第 43 卷第 11 期
2015 年 11 月
同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)
Vol. 43 No. 11
Nov. 2015

文章编号：0253-374X(2015)11-1753-05
DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2015.11.022

6 次单位根时小 q-Schur 代数 $u_q(2,r)$ 的生成元与关系式

高文婷
(同济大学 数学系，上海 200092)

摘要：主要给出了 6 次单位根时小 q-Schur 代数 $u_q(2,r)$ 的生成元与关系式. 方法是对 r 的值分情况讨论，利用生成元与关系式定义一个代数，并且证明这个代数与 $u_q(2,r)$ 同构. 此外，还给出了小 q-Schur 代数 $u_q(2,r)$ 的一组基.

关键词：q-Schur 代数；小 q-Schur 代数；生成元与关系式
中图分类号：O152.5　　**文献标志码**：A

Generators and Relations of Little q-Schur Algebra $u_q(2,r)$ in 6th Root of Unity

GAO Wenting
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The generators and relations of little q - Schur algebra $u_q(2,r)$ were mainly obtained in the 6th root of unity. The algebra was defined by generators and the relations for each case were defined, too. Moreover, that the algebra is isomorphic to little q - Schur algebra $u_q(2,r)$ is proved. Furthermore, a basis for little q - Schur algebra $u_q(2,r)$ is obtained.

Key words: q-Schur algebra; little q-Schur algebra; generators and relations

1　代数 $U(n)$

设 v 是不定元，令 $A=\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$. k 是一个包含 l' 次本原单位根 ε 的域，其中 $l'\geqslant 3$. 设 $l>1$ 且

$$l=\begin{cases} l' & \text{如果 } l' \text{ 是奇数} \\ l'/2 & \text{如果 } l' \text{ 是偶数} \end{cases}$$

特别地，当 v 取值 ε 时，k 可以看成一个 A-模. 根据文献[1]，记 $U(n)$ 是 $\mathbb{Q}(v)$ 上 gl_n 的量子包络代数，生成元是 $E_i,F_i\,(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 和 $K_j^{\pm 1}\,(1)\leqslant j\leqslant n)$. 对于 $m,t\in\mathbf{N}$ 和 $c\in\mathbf{Z}$，令

$$E_i^{(m)}=\frac{E_i^m}{[m]^!}$$

$$F_i^{(m)}=\frac{F_i^m}{[m]^!}$$

$$\begin{bmatrix} K_i;c \\ t \end{bmatrix}=\prod_{s=1}^{t}\frac{K_i v^{c-s+1}-K_i^{-1}v^{-c+s-1}}{v^s-v^{-s}}$$

其中，$[m]^!=[1][2]\cdots[m]$，$[i]=\dfrac{v^i-v^{-i}}{v-v^{-1}}$. 特别地，$[a]_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon^a-\varepsilon^{-a}}{\varepsilon-\varepsilon^{-1}}$.

根据文献[2-3]，令 $U_A(n)$ 为由所有 $E_i^{(m)}$，$F_i^{(m)}$，K_i 和 $\begin{bmatrix} K_i;0 \\ i \end{bmatrix}$ 生成的 $U(n)$ 的 A-子代数. 令 $U_k(n)=U_A(n)\otimes_A k$，仍使用相同的符号来记 E_i,F_i,K_j 在 $U_k(n)$ 中的像. 根据文献[2]，令 $\tilde{u}_k(n)$ 是由所有 E_i，F_i，$K_j^{\pm 1}$ 生成的 $U_k(n)$ 的 k-子代数. 文献[1]给出了代数 $\tilde{u}_k(n)$ 的生成元和关系式表现.

2　q-Schur 代数

根据文献[4]，令 $A_q(n)$ 由 n^2 个不定元 $c_{ij}\,(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 生成的 k-代数，其中 $q=\varepsilon^2$，满足以下关系式：

$$\begin{aligned} c_{ij}c_{il}&=c_{il}c_{ij}, && \text{对所有 } i,j,l \\ c_{ij}c_{rs}&=q\,c_{rs}c_{ij}, && \text{当 } i>r \text{ 且 } j\leqslant s \\ c_{ij}c_{rs}&=(q-1)c_{ij}c_{is}+c_{rs}c_{ij}, && \text{当 } i>r \text{ 且 } j>s \end{aligned}$$

则 $A_q(n)$ 具有余代数结构

$$\triangle(c_{ij})=\sum_{t=1}^{n}c_{it}\otimes c_{tj},\ \varepsilon(c_{ij})=\delta_{ij}$$

记 $A_q(n,r)$ 为 $A_q(n)$ 的 r 次齐次部分，对所有的 r，$A_q(n,r)$ 是 $A_q(n)$ 的子余代数，因此 $A_q(n,r)^*$ 是 k-代数，称为 q-Schur 代数.

收稿日期：2014-09-16
第一作者：高文婷(1988—)，女，博士生，主要研究方向为代数群，量子群及其表示. E-mail: gaowentingwojia@163.com

令$\tilde{\Xi}$为$\mathbf{Z}$上的所有$n\times n$矩阵组成的集合,且除对角线上的元以外,其余元素都为自然数. 记$\Xi=M_n(\mathrm{N})$为$\tilde{\Xi}$的子集,其所有元素都为自然数. 映射$\sigma:\Xi\to\mathbf{N}$把一个矩阵映成其所有元素的和. 那么,对任意的$r\in\mathbf{N}$,$\Xi_r:=\sigma^{-1}(r)$表示Ξ中的所有元素和为r的矩阵的集合. 令$\Xi^{\pm}$为Ξ中所有对角元为0的矩阵的集合.

对于$A=(a_{ij})\in\Xi$,令

$$c^A=c_{1,1}^{a_{1,1}}c_{2,1}^{a_{2,1}}\cdots c_{n,1}^{a_{n,1}}c_{1,2}^{a_{1,2}}c_{2,2}^{a_{2,2}}\cdots c_{n,2}^{a_{n,2}}\cdots c_{1,n}^{a_{1,n}}c_{2,n}^{a_{2,n}}\cdots c_{n,n}^{a_{n,n}}$$

根据文献[4],集合$\{c^A|A\in\Xi_r\}$形成了$A_q(n,r)$的一组基. 若$\xi_A:=(c^A)^*$,得到q-Schur代数的一组对偶基$\{\xi_A|A\in\Xi_r\}$.

令$U_A(n,r)$是文献[5]中定义的A上的代数,它有一组正规A-基$\{[A]\}_{A\in\Xi_r}$. 记$U_k(n,r)=U_A(n,r)\otimes_A k$,根据文献[4,6],有

$$U_k(n,r)\cong A_q(n,r)^*$$
$$[A]\to q^{\frac{-d_A}{2}}\xi_A$$

其中$d_A=-\sum\limits_{i<s,j>t}a_{i,j}a_{s,t}+\sum\limits_{j>t}a_{i,j}a_{i,t}$,从而把$U_k(n,r)$与$q$-Schur代数$A_q(n,r)^*$等同起来.

记$U(n,r)=U_A(n,r)\otimes_A Q(v)$,给定$r>0$,$A\in\Xi^{\pm}$,$j=(j_1,j_2,\cdots,j_n)\in\mathbf{Z}^n$,定义

$$A(j,r)=\sum_{D\in\Xi^0,\sigma(A+D)=r}v^{\sum_i d_ij_i}[A+D]\in U(n,r)$$

$$A(j)=A(j,\infty)=\sum_{D\in\tilde{\Xi}^0}v^{\sum_i d_ij_i}[A+D]$$

其中Ξ^0(或$\tilde{\Xi}^0$)为Ξ(或$\tilde{\Xi}$)中的对角矩阵构成的子集合,$\boldsymbol{D}$是对角矩阵,根据文献[5]有下面的结果.

定理1 $U(n)$与$U(n,r)$之间有一个代数满同态$\zeta_r:U(n)\twoheadrightarrow U(n,r)$,满足

$$E_h\mapsto E_{h,h+1}(0,r),K_1^{j_1}K_2^{j_2}\cdots K_n^{j_n}\to 0(j,r),F_h\mapsto E_{h+1,h}(0,r)$$

记e_i,f_i,k_j分别是E_i,F_i,K_j在ζ_r下的像,其中$1\leqslant i\leqslant n-1,1\leqslant j\leqslant n$. 记$\Lambda(n,r)=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in\mathbf{N}^n\mid\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i=r,\lambda_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n\}$,$\Lambda^+(n,r)=\{\lambda\in\Lambda(n,r)\mid\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\}$. 对于$t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathbf{N}^n$,令$k_t=\prod\limits_{i=1}^n\begin{bmatrix}k_i;0\\t_i\end{bmatrix}$.

3 小q-Schur代数$u_q(n,r)$

在文献[6]中已经证明$\zeta_r(U_A(n))=U_A(n,r)$,因此ζ_r诱导了一个满同态:

$$\zeta_{r,k}:=\zeta_r\otimes id:U_k(n)=U_A(n)\otimes k\twoheadrightarrow U_k(n,r)=U_A(n,r)\otimes k$$

将其限制到$\tilde{u}_k(n)$上,得到映射$\zeta_{r,k}:\tilde{u}_k(n)\to U_k(n,r)$. 记$u_q(n,r)=\zeta_{r,k}(\tilde{u}_k(n))$,称其为小$q$-Schur代数,具体可见文献[1,7]. 仍然记e_i,f_i,k_j分别是E_i,F_i,K_j在$\zeta_{r,k}$下的像.

设$\mathbf{Z}_m=\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$,记$\overline{()}:\mathbf{Z}^n\to(\mathbf{Z}_{l'})^n$,它将$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$映为$(\bar{j}_1,\bar{j}_2,\cdots,\bar{j}_n)$. 记$\overline{\Lambda(n,r)}=\{\bar{\lambda}\in(\mathbf{Z}_{l'})^n|\lambda\in\Lambda(n,r)\}$,对于$\bar{\lambda}\in(\mathbf{Z}_{l'})^n$,定义

$$p_{\bar{\lambda}}=\begin{cases}\sum\limits_{\mu\in\Lambda(n,r),\bar{\mu}=\bar{\lambda}}k_\mu & \text{如果 }\bar{\lambda}\in\overline{\Lambda(n,r)},\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

令$h_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)\in\mathbf{Z}^n$,$\alpha_i=h_i-h_{i+1}$. 根据文献[7],有如下结论.

命题1 设$\bar{\lambda}\in\overline{\Lambda(n,r)}$,在$u_q(n,r)$中有

(1) 若存在$\mu\in\Lambda(n,r)$使得$\bar{\mu}=\bar{\lambda}$且$\mu_{i+1}\geqslant 1$,则$e_ip_{\bar{\lambda}}=p_{\bar{\lambda}+\bar{\alpha}_i}e_i$;否则$e_ip_{\bar{\lambda}}=0$.

(2) 若存在$\mu\in\Lambda(n,r)$使得$\bar{\mu}=\bar{\lambda}$且$\mu_i\geqslant 1$,则$f_ip_{\bar{\lambda}}=p_{\bar{\lambda}-\bar{\alpha}_i}f_i$;否则$f_ip_{\bar{\lambda}}=0$.

4 主要结果

以下假定$n=2$,$l'=6$,从而$l=\frac{l'}{2}=3$,研究6次单位根时小q-Schur代数$u_q(2,r)$的生成元与关系式,有如下结果:

命题2 (1) $r\geqslant 1$且$r\neq 5,6,7,8$时,$u_q(2,r)$由e,f和$p_{\bar{\lambda}}$生成,其中$\bar{\lambda}\in\overline{\Lambda(2,r)}$,并且满足如下关系:

① $p_{\bar{\lambda}}p_{\bar{\mu}}=\delta_{\bar{\lambda},\bar{\mu}}$,$\sum\limits_{\bar{\lambda}\in\overline{\Lambda(2,r)}}p_{\bar{\lambda}}=1$.

② $e^l=0$,$f^l=0$.

③ $ef-fe=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda(2,r)}[\lambda_1-\lambda_2]_\varepsilon k_\lambda$.

④ e,f和$p_{\bar{\lambda}}$有下列交换关系,$ep_{(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2)}=p_{(\overline{\lambda_1+1},\overline{\lambda_2-1})}e$,$fp_{(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2)}=p_{(\overline{\lambda_1-1},\overline{\lambda_2+1})}f$.

(2) $r=5,6,7,8$时,$u_q(2,r)$由e,f和$p_{\bar{\lambda}}$生成,其中$\bar{\lambda}\in\overline{\Lambda(2,r)}$并且满足如下关系.

⑤ $p_{\bar{\lambda}}p_{\bar{\mu}}=\delta_{\bar{\lambda},\bar{\mu}}$,$\sum\limits_{\bar{\lambda}\in\overline{\Lambda(2,r)}}p_{\bar{\lambda}}=1$.

⑥ $e^l=0$,$f^l=0$.

⑦ $ef-fe=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda(2,r)}[\lambda_1-\lambda_2]_\varepsilon k_\lambda$.

⑧ e,f和$p_{\bar{\lambda}}$有下列交换关系,$ep_{(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2)}=p_{(\overline{\lambda_1+1},\overline{\lambda_2-1})}e$,$fp_{(\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2)}=p_{(\overline{\lambda_1-1},\overline{\lambda_2+1})}f$.

⑨ $e^a p_{(\overline{5},\overline{r-5})} f^b=0$,如果 $a+b=r-4$.

命题 3　集合 $M':=\{e^a p_{\overline{\lambda}} f^b \mid \overline{\lambda}\in\overline{\Lambda(2,r)}, a+b\leqslant\mu_2$,其中 $\mu\in\Lambda(2,r)$,满足$\overline{\mu}=\overline{\lambda}\}$是 $u_q(2,r)$ 的一组基.

把由命题 2(1)(或者命题 2(2))中的生成元与关系式定义的代数记作 s'. 令 s'^+,s'^-,s'^0 分别是由 $e,f,p_{\overline{\lambda}}$ 在 s' 中生成的子代数. 根据关系①～④(或者⑤～⑧),$s'=s'^+s'^0s'^-$. s' 可由 $e^a p_{\overline{\lambda}} f^b$ 生成,$\overline{\lambda}\in\overline{\Lambda(2,r)}$.

4.1　$r=1,2,3,4$

引理 1　r 分别取值 1,2,3,4 时,集合 $M':=\{e^a p_{\overline{\lambda}} f^b \mid \overline{\lambda}\in\overline{\Lambda(2,r)}, a+b\leqslant\mu_2$,其中 $\mu\in\Lambda(2,r)$,满足$\overline{\mu}=\overline{\lambda}\}$均张成 s'.

证明　首先,根据关系①～④,s' 由 $e^a p_{\overline{\lambda}} f^b$ 张成,其中,$\overline{\lambda}\in\overline{\Lambda(2,r)}$. 其次,对于$\{e^a p_{\overline{\lambda}} f^b \mid \overline{\lambda}\in\overline{\Lambda(2,r)}, a+b>\mu_2$,其中 $\mu\in\Lambda(2,r)$,满足$\overline{\mu}=\overline{\lambda}\}$中的元素,均可由 M'中的元素表示.

(1) 对于 $r=1$,根据关系②,$a,b\in\{0,1\}$.

当$\overline{\lambda}=(\overline{1},\overline{0})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1\},a+b>0\}=\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$,利用关系④知结论成立.

当$\overline{\lambda}=(\overline{0},\overline{1})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1\},a+b>1\}=\{(1,1)\}$,利用关系③和④有

$$\begin{aligned}ep_{(\overline{0},\overline{1})}f&=p_{(\overline{1},\overline{0})}ef=\\&p_{(\overline{1},\overline{0})}(fe+p_{(\overline{1},\overline{0})}-p_{(\overline{0},\overline{1})})=\\&p_{(\overline{1},\overline{0})}\end{aligned}$$

因此结论成立.

(2) 对于 $r=2$,根据关系②,$a,b\in\{0,1,2\}$.

当$\overline{\lambda}=(\overline{2},\overline{0})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>0\}=\{(1,0),(0,1),(1,1),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2),(2,2)\}$,利用关系④知结论成立.

当$\overline{\lambda}=(\overline{1},\overline{1})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>1\}=\{(1,1),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2),(2,2)\}$,利用关系③和④有

$$\begin{aligned}ep_{(\overline{1},\overline{1})}f&=p_{(\overline{2},\overline{0})}(fe+p_{(\overline{2},\overline{0})}-p_{(\overline{0},\overline{2})})=\\&p_{(\overline{2},\overline{0})}\end{aligned}$$

余下的由关系④知结论成立.

当$\overline{\lambda}=(\overline{0},\overline{2})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>2\}=\{(2,1),(1,2),(2,2)\}$,利用关系④和③有

$$\begin{aligned}e^2p_{(\overline{0},\overline{2})}f&=ep_{(\overline{1},\overline{1})}(fe+p_{(\overline{2},\overline{0})}-p_{(\overline{0},\overline{2})})=\\&ep_{(\overline{1},\overline{1})}\end{aligned}$$

同理可得到 $ep_{(\overline{0},\overline{2})}f^2=p_{(\overline{1},\overline{1})}f$;并且得到 $e^2p_{(\overline{0},\overline{2})}f^2=ep_{(\overline{1},\overline{1})}f=p_{(\overline{2},\overline{0})}$. 因此结论成立.

(3) 对于 $r=3$,根据关系②,$a,b\in\{0,1,2\}$.

$\overline{\lambda}=(\overline{3},\overline{0})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>0\}=\{(1,0),(0,1),(1,1),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2),(2,2)\}$,根据关系④知结论成立.

当$\overline{\lambda}=(\overline{2},\overline{1})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>1\}=\{(1,1),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2),(2,2)\}$,利用关系③,④有

$$ep_{(\overline{2},\overline{1})}f=(fe+p_{(\overline{2},\overline{1})}-p_{(\overline{1},\overline{2})})p_{(\overline{3},\overline{0})}=0$$

利用关系④得到 $e^2p_{(\overline{2},\overline{1})}=e(ep_{(\overline{2},\overline{1})})=e(p_{(\overline{3},\overline{0})}e)=p_{(\overline{4},\overline{-1})}e^2=0e^2=0$;同理可得到 $p_{(\overline{2},\overline{1})}f^2=0$. 从而也得到 $e^2p_{(\overline{2},\overline{1})}f=0$,$ep_{(\overline{2},\overline{1})}f^2=0$,$e^2p_{(\overline{2},\overline{1})}f^2=0$. 因此结论成立.

当$\overline{\lambda}=(\overline{1},\overline{2})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>2\}=\{(2,1),(1,2),(2,2)\}$,利用关系③,④有

$$e^2p_{(\overline{1},\overline{2})}f=ep_{(\overline{2},\overline{1})}(fe+p_{(\overline{2},\overline{1})}-p_{(\overline{1},\overline{2})})=ep_{(\overline{2},\overline{1})}$$

同理可得到 $ep_{(\overline{1},\overline{2})}f^2=p_{(\overline{2},\overline{1})}f$. 对于 $e^2p_{(\overline{1},\overline{2})}f^2$,根据以上计算得到 $e^2p_{(\overline{1},\overline{2})}f^2=0$.

$\overline{\lambda}=(\overline{0},\overline{3})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>3\}=\{(2,2)\}$,利用关系③,④有

$$\begin{aligned}e^2p_{(\overline{0},\overline{3})}f^2&=(fe+p_{(\overline{2},\overline{1})}-p_{(\overline{1},\overline{2})})ep_{(\overline{1},\overline{2})}f-\\&ep_{(\overline{1},\overline{2})}f=(ef-p_{(\overline{2},\overline{1})}+p_{(\overline{1},\overline{2})})p_{(\overline{2},\overline{1})}=\\&ep_{(\overline{1},\overline{2})}f-p_{(\overline{2},\overline{1})}\end{aligned}$$

因此结论成立.

(4) 对于 $r=4$,根据关系②,$a,b\in\{0,1,2\}$.

当$\overline{\lambda}=(\overline{4},\overline{0})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>0\}=\{(1,0),(0,1),(1,1),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2),(2,2)\}$,根据关系④知结论成立.

当$\overline{\lambda}=(\overline{3},\overline{1})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>1\}=\{(1,1),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2),(2,2)\}$,利用关系③,④有

$$\begin{aligned}ep_{(\overline{3},\overline{1})}f&=p_{(\overline{4},\overline{0})}(fe-p_{(\overline{4},\overline{0})}+p_{(\overline{3},\overline{1})}-\\&p_{(\overline{1},\overline{3})}+p_{(\overline{0},\overline{4})}=-p_{(\overline{4},\overline{0})}\end{aligned}$$

余下的由关系④知,结论成立.

当$\overline{\lambda}=(\overline{2},\overline{2})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>2\}=\{(2,1),(1,2),(2,2)\}$,利用关系④,③,类似计算可得到 $e^2p_{(\overline{2},\overline{2})}f=0$,$ep_{(\overline{2},\overline{2})}f^2=0$;显然有

$$e^2p_{(\overline{2},\overline{2})}f^2=0$$

因此结论成立.

当$\overline{\lambda}=(\overline{1},\overline{3})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>3\}=\{(2,2)\}$,利用关系③,④计算可得

$$e^2p_{(\overline{1},\overline{3})}f^2=ep_{(\overline{2},\overline{2})}f$$

因此结论成立.

当$\overline{\lambda}=(\overline{0},\overline{4})$时,$\{(a,b)\mid a,b\in\{0,1,2\},a+b>4\}=\varnothing$.

命题 4　r 分别取值 1,2,3,4 时,均有代数之间

的同构 $s'\cong u_q(2,r)$ 满足

$$e\mapsto e,f\mapsto f,p_{\bar\lambda}\mapsto p_{\bar\lambda}$$

并且 M' 是 $u_q(2,r)$ 的一组基.

证明 当 r 分别取值 1,2,3,4 时,在 $u_q(2,r)$ 中,关系①～④成立. 从而得到代数满同态 $\eta:s'\to u_q(2,r)$ 满足 $\eta(e)=e,\eta(f)=f,\eta(p_{\bar\lambda})=p_{\bar\lambda}$. 根据文献[1],当 r 分别取值 1,2,3,4 时,经计算可分别得到 $\dim u_q(2,r)$ 等于 4,10,18,27;而相应地,$\# M'$ 分别等于 4,10,18,27,因此命题得证.

4.2 r=5,6,7,8

引理2 r 分别取值 5,6,7,8 时,集合 $M':=\{e^a p_{\bar\lambda} f^b\,|\,\bar\lambda\in\overline{\Lambda(2,r)},a+b\leqslant\mu_2$,其中 $\mu\in\Lambda(2,r)$,满足 $\bar\mu=\bar\lambda\}$ 张成 s'.

证明 首先,根据关系⑤～⑧,s' 由 $e^a p_{\bar\lambda} f^b$ 张成,其中 $a,b\in\{0,1,2\},\bar\lambda\in\overline{\Lambda(2,r)}$. 其次,对于 $\{e^a p_{\bar\lambda} f^b\,|\,\bar\lambda\in\overline{\Lambda(2,r)},a+b>\mu_2$,其中 $\mu\in\Lambda(2,r)$,满足 $\bar\mu=\bar\lambda\}$ 中的元素,均可由 M' 中的元素表示.

(1) 对于 $r=5$

当 $\bar\lambda=(\bar5,\bar0)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>0\}=\{(1,0),(0,1),(1,1),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2),(2,2)\}$,根据关系⑨知,结论成立.

当 $\bar\lambda=(\bar4,\bar1)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>1\}=\{(1,1),(2,0),(0,2),(2,1),(1,2),(2,2)\}$,利用关系⑦,⑧有

$$ep_{(\bar4,\bar1)}f=p_{(\bar5,\bar0)}(fe-p_{(\bar5,\bar0)}+p_{(\bar3,\bar2)}-p_{(\bar2,\bar3)}+p_{(\bar0,\bar5)})=-p_{(\bar5,\bar0)}$$

余下的由关系⑧知,结论成立.

当 $\bar\lambda=(\bar3,\bar2)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>2\}=\{(2,1),(1,2),(2,2)\}$,利用关系⑦,⑧有

$$e^2p_{(\bar3,\bar2)}f=ep_{(\bar4,\bar1)}(fe-p_{(\bar5,\bar0)}+p_{(\bar3,\bar2)}-p_{(\bar2,\bar3)}+p_{(\bar0,\bar5)})=-ep_{(\bar4,\bar1)}$$

同理可得到 $ep_{(\bar3,\bar2)}f^2=-p_{(\bar4,\bar1)}f$;根据以上计算,$e^2p_{(\bar3,\bar2)}f^2=-ep_{(\bar4,\bar1)}f=p_{(\bar5,\bar0)}$. 因此结论成立.

当 $\bar\lambda=(\bar2,\bar3)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>3\}=\{(2,2)\}$,利用关系⑦,⑧有

$$\begin{aligned}e^2p_{(\bar2,\bar3)}f^2&=e(fe-p_{(\bar5,\bar0)}+p_{(\bar3,\bar2)}-p_{(\bar2,\bar3)}+p_{(\bar0,\bar5)})fp_{(\bar4,\bar1)}=(fe-\\&p_{(\bar5,\bar0)}+p_{(\bar3,\bar2)}-p_{(\bar2,\bar3)}+\\&p_{(\bar0,\bar5)})ep_{(\bar3,\bar2)}f+ep_{(\bar3,\bar2)}f=\\&-e(fp_{(\bar4,\bar1)})+ep_{(\bar3,\bar2)}f=0\end{aligned}$$

因此结论成立.

当 $\bar\lambda=(\bar1,\bar4)$ 和 $\bar\lambda=(\bar0,\bar5)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>\mu_2$,其中 $\mu\in\Lambda(2,5)$,满足 $\bar\mu=\bar\lambda\}=\varnothing$.

(2) 对于 $r=6$

当 $\bar\lambda=(\bar0,\bar0)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>\max\{0,6\}\}=\varnothing$.

当 $\bar\lambda=(\bar4,\bar2)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>2\}=\{(2,1),(1,2),(2,2)\}$,利用关系⑦,⑧,⑨有

$$e^2p_{(\bar4,\bar2)}f=ep_{(\bar5,\bar1)}(fe-p_{(\bar5,\bar1)}+p_{(\bar4,\bar2)}-p_{(\bar2,\bar4)}+p_{(\bar1,\bar5)})=-ep_{(\bar5,\bar1)}$$

同理可得到 $ep_{(\bar4,\bar2)}f^2=-p_{(\bar5,\bar1)}f$. 利用关系⑨,$e^2p_{(\bar4,\bar2)}f^2=-ep_{(\bar5,\bar1)}f=0$. 因此结论成立.

当 $\bar\lambda=(\bar5,\bar1)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>1\}=\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(2,0),(0,2)\}$,前面4个由关系⑨知结论成立. 由上面的计算知,$ep_{(\bar5,\bar1)}=-e^2p_{(\bar4,\bar2)}f$,又 $e^3=0$,从而得到 $e^2p_{(\bar5,\bar1)}=-e^3p_{(\bar4,\bar2)}f=0$;同理得到 $p_{(\bar5,\bar1)}f^2=0$,因此结论成立.

当 $\bar\lambda=(\bar3,\bar3)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>3\}=\{(2,2)\}$,利用关系⑦,⑧类似(1)计算可以得到 $e^2p_{(\bar3,\bar3)}f^2=-ep_{(\bar4,\bar2)}f-p_{(\bar5,\bar1)}$,因此结论成立.

当 $\bar\lambda=(\bar2,\bar4)$ 和 $\bar\lambda=(\bar1,\bar5)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>\mu_2$,其中 $\mu\in\Lambda(2,6)$,满足 $\bar\mu=\bar\lambda\}=\varnothing$.

(3) 对于 $r=7$

当 $\bar\lambda=(\bar1,\bar0)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>\max\{0,6\}\}=\varnothing$.

当 $\bar\lambda=(\bar0,\bar1)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>\max\{1,7\}\}=\varnothing$.

当 $\bar\lambda=(\bar5,\bar2)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>2\}=\{(2,1),(1,2),(2,2)\}$,前面2个由关系⑨知结论成立. 利用关系⑨得到 $e^2p_{(\bar5,\bar2)}f^2=0$.

当 $\bar\lambda=(\bar4,\bar3)$ 时,$\{(a,b)a,b\in\{0,1,2\},a+b>3\}=\{(2,2)\}$,利用关系⑦,⑧,⑨类似(1)可以得到 $e^2p_{(\bar4,\bar3)}f^2=-ep(\bar5,\bar2)f$.

当 $\bar\lambda=(\bar3,\bar4)$ 和 $\bar\lambda=(\bar2,\bar5)$ 时,$\{(a,b)|a,b\in\{0,1,2\},a+b>\mu_2$,其中 $\mu\in\Lambda(2,7)$,满足 $\bar\mu=\bar\lambda\}=\varnothing$.

(4) 对于 $r=8$

当 $\bar\lambda=(\bar2,\bar0)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>\max\{0,6\}\}=\varnothing$.

当 $\bar\lambda=(\bar1,\bar1)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>\max\{1,7\}\}=\varnothing$.

当 $\bar\lambda=(\bar0,\bar2)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>\max\{2,8\}\}=\varnothing$.

当 $\bar\lambda=(\bar5,\bar3)$ 时,$\{(a,b)\,|\,a,b\in\{0,1,2\},a+b>3\}=\{(2,2)\}$,由关系⑨知结论成立.

当 $\bar\lambda=(\bar4,\bar4)$ 和 $\bar\lambda=(\bar3,\bar5)$ 时,$\{(a,b)|a,b\in\{0,1,2\},a+b>\mu_2$,其中 $\mu\in\Lambda(2,5)$,满足 $\bar\mu=$

$\bar{\lambda}\}=\emptyset$.

命题 5　r 分别取值 5，6，7，8 时，均有代数之间的同构 $s'\cong u_q(2,r)$ 满足

$$e\mapsto e,\ f\mapsto f,\ p_{\bar{\lambda}}\mapsto p_{\bar{\lambda}}$$

并且 M'是 $u_q(2,r)$ 的一组基.

证明　在 $u_q(2,r)$中，关系⑤～⑧成立.

在 $u_q(2,5)$中，关系⑨显然成立.

在 $u_q(2,6)$中，有

$$ep_{(\bar{5},\bar{1})}f=\begin{bmatrix}5&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0\\1&0\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}5&1\\0&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}5&0\\1&0\end{bmatrix}$，则 $d_{\boldsymbol{A}_1}=5$,$d_{\boldsymbol{A}_2}=0$,于是

$$\begin{bmatrix}5&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0\\1&0\end{bmatrix}(c_{11}^6)=\varepsilon^{-5}\xi_{\boldsymbol{A}_1}\xi_{\boldsymbol{A}_2}(c_{11}^6)=\varepsilon^{-5}(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8+\varepsilon^{10})=0$$

则有 $ep_{(\bar{5},\bar{1})}f=0$，所以关系⑨对于 $r=6$ 成立.

因为

$$e^2p_{(\bar{5},\bar{2})}f=\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^2)\begin{bmatrix}5&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0\\1&1\end{bmatrix}=\varepsilon^{-10}\cdot\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^8+\varepsilon^{10})\begin{bmatrix}6&1\\0&0\end{bmatrix}\varepsilon^6=0$$

同理可得到 $ep_{(\bar{5},\bar{2})}f^2=0$,所以关系⑨对于 $r=7$ 成立.

类似计算可以得到 $e^2p_{(\bar{5},\bar{3})}f^2=0$,所以关系⑨对于 $r=8$ 成立.

从而当 r 分别取值 5,6,7,8 时，均有代数满同态 $\eta:s'\twoheadrightarrow u_q(2,r)$满足 $\eta(e)=e,\eta(f)=f,\eta(p_{\bar{\lambda}})=p_{\bar{\lambda}}$. 根据文献[1]，当 r 分别取值 5,6,7,8 时，经计算可分别得到 $\dim u_q(2,r)$等于 36,44,50,53;而相应地，$\#M'$分别等于 36,44,50,53,因此命题得证.

4.3　r=9，10，11，12，13，14

根据文献[1]经计算可得到，$\dim u_q(2,9)=\dim u_q(2,10)=\dim u_q(2,11)=\dim u_q(2,12)=\dim u_q(2,13)=\dim u_q(2,14)=54$. 可知这 6 个小 q-Schur 代数的基有一个统一"形式"$\{e^a p_{\bar{\lambda}} f^b\mid\bar{\lambda}\in\overline{\Lambda(2,r)}\}$,其中 $a,b\in\{0,1,2\}$. 但是它们的生成元不一样,不难得出它们的生成元与关系式.

4.4　r>14

根据文献[8]知,取 $n=2,l'=6$，则有，当 $r\geqslant 9$ 时，$u_q(2,r)\cong u_q(2,r+6)$. 再结合文献[8]知，当 $r>14$时，$u_q(2,r)$ 的生成元与关系式可以由 $u_q(2,9)$,$u_q(2,10)$,$u_q(2,11)$，$u_q(2,12)$,$u_q(2,13)$，$u_q(2,14)$中得到.

参考文献:

[1]　Fu Q. Little q-Schur algebras at even roots of unity[J]. Journal of Algebra，2007，311(1):202.

[2]　Lusztig G. Finite-dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebra[J]. Journal of the American Mathematical Society，1990，3:257.

[3]　Lusztig G. Canonical bases arising from quantized enveloping algebras[J]. Journal of the American Mathematical Society，1990，3(2):447.

[4]　Dipper R，Donkin S. Quantum GL_n[C]//Proceedings of the London Mathematical Society. London:[s.n.]，1991，63:165.

[5]　Beilinson A A，Lusztig G，Macpherson R. A geometric setting for the quantum deformation of GL_n[J]. Duke Mathematical Journal，1990，61(2):655.

[6]　Du J. A note on the quantized Weyl reciprocity at roots of unity[J]. Algebra Colloquium，1995，2:363.

[7]　Du J，Fu Q，Wang J P. Infinitesimal quantum gl_n and little q-Schur algebras[J]. Journal of Algebra，2005(1):199.

[8]　Du J，Fu Q，Wang J P. Representations of little q-Schur algebras[J]. Pacific Journal of Mathematics，2011，257(2):343.