第 43 卷第 11 期
2015 年 11 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 43 No. 11
Nov. 2015

文章编号：0253-374X(2015)11-1750-03　　DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2015.11.021

# Ramsey 数和无三角的 Cayley 图

厉明波，李雨生
(同济大学 数学系，上海 200092)

**摘要**：记 $Z_n=\{0,1,\cdots,n\}$ 为模 $n$ 的整数加群，$Z_n^*=Z_n\backslash\{0\}$. 对一个 $Z_n^*$ 逆元封闭的子集 $A$，定义 Cayley 图 $G_n(A)$ 为：其点集为 $Z_n$，而 $\{x,y\}$ 是一条边当且仅当 $|x-y|\in A$. 计算了这些 Cayley 图的独立数至 $n\leqslant 258$，改进了 Ramsey 数 $r(3,q)$ 的的下界，$27\leqslant q\leqslant 38$.

**关键词**：无三角的 Cayley 图；极大无和集；Ramsey 数
**中图分类号**：O158　　**文献标志码**：A

## Ramsey Numbers and Triangle-Free Cayley Graphs

*Li Mingbo, Li Yusheng*
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract**: Let $Z_n=\{0,1,\cdots,n\}$ be the additive group of integers modulo $n$ and let $Z_n^*=Z_n\backslash\{0\}$. For an inverse-closed subset $A\subseteq Z_n^*$, let $G_n(A)$ be the Cayley graph on vertex set $Z_n$, in which $\{x,y\}$ is an edge if and only if $|x-y|\in A$. We compute the independence numbers for triangle-free Cayley graphs of orders up to 258, which improves the known lower bounds for Ramsey numbers $r(3,q)$ for $27\leqslant q\leqslant 38$.

**Key words**: triangle-free Cayley graph; maximal sum-free set; Ramsey number

设 $H$ 是一个加法群，$H^*=H\backslash\{0\}$. 一个 $H$ 的子集 $A$ 被说成是关于逆元封闭的，是指若 $x\in A$，则 $-x\in A$. 对一个 $H^*$ 逆元封闭的子集 $A$，可定义一个图 $G_H(A)$ 如下：它的点集是 $H$，而 $\{x,y\}$ 是一条边当且仅当 $|x-y|\in A$. 图 $G_H(A)$ 被称为由 $A$ 导出的 Cayley 图.

本文里，群 $H$ 是 $Z_n=\{0,1,\cdots,n\}$，即模 $n$ 的整数加群. 对于 $Z_n$ 的一个逆元封闭子集 $A$，简记由 $A$ 生成的 Cayley 图 $G_{Z_n}(A)$ 为 $G_n(A)$. 因 $Z_n$ 中 $x$ 的逆元是 $n-x$，故 $\{x,y\}$ 是 $G_n(A)$ 的一条边当且仅当 $|x-y|\in A$. 有两个平凡的 $G_n(A)$，其一是空图，对应的生成集 $A=\emptyset$，其二是圈 $C_n$，对应的生成集 $A=\{1,n-1\}$. 下面的性质是熟知的，参见文献[1].

**引理 1**　设 $A\subseteq Z_n^*$ 为逆封闭子集，则 $G_n(A)$ 是点传递的，且点 $i$ 的邻域是

$$A+i=\{a+i:a\in A\}$$

特别地，$G_n(A)$ 是 $|A|$-正则的；$Z_n$ 的任何子集 $S$ 是一个独立集当且仅当对 $S$ 中任何两个相异的元 $x$ 和 $y$ 都有 $|x-y|\notin A$.

设 $m$ 和 $q$ 为正整数，定义 Ramsey 数 $r(m,q)$ 为最小的正整数 $n$ 使得任何阶为 $n$，不含 $K_m$ 的图都有 $q$ 元独立集. 以 $\alpha(G)$ 记图 $G$ 的独立集. 当 $G_n(A)$ 不含三角形且 $\alpha(G_n(A))\leqslant q$，则 $r(3,q+1)\geqslant n+1$. Ramsey 理论的发展，参见文献[2].

集合 $A\subseteq Z_n$ 被说成是无和的，是指 $(A+A)\cap A=\emptyset$ 就是说，方程 $x+y=z$ 在 $A$ 中无解，这里 $x,y,z$ 不必两两互异. 显然，无和集不包含零元素. 计算将依据下面的结果.

**定理 1**　设 $A,A'$ 都是 $Z_n^*$ 中的逆元封闭子集. 则有

(1) 若 $A'\subseteq A$，则 $G_n(A')$ 是 $G_n(A)$ 的一个子图，此时 $\alpha(G_n(A'))\geqslant\alpha(G_n(A))$.

(2) $G_n(A)$ 不含三角形当且仅当 $A$ 是无和集.

(3) 若 $A$ 是无和集，则 $\alpha(G_n(A))\geqslant|A|$.

**证明**　设 $A'\subseteq A$，若 $\{x,y\}$ 是 $G_n(A')$ 的一条边，则 $|x-y|\in A'$ 故 $|x-y|\in A$，从而 $\{x,y\}$ 是 $G_n(A)$ 的一条边. 即 $G_n(A')$ 是 $G_n(A)$ 的一个子图，(1)得

收稿日期：2014-08-04
基金项目：国家自然科学基金(11331003)
第一作者：厉明波(1969—)，男，讲师，主要研究方向为图论算法. E-mail：mingbo_li@163.com
通讯作者：李雨生(1954—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为图论. E-mail：li_yusheng@tongji.edu.cn

证.

为证明(2)，先假定 $A$ 是无和集，要证明 $G_n(A)$ 不含三角形. 显然，一个图不含三角形当且仅当它的任何邻域不含边. 由引理 1 可知，$G_n(A)$是点传递的，点 0 的邻域就是 $A$. 故要证 $G_n(A)$不含三角形，只要证明 $A$ 中任何两点不相连. 当 $A$ 只含一点，这是平凡的. 否则设 $A=\{x,y,\cdots\}$，其中 $x\neq y$. 若 $x$ 和 $y$ 相连，$|x-y|\in A$，故存在 $z\in A$ 使得 $x-y=z$ 或 $y-x=z$，等价于 $x=y+z$ 或 $y=x+z$，与 $A$ 为无和集的假设矛盾.

另一方面，假定 $G_n(A)$不含三角形，则点 0 的邻域 $A$ 不含任何边. 证明 $A$ 是无和的. 若 $x+y=z$ 在 $A$ 中有解，则显然 $x\neq z$，这是由于 $A$ 是 $Z_n^*$ 的子集. 同理 $y\neq z$.

**情况 1**　$x=y\neq z$. 此时，有 $2x=z$，得 $x=z+(n-x)$，其中 $n-x\in A$(因 $A$ 对逆元封闭). 此时互异的三个元素 $0,z,n-x$ 组成一个三角形，矛盾.

**情况 2**　$x,y,z$ 互异. 此时，有 $z-x=y\in A$，得 $|z-x|=y\in A$ 或 $|z-x|=-y\in A$，故$\{x,z\}$是一条边，而互异的三个元素 $0,x,z$ 组成一个三角形，矛盾.

为证(3)，设 $A$ 是无和集. 由(2)已知，$G_n(A)$不含三角形，因此点 0 的邻域 $A$ 没有边，从而 $A$ 是一个独立集，故 $\alpha(G_n(A))\geqslant|A|$.

设 $\Phi$ 是一个集合族. 其中 $A_0\in\Phi$ 说成是最大的，是指 $A_0$ 所含元素是 $\Phi$ 中最多的，它被说成是极大的，是指若 $A_0$ 不可能是 $\Phi$ 中任何集合的真子集. 显然最大集必然是极大集，但极大集不必是最大集. 可得下述推论.

**推论**　设 $\Phi$ 是 $Z_n^*$ 的所有逆元封闭的无和集所成的集合族，且 $A_0\in\Phi$ 使得

$$\alpha(G_n(A_0))=\min\{\alpha(G_n(A)):A\in\Phi\}$$

则 $A_0$ 是极大的；且 $G_n(A_0)$不含三角形. 故 $r(3,q+1)\geqslant n+1$，其中 $q=\alpha(G_n(A_0))$.

定理 1 及其推论并没有肯定有一个最大无和集 $A$ 产生的 Cayley 图 $G_n(A)$有最小的独立数. 例如，若 $n\geqslant 4$ 是一个偶数，$A=\{1,3,\cdots,n-1\}$，则 $A$ 是逆元封闭的且无和的，而 $G_n(A)=K_{n/2,n/2}$ 是一个平衡的完全二部图，故 $\alpha(G_n(A))=n/2$，其独立数很大. 然而，由定理 1 及其推论可知，对于固定的 $n$，在寻求由最小独立数的 $G_n(A)$的过程中，只要考虑那些极大(不仅是最大)的逆元封闭的无和集即可，这将节约计算机运算时间.

将计算一些较小阶的不含三角形的 Cayley 图的独立数，在同样阶的此类图中，选择那些独立数最小的图，从而获得新的 Ramsey 数 $r(3,q)$的下界，这些结果被列于表 1 中. 改进了 $r(3,q)$的下界，$27\leqslant q\leqslant 38$. 那些被改进的下界分别在文献[3-5]获得. 对于 Ramsey 数的这些结果，可以参考文献[5].

**表 1　当 $27\leqslant q\leqslant 38$ 时 $r(3,q)$新下界**

**Tab.1　New lower bounds for $r(3,q)$ with $27\leqslant q\leqslant 38$**

| $q$ | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r(3,q)$下界 | 172 | 177 | 190 | 195 | 206 | 217 | 224 | 229 | 236 | 241 | 246 | 259 |

算法主要步骤如下：

第一步，给定正整数 $n$，搜索极大的逆元封闭的无和集 $A\subseteq Z_n^*$，计算 $\alpha(G_n(A))$；发现 $A$ 使得 $\alpha(G_n(A))$达到最小.

第二步，加大 $n$，重复第一步.

本文使用约束传播算法. 由于约束的限定，大大提高了搜索的速度. 其中的一个约束选取的元素是无和的，另外一个约束选取的元素的个数不能大于设定的最大值.

在确定一个生成集 $A$ 之后，运算时间的主要部分是计算 $\alpha(G_n(A))$. 其中对于 $n=258$，用于发现最小 $\alpha(G_n(A))$和相应的 $A$，用时超过一周. 本文用子图同构来计算最大独立数，可以提高计算最大独立数的速度，值得进一步研究.

计算结果见表 2. 在相同独立数的 Cayley 图 $G_n(A)$中，本文仅列举了 $n$ 最大时的计算数据. 在这些表中，第一行是 $G_n(A)$的阶数 $n$，其为有相同的独立数的最大 $n$；第二行是相应的生成集 $A$，它是逆元封闭且无和的；第三行是独立数 $\alpha(G_n(A))$.

表2 集合 $A$ 和 $\alpha(G_n(A))$, $2 \leqslant \alpha(G_n(A)) \leqslant 37$

Tab.2 Sets $A$ and $\alpha(G_n(A))$ with $2 \leqslant \alpha(G_n(A)) \leqslant 37$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 5 | 8 | 13 | 16 | 21 | 26 |
| $A$ | 1,4 | 1,4,7 | 1,5,8,12 | 1,3,8,13,15 | 1,3,8,13,18,20 | 1,3,8,13,18,23,25 |
| $\alpha(G_n(A))$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 35 | 38 | 45 | 48 | 57 | 62 |
| $A$ | 1,7,11,16,19,24,28,34 | 1,3,5,12,19,26,33,35,37 | 1,3,5,12,19,26,33,40,42,44 | 1,3,8,14,18,24,30,34,40,45,47 | 1,4,6,9,20,23,34,37,48,51,53,56 | 1,3,11,16,24,29,31,33,38,46,51,59,61 |
| $\alpha(G_n(A))$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 71 | 78 | 91 | 94 | 105 | 110 | 121 |
| $A$ | 1,4,6,9,20,23,34,37,48,51,62,65,67,70 | 1,3,11,19,24,32,37,39,41,46,54,59,67,75,77 | 1,4,10,15,23,28,37,42,49,54,63,68,76,81,87,90 | 1,3,11,19,24,32,40,45,47,49,54,62,70,75,83,91,93 | 1,4,6,21,23,38,40,49,51,54,56,65,67,82,84,99,101,104 | 2,6,10,11,26,30,33,34,48,55,62,76,77,80,84,99,100,104,108 | 1,3,9,19,27,29,34,40,50,57,64,71,81,87,92,94,102,112,118,120 |
| $\alpha(G_n(A))$ | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 130 | 135 | 142 | 153 | 158 | 171 |
| $A$ | 2,6,13,16,28,36,39,40,48,60,65,70,82,90,91,94,102,114,117,124,128 | 1,3,5,9,16,23,33,37,44,52,64,71,83,91,98,102,112,119,126,130,132,134 | 1,3,5,7,15,28,34,36,45,47,58,71,84,95,97,106,108,114,127,135,137,139,141 | 1,3,14,21,27,33,37,50,52,57,65,72,81,88,96,101,103,116,120,126,132,139,150,152 | 1,3,5,13,22,24,28,32,39,53,62,69,79,89,96,105,119,126,130,134,136,145,153,155,157 | 1,3,5,9,15,17,28,36,47,58,69,76,82,89,95,102,113,124,135,143,154,156,162,166,168,170 |
| $\alpha(G_n(A))$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 176 | 189 | 194 | 205 | 216 | 223 |
| $A$ | 2,6,7,10,19,30,39,50,53,61,64,75,79,88,97,101,112,115,123,126,137,146,157,166,169,170,174 | 1,3,5,7,15,28,34,48,52,61,69,78,88,90,99,101,111,120,128,137,141,155,161,174,182,184,186,188 | 2,3,7,8,12,27,31,51,52,56,73,74,84,88,97,106,110,120,121,138,142,143,163,167,182,186,187,191,192 | 1,3,5,7,9,17,25,36,44,46,57,59,70,86,97,108,119,135,146,148,159,161,169,180,188,196,198,200,202,204 | 2,6,7,10,11,29,30,44,47,48,56,68,82,83,99,108,117,133,134,148,160,168,169,172,186,187,205,206,209,210,214 | 1,3,5,7,9,13,15,25,36,47,58,66,77,89,100,106,117,123,134,146,157,165,176,187,198,208,210,214,216,218,220,222 |
| $\alpha(G_n(A))$ | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 228 | 235 | 240 | 245 | 258 |
| $A$ | 2,6,7,10,11,19,32,33,48,56,61,79,84,87,99,102,114,126,129,141,144,149,167,172,180,195,196,209,217,218,221,222,226 | 1,3,5,7,9,13,17,28,32,36,47,59,70,81,85,99,110,125,136,150,154,165,176,188,199,203,207,218,222,226,228,230,232,234 | 2,3,7,8,12,21,22,26,31,35,46,71,76,86,87,103,104,120,136,137,153,154,164,169,194,205,209,214,218,219,228,232,233,237,238 | 1,3,5,7,9,13,17,27,29,37,48,52,67,73,92,98,106,117,128,139,147,153,172,178,193,197,208,216,218,228,232,236,238,240,242,244 | 2,3,7,8,12,21,22,26,27,31,32,37,70,83,87,100,106,111,129;,147,152,158,171,175,188,221,226,227,231,232,236,237,246,250,251,255,256 |
| $\alpha(G_n(A))$ | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |

## 参考文献:


[1] Godsil C, Royle G. Agebraic graph theory [M]. Berlin: Springer, 2001.

[2] Graham R, Rothschild B, Spencer J. Ramsey theory [M]. NewYork: John Wiley & Sons, 1990.

[3] Wu K, Su W, Luo H, *et al*. New lower bound for seven classical Ramsey numbers $R(3,q)$[J]. Appl Math Lett, 2009, 22: 365.

[4] Wu K, Su W, Luo H, *et al*. A generalization of generalized Paley graphs and new lower bounds for $R(3,q)$[J/CD]. Electron J Combin, 2010.

[5] Chen H, Wu K, Xu X, *et al*. New lower bound for nine classical Ramsey numbers $R(3,t)$[J]. Journal of Mathematics, 2011, 31:582.