图 G 或者蓝色子图 H. 寻找新的 Ramsey 数或者改进 Ramsey 数的阶一直是 Ramsey 数领域的核心问题. 本文计算新的 Ramsey 数 $R(P_n,C_n^k)$.

引理 1　对于任意的图 H，如果 G 是一个连通图，且 $|G|\geqslant\sigma(G)$，则

$$R(G,H)\geqslant(\chi(H)-1)(|G|-1)+\sigma(H).$$

称连通图 G 是 $p-$good，如果 $R(G,K_p)=(p-1)(|G|-1)+1$；称连通图 G 是 $H-$good，如果引理 1 中的等号成立. Allen 等[2]猜想 P_n 是 P_n^k-good. 本文中，主要证明 P_n 是渐近 C_n^k-good.

定理 1　设 $k\geqslant1$ 为常数，如果 $n\to\infty$，则

$$R(P_n,C_n^k)=(\chi(C_n^k)-1)n+\sigma(C_n^k)+o(n).$$

如果 $(k+1)\mid n$，则 $\chi(C_n^k)=k+1$ 且 $\sigma(C_n^k)=\dfrac{n}{k+1}$，否则，$\chi(C_n^k)=k+2$ 且 $\sigma(C_n^k)\leqslant k$. 所以，在证明定理时要分为两种情况.

1　引理

对任意的图 R，定义 $C^{(1)},C^{(2)},\cdots,C^{(r)}$ 为 R 的极大圈序列，如果 $C^{(i)}$ 是 $R\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}C^{(j)}$ 中的最大圈，其中 $1\leqslant i\leqslant r$.

引理 2[2]　设 $k,n\geqslant1$ 为正整数，ε 为常数，满足 $0<\varepsilon\leqslant1/(k+1)$，$n\geqslant3/\varepsilon$. 如果图 R 满足 $|R|\geqslant n+(2k+2)\varepsilon n$，且 $\overline{R}$ 不含长度至少为 ε^2n 的圈，则 $\overline{R}$ 包含 C_n^k.

用 $K_r(n)$ 表示每个部集大小均为 n 的完全 r 部图.

引理 3　设 t 是一个常数，R 是一个图，$C^{(1)},C^{(2)},\cdots,C^{(r)}$ 为 R 的极大圈序列，且 $|C^{(r)}|\geqslant2t>2r$. 在每一个圈 $C^{(l)}$ 上任取一个长为 t 的片段 S_l，则在 $\overline{R}$ 中由 $\bigcup_{i=1}^{r}S_i$ 诱导的子图包含 $K_r(t-r)$，且第 l 个部集在 S_l 中，其中 $1\leqslant l\leqslant r$.

证明　首先，对任意的两个圈 $C^{(i)}$ 和 $C^{(j)}$，所取的片段分别为 S_i 和 S_j，其中 $i<j$. 则在 R 中，S_i 和 S_j 之间没有两条独立的边. 否则，产生一个大于 $C^{(i)}$

收稿日期：2014-07-30
第一作者：裴超平(1989—)，男，博士生，主要研究方向为组合数学与图论. E-mail：peichaoping@msn.cn

的圈,与极大图序列的定义矛盾.称图1中的顶点w为坏点.

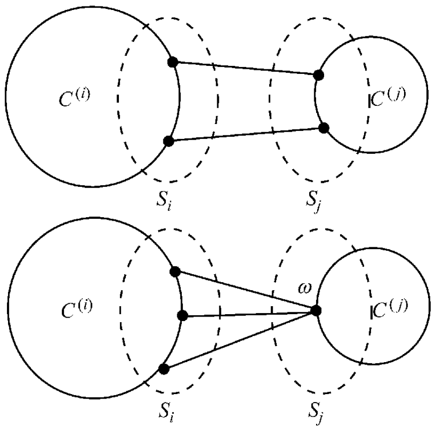


图1 长度大于$C^{(i)}$的圈和坏点w

Fig.1 A cycle of length at least $|C^{(i)}|$ and a bad vertex w

故,S_i和S_j能在$\overline{R}$中诱导出$K_{t-1,t-1}$.将$C^{(1)}$与其他所有的圈都重复一下上述步骤,$C^{(1)}$中至多可发现r个坏点,其他每个圈至多增加一个坏点.然后将$C^{(2)}$与$C^{(3)}$,…,$C^{(r)}$重复一下上述步骤.依次类推,对于每一个圈$C^{(i)}$,至多发现r个坏点,将这些坏点全部删除,可以得到所需要的完全r部图.

引理4 设C是R中最大的圈,T是R中一段连续的顶点集,w_1,w_2是$R\backslash C$中任意的两个顶点,则$N_{\overline{R}}(w_1)\cap N_{\overline{R}}(w_2)\cap T$包含至少$(|T|-3)/2$个顶点.

证明 将T中的顶点按照顺时针的顺序依次标记为$1,2,\cdots,T$.设:

$$T_I = T\cap N(w_1)\backslash N(w_2) = \{i_1,i_2,\cdots\},$$
$$T_J = T\cap N(w_2)\backslash N(w_1) = \{j_1,j_2,\cdots\},$$
$$T_H = T\cap N(w_1)\cap N(w_2) = \{h_1,h_2,\cdots\},$$

显然,T_I,T_J,T_H是两两不交的.不妨设$T\cap N(w_1)=\{t_1,t_2,\cdots\}$,为简化起见,定义$T\cap N(w_1)+1=\{t_1+1,t_2+1,\cdots\}$.则在$R$中,$T\cap N(w_1)+1$中的顶点和$w_1$不相邻.否则,$\cdots(t_1-1)t_1w_1(t_1+1)\cdots$是一个长为$|C|+1$的圈,矛盾.所以在$R$中,$(T_I+1)\cup(T_H+1)$中的所有顶点与$w_1$都不相邻;同理,$(T_J+1)\cup(T_H+1)$中的所有顶点与$w_2$不相邻.

(T_J+1)中至多只有一个顶点与w_1在R中相邻.否则,不妨设j_b+1和j_a+1均与w_1在R中相邻,其中$b<a$且$j_a,j_b\in T_J$,则$\cdots j_bw_2j_a(j_a-1)\cdots(j_b+1)w_1(j_a+1)\cdots$形成一个长度为$|C|+2$的圈,矛盾.同理$(T_I+1)$中至多只有一个顶点与$w_2$在$R$中相邻.于是,$(T_I+1)\cup(T_J+1)\cup(T_H+1)$中除了至多3个顶点之外,其余的顶点均与$w_1$和$w_2$在$R$中不相邻.设$x=|N_{\overline{R}}(w_1)\cap N_{\overline{R}}(w_2)\cap T|$,$y=|(T_I+1)\cup(T_J+1)\cup(T_H+1)|$,则$y-3\leqslant x$.

另一方面,由

$$T\backslash(T_I\cup T_J\cup T_H) = N_{\overline{R}}(w_1)\cap N_{\overline{R}}(w_2)\cap T,$$
$$|T_I\cup T_J\cup T_H| = |(T_I+1)\cup(T_J+1)\cup(T_H+1)| = y,$$

可得$|T|-y=x$,结合$y-3\leqslant x$,得$x\geqslant(|T|-3)/2$.

引理5 令r为正整数,C是R中最大圈,T是C上的一段顶点且$|T|\geqslant 5r^2$.如果$w_1,w_2,\cdots,w_{r+1}\in W=R\backslash C$,则$\overline{R}$中的公共邻点$\bigcap_{i=1}^{r+1}N_{\overline{R}}(w_i)\cap T$包含至少$r+1$个顶点.

证明 假定C中的顶点沿着顺时针的方向被标记为$1,2,\cdots$.如果$w_1,w_2,\cdots,w_{r+1}$中的任意一个顶点在T中的邻点都不超过$2r$,则显然得证.

否则,不妨设w_1在T中的邻点为$x_1,x_2,\cdots,x_{2r}$,则由于C是R中最大圈,w_1在$\overline{R}$中必定与$x_1+1,\cdots,x_b+1$相邻.其余任意的$w_i\in W$至多只有一个邻点在$x_1+1,\cdots,x_b+1$中(否则w_i,w_1和C在R中诱导出一个更大的圈,矛盾).故$|\bigcap_{i=1}^{r+1}N_{\overline{R}}(w_i)\cap T|\geqslant b-r\geqslant r+1$.

在下文证明中,首先介绍P_n^k的嵌入方法,然后再证明该嵌入方法可以延伸到C_n^k上.

2 P_n^k的嵌入方法

$k=1$时的情况已由文献[3-4]给出,假定$k\geqslant 2$.

设ε为实数且$0<\varepsilon<1/(k+9)$,$n>\varepsilon^{-9}$.设$N=kn+n/(k+1)+3k\varepsilon n+8/\varepsilon^8$.设完全图$K_N$的顶点集为$V$,并将$K_N$的边用红蓝两色进行着色,用$R$和$B$分别表示红色和蓝色的子图.如果$R$不含$P_n$,则显然不含$C_n,C_{n+1},\cdots,C_N$.记$R$的一个极大圈序列为$C^{(1)},C^{(2)},\cdots,C^{(r)}$,其中$r$是满足条件$|C^{(r)}|\geqslant\varepsilon^2 n$的最大正整数.设$W$是$B$中由$V\backslash\bigcup_{l=1}^{r}C^{(l)}$诱导的子图.易知$r\leqslant N/(\varepsilon^2 n)\leqslant\varepsilon^{-3}$.

若$|W|\geqslant n+(2k+2)\varepsilon n$,由引理2可知$W$包含$C_n^k$.因此可假定$|W|<n+(2k+2)\varepsilon n$.易知$r\geqslant k$.由于$P_n^k\subset C_n^k$,首先将$P_n^k$嵌入$B$中,方法如下.

将P_n^k嵌入B中:在图B中选择顶点$v_1,v_2,\cdots,v_m$,使得v_i与$v_{i-k},\cdots,v_{i-1}$相邻,其中$m\geqslant n$.

步骤1:令$t=\lfloor\varepsilon^2 n/2\rfloor$及$\alpha=3\lceil\varepsilon^{-2}\rceil$.注意$r\geqslant k$.当$r=k$时,步骤1跳过,进入步骤2.当$r>k$时,首先考虑圈序列$C^{(1)},C^{(2)},\cdots,C^{(k+1)}$,由引理3,在每个

圈上取长度为 t 的片段,这些片段可以诱导出完全 r 部图,而每个片段上至多有 r 个坏点. 将坏点删除,然后沿着图 2 中箭头所指的方向进行嵌入,每条线代表一次嵌入,每一个嵌入的点都与前面的 k 个点相邻,直到不能再嵌入为止. 然后选下一个片段,在每个圈上的顺时针方向选择长度为 t 的片段,使得每个圈上与原片段的交集部分的长度为 $3r$. 可以在交集部分重复上述步骤,然后不断寻找新的片段进行嵌入.

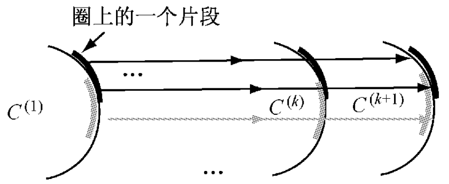


图 2　依照箭头所指的方向进行嵌入

Fig.2　Embed vertices following the arrows

称圈 $C^{(i)}$ 可用,如果 $C^{(i)}$ 还存在长度至少为 $6r^2$ 的剩余片段. 第一个不可用的圈必定是 $C^{(k+1)}$,然后考虑圈序列 $C^{(1)},C^{(2)},\cdots,C^{(k)},C^{(k+2)}$,依次类推. 当剩余可用的圈为 k 个时,至步骤 2;当剩余可用的圈小于 k 个时,至步骤 3.

步骤 2:不妨记剩余可用的圈为 $C^{(1)},C^{(2)},\cdots,C^{(k)}$. 仍在每个圈上选取长度为 t 的尚未使用的片段,依次记为 $T_1,\cdots,T_k$. 由引理 2,在 W 中存在蓝色的 P_h^k,其中,$h=\left\lfloor\dfrac{|W|}{1+(2k+4)\varepsilon}\right\rfloor$. 设 P_h^k 的顶点依次为 $u_1,u_2,\cdots$. 对于 P_h^k 上 $k+1$ 个接连的点 $v_m,\cdots,v_{m+k}$,将 v_{m+k} 嵌入到 u_1 中. 由引理 4 知,u_1 和 u_2 在每一个片段 T 上有至少 $(t-3)/2$ 个公共蓝色邻点,可以依次将 v_{m+i-1} 嵌入到 T_i 中,$1\leqslant i\leqslant k$,如图 3 所示.

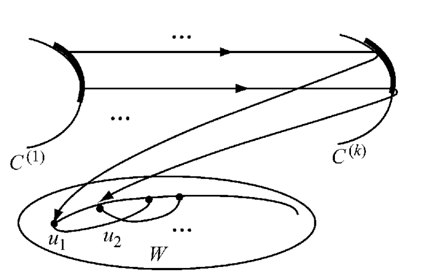


图 3　步骤 2 按照箭头所指的方向进行嵌入

Fig.3　Embed vertices following the arrows in Step 2

步骤 3:首先在 P_h^k 上接连地选取 $k+1$ 个顶点 $u_q,\cdots,u_{q+k}$. 设 $T_1',\cdots,T_k'$ 是步骤 1 和步骤 2 中的最后的片段,由引理 4 知,$u_q,\cdots,u_{q+k}$ 在 $T_1',\cdots,T_k'$ 中均至少有 $r+1$ 个公共蓝邻点. 假设 P_h^k 上尚未嵌入的顶点为 $v_{i+1},\cdots$ 将 v_{i+k} 先嵌入到 u_q 中,然后根据 $u_q,\cdots,u_{q+k}$ 在圈 u_q 上的公共邻点依次嵌入 $v_i,\cdots,v_{i+k-1}$,再将 v_{i+k+1} 嵌入到 u_{q+1} 中,依次类推直到 P_h^k 上的点都被嵌入,如图 4 所示.

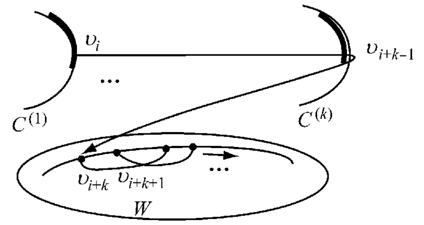


图 4　按照箭头的方向将其余的顶点嵌入到 W 中

Fig.4　Embed vertices following the arrows into W

步骤 3 可以把 P_n^k 中剩余的顶点全部嵌入. 设 x,y 分别为步骤 1 和步骤 2 中嵌入的次数(每次嵌入 $k+1$ 个顶点),z 为步骤 3 中嵌入的顶点数. 步骤 1 和步骤 2 的嵌入次数之和等于 $C^{(k+1)},\cdots,C^{(r)}$ 和 W 中的被嵌入的顶点的数目,从而 $y+z=h-k$. 因此 B 中所使用的顶点数总共为

$$x(k+1)+y(k+1)+z\geqslant x(k+1)+(c_k/2-x-r^2/\varepsilon^2)k+y+z\geqslant x+c_k+|W|-2r^2/\varepsilon^2\geqslant N-(k-1)n-2r^2/\varepsilon^2\geqslant n,$$

得证.

3　C_n^k 的嵌入方法

当 $k=1$ 时的结论见文献[3-4],假定 $k\geqslant 2$.

设 ε 为满足 $0<\varepsilon\leqslant 1/(k+9)$ 的实数,$n\geqslant\varepsilon^{-9}$. 如果 $(k+1)|n$,设 $N=kn+n/(k+1)+(2k+4)\varepsilon n+8/\varepsilon^8$;否则,设 $N=(k+1)n+(2k+4)\varepsilon n+8/\varepsilon^8$. 令 $T_i,T_i',W,W',w_i,r,x,y,z$ 的定义与第 2 节相同. 设第一次在 $C^{(1)},C^{(2)},\cdots,C^{(r)}$ 上寻找的片段为 $S_1,S_2,\cdots,S_r$. 令 $L_i\subset S_i$,且为 S_i 逆时针方向上的 $6r^2$ 个顶点,$1\leqslant i\leqslant r$. 首先按照第 2 节的方法将 C_n^k 中的大部分顶点嵌入到 $B\setminus\bigcup_{i=1}^r L_i$ 中,再将最后的常数个 C_n^k 中的顶点嵌入到 $\bigcup_{i=1}^r L_i$ 中,使之能够形成 C_n^k.

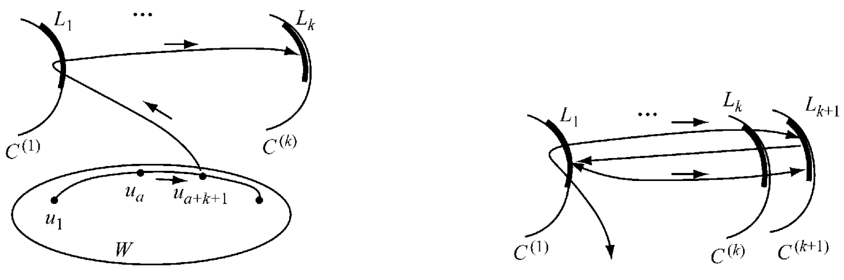
例 1:$(k+1)|n$. C_n^k 嵌入到 B 中的算法如下:

将 $v_1,v_2,\cdots,v_m$ 用第 2 节的方法嵌入到 B 中,其中 $m=n-2k-2$. 然后继续将 $v_{n-2k-1},\cdots,v_{n-k-1}$ 和 $v_{n-k},\cdots,v_n$ 依次嵌入到 B 中使得对于 $n-2k-1\leqslant i\leqslant n$,$v_i$ 和 $v_{i-k},\cdots,v_{i-1}$ 在 B 中相邻,以及对于 $n-k+1\leqslant i\leqslant n$,$v_i$ 和 $v_1,\cdots,v_{k+i-n}$ 在 B 中相邻.

可以按照图 5 中的嵌入方法实现 C_n^k 的嵌入.

例 2:$n=(k+1)p+q$,其中 $q\leqslant k$. 类似地,将 $v_{(k+1)(p-q-1)+1},\cdots,v_n$ 嵌入到 B 中使得 v_i 和 $v_{i-k},\cdots,$

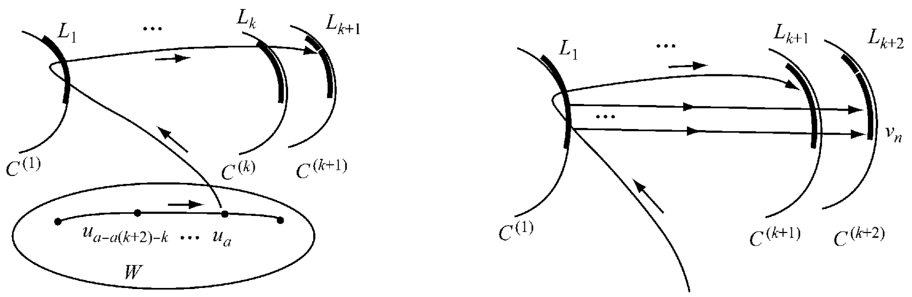
v_{i-1}在B中相邻,且对于 $i\geqslant n-k+1$,v_i 和 $v_1,\cdots,v_{k+n-i}$在B中相邻.具体嵌入过程如图6所示.



a 当$r=k$时 b 当$r>k$时

图5 例1的两种嵌入方法

Fig.5 Two methods of embedding in Case 1



a 当$r=k$时 b 当$r>k$时

图6 例2的两种嵌入方法

Fig.6 Two methods of embedding in Case 2

参考文献:

[1] Burr S A. Ramsey numbers involving graphs with long suspended paths [J]. Journal of the London Mathematical Society, 1981, 24(2): 405.

[2] Allen P, Brightwell G, Skokan J. Ramsey-goodness and otherwise [J]. Combinatorica, 2013, 33(2): 125.

[3] Faudree R J, Schelp R H. All Ramsey numbers for cycles in graphs [J]. Discrete Mathematic, 1974, 8(4): 313.

[4] Rosta V. On a Ramsey-type problem of J. A. Bondy and P. Erdos. I, II [J]. Journal of Combinatorical Theory Series B, 1973, 15(1): 94.