

模态耦合及摩擦系数-速度斜率与黏滑运动的关系

张立军, 吴 军, 孟德建

(同济大学 汽车学院, 上海 201804)

摘要: 摩擦尖叫的理论目前主要有摩擦系数-速度负斜率、模态耦合、黏-滑运动和锁-滑理论,但没有一种理论可以完全解释摩擦尖叫等现象。因此,深入探讨各个理论之间的内在联系对于统一摩擦振动和噪声机理的认识至关重要。以摩擦系数及其速度特性为切入点,基于考虑摩擦系数及其速度斜率的单点接触集总参数柔体-刚体组成的二自由度非线性摩擦振动动力学模型,通过理论推导和数值计算研究摩擦系数-速度斜率对模态耦合不稳定的影响,并根据摩擦系数及其速度斜率的符号形成 4 个区域,分析了 4 个区域的黏-滑运动的特点和极限环及工况依赖性,并指出在摩擦系数-速度正斜率情况下系统参数改变会导致 Hopf 分岔。

关键词: 摩擦尖叫; 摩擦系数-速度斜率; 模态耦合; 黏滑运动; Hopf 分岔

中图分类号: U463

文献标志码: A

Relationship among Mode Coupling, Friction-velocity Slope and Stick-slip Motion

ZHANG Lijun, WU Jun, MENG Dejian

(School of Automotive Studies, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: Till now, four main frictional squeal mechanisms are highlighted including negative friction-velocity slope theory, mode coupling theory, sprag-slip motion theory and stick-slip motion theory. However, none of them can explain various frictional squeal phenomena fully. So it is very important to make clear the relationship among various mechanisms in order to unify the realization of friction induced vibration and noise. A nonlinear friction induced vibration lumped-parameter model with two degree of freedoms is established, to simulate the friction induced vibration behaviour between a flexible body and a rigid body frictional pairs with single-point contact based on friction coefficient and friction-velocity slope. By deduction and calculation, effect of friction coefficient and friction-velocity slope on

mode coupling instability is studied, according to which instability characteristics are summarized in four areas. For each area, stick-slip motion, limit cycle and their dependence on working conditions are investigated. At the same time, it is pointed out that the change of system parameters result in the occurrence of Hopf bifurcation under the condition of positive friction-velocity slope.

Key words: friction induced squeal; friction-velocity slope; mode coupling; stick-slip motion; Hopf bifurcation

摩擦振动和噪声现象广泛存在于各种机械摩擦系统中,例如制动器、离合器和列车轮轨系统等^[1-2]。迄今为止,人们尚未完全弄清摩擦振动和噪声的发生机理,亦未建立完全行之有效的控制方法。因此,它一直是学术界和工业界的关注热点^[1-4]。

截至目前,有关摩擦振动和噪声的发生机理理论主要包括黏滑运动理论、摩擦系数-速度负斜率理论、模态耦合不稳定理论、自锁-滑动理论以及摩擦激励与结构耦合统一理论等,详见多篇综述性论文^[1-2,5-28]。其中,模态耦合不稳定理论不仅能够解释许多摩擦噪声现象,而且便于利用有限元软件进行面向对象的预测与分析,应用非常广泛^[1-4]。黏滑运动^[29-32]作为最早提出的一种摩擦噪声机理理论,常被看作是低声压级摩擦尖叫发生的主要原因。摩擦系数-速度负斜率不稳定理论^[30-31,33-34]是一个曾经被广泛认可的理论,但因为不能合理解释摩擦噪声对摩擦系数的依赖性以及不存在负斜率时仍发生噪声等现象而受到严重质疑,认可度下降。回顾历史发现,不同的机理理论由不同的研究者在不同的时期针对不同的对象采用不同的研究手段得到,因此研究者们似乎都会“过度”专注于自己提出的理论,试图解释所有的摩擦振动和噪声现象,同时,又严重忽

收稿日期: 2014-11-05

基金项目: 国家自然科学基金(51175380)

第一作者: 张立军(1972—),男,教授,博士生导师,工学博士,主要研究方向为汽车振动与噪声的分析与控制。

E-mail: tjedu_zhanglijun@tongji.edu.cn

视了对所提出理论成立条件的严格界定,更缺乏与其他理论之间的相互联系的研究.这也许就是目前尚未对摩擦振动和噪声机理形成共识的原因所在.

众所周知,摩擦特性对于摩擦振动和噪声具有极其重要的影响,在各种机理理论中,摩擦特性都占据着极其重要的地位.摩擦特性,不仅包括摩擦系数的大小,也包括摩擦系数-速度斜率.因此,摩擦特性无疑成为探究不同摩擦振动和噪声机理理论之间联系的极好切入点.在此背景下,本文从摩擦特性(摩擦系数及其速度斜率)切入,针对一类由集总参数柔体-刚体摩擦副构成的摩擦振动系统建立点接触摩擦振动动力学模型,采用数学公式推导和数值计算的手段考察不同摩擦系数和摩擦系数-速度斜率组合条件下的系统摩擦振动不稳定性,以及黏滑动态响应现象的异同,探讨模态耦合、负斜率和黏滑运动 3 种理论之间的联系.

1 摩擦系统的模态耦合不稳定性

1.1 摩擦振动物理模型

借鉴文献[6],针对一类典型的由集总参数柔体和刚体摩擦副构成的摩擦振动系统建立单点接触、单质量二自由度非线性动力学模型,如图 1 所示.图 1 中,集总参数柔体由具有 x 和 y 2 个自由度的质点质量 m ,与 x 轴成 α_1 ($\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \pi$) 和 α_2 ($0 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$) 角度的刚度分别为 k_1 和 k_2 的弹簧构成.刚体为按照速度 v_0 平移的无质量刚性带.柔体和刚体之间为单点接触,法向接触刚度为 k_3 .为了保持二者始终处于摩擦接触状态,在质点上施加法向力 L . F_N 与 F_F 分别表示质点与带之间的法向接触力与摩擦力.

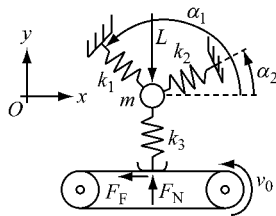


图 1 二自由度非线性摩擦振动模型

Fig.1 2 degrees of freedom nonlinear friction vibration model

1.2 摩擦系数模型

柔体和刚体之间的摩擦系数为 f ,其数学表达式为

$$f = \operatorname{sgn}(V_{\text{rel}})\mu \quad (1)$$

$$\mu = (1 - e^{-d|V_{\text{rel}}|})\{\mu_k - (\mu_k - \mu_s)e^{-h|V_{\text{rel}}|}\} \quad (2)$$

$$V_{\text{rel}} = v_0 + \dot{x} \quad (3)$$

式中: μ_k, μ_s 分别为动、静摩擦系数的控制参数; d, h 分别为原点附近正斜率区的大小与动摩擦区斜率大小的控制参数. V_{rel} 为质点与带之间的相对速度大小.

定义摩擦系数参数组合 I ($\mu_s = 0.6, \mu_k = 0.4, d = 50, h = 1$) 和摩擦系数参数组合 II ($\mu_s = 0.4, \mu_k = 0.6, d = 50, h = 1$), 分别得到具有摩擦系数-速度负斜率和摩擦系数-速度正斜率的摩擦系数特性, 用于后续数值计算分析. 其特性曲线如图 2 所示.

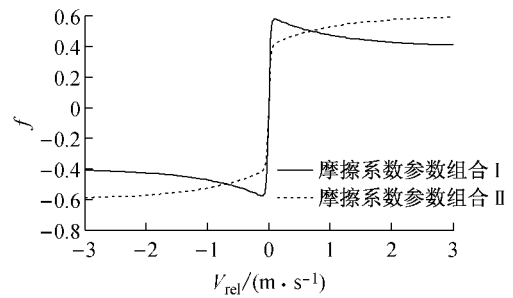


图 2 摩擦系数-速度曲线

Fig.2 Friction coefficient-velocity curve

1.3 摩擦系统的动力学模型

系统的动力学方程为

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} + (k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2)x + \\ (k_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)y = f k_3 y \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} + (k_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)x + \\ (k_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_2 + k_3)y = -L \end{cases} \quad (4)$$

定义: $t = \sqrt{m/k_1} \tau$, τ 为量纲一化的时间, 刚度比 $\kappa_1 = k_2/k_1, \kappa_2 = k_3/k_1$, 可得方程(4)的量纲一化结果为

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + (\cos^2 \alpha_1 + \kappa_1 \cos^2 \alpha_2)x + \\ (\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \kappa_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)y = f \kappa_2 y \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} + (\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \kappa_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2)x + \\ (\sin^2 \alpha_1 + \kappa_1 \sin^2 \alpha_2 + \kappa_3)y = -L/\kappa_1 \end{cases} \quad (5)$$

式中: $f = \operatorname{sgn}(V_r) \mu$, $\mu = (1 - e^{-d\sqrt{\frac{k_1}{m}}|V_r|}) \cdot \{\mu_k - (\mu_k - \mu_s)e^{-h\sqrt{\frac{k_1}{m}}|V_r|}\}$, $V_r = \sqrt{m/k_1}v_0 + \frac{dx}{d\tau}$, 其中 V_r 为量纲一化后的相对速度.

可通过平移变换把平衡点调整到坐标原点, 故令式(5)中 $x = u^* + u, y = v^* + v$, 可得

$$\begin{cases} \ddot{u} + \kappa_{11}u + (\kappa_{12} - f\kappa_2)v = (f - f^*)\kappa_2v^* \\ \ddot{v} + \kappa_{21}u + \kappa_{22}v = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{式中, } u^* = \frac{\frac{L}{k_1}(\kappa_{12} - f^*\kappa_2)}{\begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} - f^*\kappa_2 \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{vmatrix}}, \quad v^* = \frac{-\frac{L}{k_1}\kappa_{11}}{\begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} - f^*\kappa_2 \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{vmatrix}}, \quad f^* = f|_{\dot{u}=0}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{d\tau^2}, \quad \ddot{v} = \frac{d^2v}{d\tau^2},$$

$$\dot{u} = \frac{du}{d\tau}, \quad \kappa_{11} = \cos^2\alpha_1 + \kappa_1\cos^2\alpha_2, \quad \kappa_{12} = \kappa_{21} = \sin\alpha_1 \cdot \cos\alpha_1 + \kappa_1\sin\alpha_2\cos\alpha_2, \quad \kappa_{22} = \sin^2\alpha_1 + \kappa_1\sin^2\alpha_2 + \kappa_2, \quad f = \text{sgn}(V_r) \mu, \quad \mu = (1 - e^{-\sqrt{\frac{k_1}{m}}|V_r|}) \{ \mu_k - (\mu_k - \mu_s)e^{-\sqrt{\frac{k_1}{m}}|V_r|} \}, \quad V_r = \sqrt{m/k_1}v_0 + \dot{u}.$$

2 摩擦特性对模态耦合不稳定的影响

2.1 系统线性化与稳定性分析

对摩擦系数进行泰勒级数展开,并忽略高次项,可得

$$f(V_r) = f(\sqrt{m/k_1}v_0 + \dot{u}) = f(\sqrt{m/k_1}v_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial V_r} \right|_{\dot{u}=0} \dot{u} + o(\dot{u}^2) = f^* + \beta \dot{u} \quad (7)$$

式中: β 为摩擦系数在量纲一化的速度处的斜率, $\beta = \left. \frac{\partial f}{\partial V_r} \right|_{\dot{u}=0}$.

将式(7)代入式(6),只考虑平衡位置附近的振动,故忽略高次项 $\dot{u}v$,可得

$$\begin{cases} \ddot{u} + \kappa_{11}u + (\kappa_{12} - f^*\kappa_2)v = (f - f^*)\kappa_2v^* \\ \ddot{v} + \kappa_{21}u + \kappa_{22}v = 0 \end{cases} \quad (8)$$

将式(8)写成矩阵形式,可得线性化系统为

$$\begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{pmatrix} + \mathbf{C} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\text{式中: } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\beta\kappa_2v^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} - f^*\kappa_2 \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{bmatrix}.$$

由式(9)可知,由于存在摩擦系数-速度斜率,系统产生了阻尼矩阵 \mathbf{C} ,即在 u 方向的等效阻尼为 $-\beta\kappa_2v^*$,而在 v 方向上的等效阻尼为零。

令 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{V}e^{\lambda\tau}$,其中 \mathbf{V} 为特征向量, λ 为特征值,

可得线性化系统(9)的特征方程为一个关于 λ 的一元四次的特征多项式

$$\det(\mathbf{K} + \lambda\mathbf{C} + \lambda^2\mathbf{E}) = \lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 +$$

$$b_3\lambda + b_4 = 0 \quad (10)$$

式中: $b_1 = -\beta\kappa_2v^*$; $b_2 = \kappa_{11} + \kappa_{22}$; $b_3 = -\beta\kappa_2v^*\kappa_{22}$; $b_4 = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}^2 + f^*\kappa_2\kappa_{12}$.

易知,当所有特征值的实部都小于零时,线性化系统(9)稳定;而当至少有1个特征值的实部大于零时,线性化系统(9)不稳定。

分别在 $\beta=0, \beta<0, \beta>0$ 3种摩擦系数-速度斜率下,结合摩擦系数的大小,分析摩擦特性对模态耦合不稳定的影响。

2.2 摩擦系数-速度斜率为零情形

可以计算特征值,根据实部的符号变化确定模态耦合不稳定性,进而确定摩擦系数分岔点。

当 $\beta=0$ 时,系统的特征值为 $\Omega_{1,2}^2 = -\frac{1}{2}(1 + \kappa_1 + \kappa_2) \pm \frac{1}{2}[1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1\cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2\cos(2\alpha_1) - 2\kappa_1\kappa_2\cos(2\alpha_2) - 2f^*\kappa_2\kappa_{12}]^{\frac{1}{2}}$. 定义 $\Delta = 1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1\cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2\cos(2\alpha_1) - 2\kappa_1\kappa_2\cos(2\alpha_2) - 2f^*\kappa_2\kappa_{12}$,则①当 $\Delta>0$ 时, Ω_1 和 Ω_2 都是一对共轭的纯虚数,实部都为零. ②当 $\Delta=0$ 时, Ω_1 和 Ω_2 都是一对共轭的纯虚数,实部都为零. ③当 $\Delta<0$ 时, Ω_1 和 Ω_2 都是一对共轭的复数,其中一个实部大于零,一个小于零。

显然, $1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1\cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2\cos(2\alpha_1) - 2\kappa_1\kappa_2\cos(2\alpha_2) > 0$,因此可以确定:仅当 $\kappa_{12}>0$,且 $f^* > [1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1\cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2\cos(2\alpha_1) - 2\kappa_1\kappa_2\cos(2\alpha_2)]/[2\kappa_2\sin(2\alpha_1) + 2\kappa_1\kappa_2\sin(2\alpha_2)]$ 时,系统出现正实部特征值。

当摩擦系数 f^* 较小时,系统具有4个实部为零的特征值,存在2个稳定模态;随着 f^* 的增大,系统出现2个正实部特征值和2个负实部特征值,出现1个不稳定模态和1个稳定模态.由此确定 f^* 的分岔点为:当 $\kappa_{12}>0$ 时,分岔点为 $f_{a1}^* = [1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_1\cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - 2\kappa_2\cos(2\alpha_1) - 2\kappa_1\kappa_2\cos(2\alpha_2)]/(2\kappa_2\kappa_{12})$;当 $\kappa_{12}<0$ 时,系统无分岔点。

2.3 摩擦系数-速度斜率小于零情形

利用Routh-Hurwitz判据^[35]进行特征值实部正负号的判断,并可进而根据线性稳定性定理^[36]基于线性化系统(9)在平衡点附近的稳定性判断非线性系统(6)的稳定性.由式(10)易知, $H_1 = b_1$, $H_2 = b_1b_2 - b_3$, $H_3 = b_1b_2b_3 - b_3^2 - b_4b_1^2$, $H_4 = b_4H_3$.

根据Routh-Hurwitz判据,假设线性化系统(9)在平衡点处稳定,即 $H_i(i=1,2,3,4)>0$.由 $H_1>0$ 可得 $v^*>0$,即 $\kappa_{11}(\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}^2 + f^*\kappa_2\kappa_{12})<0$;由 $H_3>0$ 及 $H_4>0$ 可得 $\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}^2 + f^*\kappa_2\kappa_{12}>0$.

因 $\kappa_{11} > 0$, $H_1 > 0$ 和 $H_3 > 0$ 不能同时成立. 因此, 线性化系统(9)在平衡点处不稳定, 非线性系统(6)在平衡点处也不稳定.

在式(10)中, 令 $\lambda' = -\lambda$, 由此可得一个关于 λ' 的一元四次的特征多项式: $\lambda'^4 + b'_1 \lambda'^3 + b'_2 \lambda'^2 + b'_3 \lambda' + b'_4 = 0$, 式中: $b'_1 = \beta \kappa_2 v^*$, $b'_2 = \kappa_{11} + \kappa_{22}$, $b'_3 = \beta \kappa_2 v^* \kappa_{22}$, $b'_4 = \kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2 + f^* \kappa_2 \kappa_{12}$.

利用 Routh-Hurwitz 判据, $H'_1 = b'_1$, $H'_2 = b'_1 b'_2 - b'_3$, $H'_3 = b'_1 b'_2 b'_3 - b'^2_3 - b'_4 b'^2_1$, $H'_4 = b'_4 H'_3$.

若假设 $H'_i (i=1, 2, 3, 4) > 0$, 由 $H'_1 > 0$ 可得 $v^* < 0$, 即 $\kappa_{11} (\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2 + f^* \kappa_2 \kappa_{12}) > 0$, 而当 $H'_1 > 0$ 时, $H'_2 > 0$ 恒成立. 由 $H'_3 > 0$, 可得 $\kappa_{12}^2 - f^* \kappa_2 \kappa_{12} > 0$; 由 $H'_4 > 0$ 可得 $\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2 + f^* \kappa_2 \kappa_{12} > 0$. 即只要满足 $\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2 + f^* \kappa_2 \kappa_{12} > 0$, $\kappa_{12}^2 - f^* \kappa_2 \kappa_{12} > 0$ 时, 线性化系统(9)稳定.

由此可得: 当 $\kappa_{12} > 0$ 时, $f^* < \kappa_{12} / \kappa_2$, 或当 $\kappa_{12} < 0$ 时, $f^* < (\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2) / (-\kappa_2 \kappa_{12})$, λ' 有 4 个实部小于零的特征值, 则 λ 有 4 个实部大于零的特征值, 线性化系统(9)不稳定. 当 $\kappa_{12} > 0$ 时, $f^* > \kappa_{12} / \kappa_2$ 或当 $\kappa_{12} < 0$ 时, $f^* > (\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2) / (-\kappa_2 \kappa_{12})$, λ' 有 2 个正实部特征值和 2 个负实部特征值, 则 λ 有 2 个负实部特征值和 2 个正实部特征值, 线性化系统(9)不稳定.

当 f^* 较小时, 系统具有 4 个实部大于零的特征值, 存在 2 个不稳定模态; 随着 f^* 增大, 系统出现 2 个正实部特征值和 2 个负实部特征值, 出现 1 个不稳定模态和 1 个稳定模态. 由此确定摩擦系数 f^* 的分岔点为: 当 $\kappa_{12} > 0$ 时, 分岔点为 $f_{b1}^* = \kappa_{12} / \kappa_2$; 当 $\kappa_{12} < 0$ 时, 分岔点为 $f_{b2}^* = (\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2) / (-\kappa_2 \kappa_{12})$.

定义系统参数组合 I ($\alpha_1 = 150^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$, $m = 0.5 \text{ kg}$, $k_1 = 0.5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $\kappa_1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$, $\kappa_2 = \frac{2}{2-\sqrt{3}}$, $L = 7 \text{ N}$), 对应的 $\kappa_{12} \approx 5.60$, 即 $\kappa_{12} > 0$, 结合摩擦系数参数组合 I, 保持图 2 中对应速度下的斜率 β 值不变, 而不断改变 f^* , 对线性化系统(9)计算特征值实部与频率, 得到二者在不同的摩擦系数-速度斜率情况下随 f^* 变化的情况, 如图 3. 从图 3a 和 3b 分析可知:

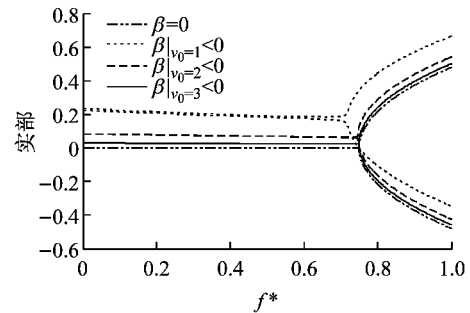
(1) 当 $\beta = 0$ 时, 仅当摩擦系数大于 f_{a1}^* ($f_{a1}^* = 0.75$) 时, 系统存在正实部特征值, 产生模态耦合不稳定.

(2) 当 $\beta < 0$ 时, 无论摩擦系数的大小, 系统总是存在正实部的特征值, 系统始终不稳定; 且随负斜率

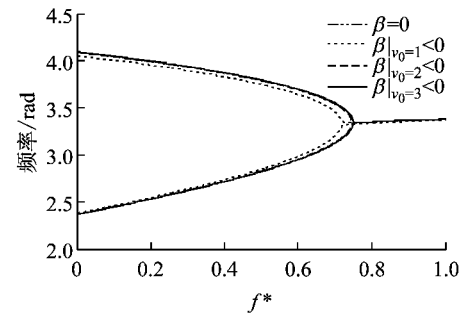
β 绝对值的增大 (对应的 v_0 减小), 特征值正实部增大, 系统不稳定性增强.

(3) 当 $\beta < 0$ 时, 当 $f^* < f_{b1}^*$ ($f_{b1}^* = 0.75$) 时, 系统只存在摩擦系数-速度负斜率产生的不稳定; 当 $f^* > f_{b1}^*$ ($f_{b1}^* = 0.75$) 时, 系统产生模态耦合, 系统同时存在摩擦系数-速度负斜率不稳定和模态耦合不稳定.

(4) 摩擦系数-速度有无负斜率以及斜率大小对频率的改变不大 (图 3b).



a 实部随摩擦系数的变化



b 频率随摩擦系数的变化

图 3 $\beta < 0$ 时特征值随摩擦系数的变化

Fig. 3 The locus of eigenvalue with respect to friction coefficient when $\beta < 0$

因此, 摩擦系数-速度负斜率会增强系统的不稳定, 但不会显著改变不稳定频率的大小; 不同负斜率 β 对应的模态耦合不稳定的摩擦系数分岔点相同, 这与理论推导结果一致.

2.4 摩擦系数-速度斜率大于零情形

与前类似, 根据 Routh-Hurwitz 判据得到 H_1, H_2, H_3, H_4 . 假设 $H_i (i=1, 2, 3, 4) > 0$, 由 $H_1 > 0$ 可得 $v^* < 0$, 即 $\kappa_{11} (\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2 + f^* \kappa_2 \kappa_{12}) > 0$, 而当 $H_1 > 0$ 时, $H_2 > 0$ 恒成立. 由 $H_3 > 0$, 可得 $\kappa_{12}^2 - f^* \kappa_2 \kappa_{12} > 0$. 由 $H_4 > 0$ 可得 $\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2 + f^* \kappa_2 \kappa_{12} > 0$. 即只要满足 $\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2 + f^* \kappa_2 \kappa_{12} > 0$, $\kappa_{12}^2 - f^* \kappa_2 \kappa_{12} > 0$ 时, 线性化系统(9)稳定.

由此可得, 当 $\kappa_{12} > 0$ 时, $f^* < \kappa_{12} / \kappa_2$, 或当 $\kappa_{12} < 0$ 时, $f^* < (\kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{12}^2) / (-\kappa_2 \kappa_{12})$, 有 4 个实部小于零

的特征值,线性化系统(9)稳定.当 $\kappa_{12} > 0$ 时, $f^* > \kappa_{12}/\kappa_2$ 或当 $\kappa_{12} < 0$ 时, $f^* > (\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}^2)/(-\kappa_2\kappa_{12})$, 系统有 2 个正实部特征值和 2 个负实部特征值,线性化系统(9)不稳定.

当 f^* 较小时,系统具有 4 个实部小于零的特征值,存在 2 个稳定模态;随着 f^* 增大,系统出现 2 个正实部特征值和 2 个负实部特征值,出现 1 个不稳定模态和 1 个稳定模态.由此确定 f^* 的分岔点为:当 $\kappa_{12} > 0$ 时,分岔点 $f_{c1}^* = \kappa_{12}/\kappa_2$;当 $\kappa_{12} < 0$ 时,分岔点 $f_{c2}^* = (\kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}^2)/(-\kappa_2\kappa_{12})$.

与前类似,利用系统参数组合 I,结合摩擦系数组合参数 II 进行计算,得到二者特征值实部与频率在不同的 β 情况下随 f^* 变化的情况,如图 4.由图 4a 和 4b 分析可知:

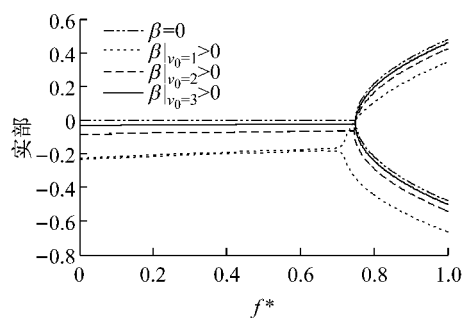
(1)当 $\beta = 0$ 时,仅当摩擦系数大于 f_{a1}^* ($f_{a1}^* = 0.75$) 时,系统存在正实部特征值,产生模态耦合不稳定.

(2)当 $\beta > 0$ 时,仅当摩擦系数大于 f_{c1}^* ($f_{c1}^* = 0.75$) 时,系统存在正实部特征值,产生模态耦合不稳定;随着正斜率 β 绝对值的增大(对应的 v_0 减小),特征值正实部减小,系统不稳定性减弱.

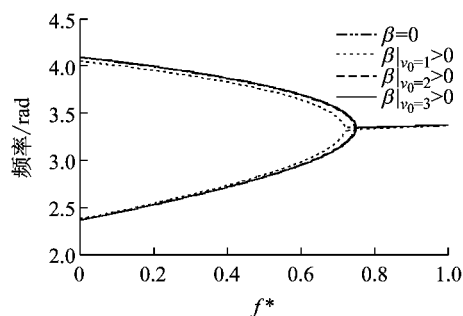
(3)当 $\beta > 0$ 时,当 $f^* < f_{c1}^*$ ($f_{c1}^* = 0.75$) 时,系统特征值实部始终为负,系统始终稳定;随着正斜率 β 绝对值的增大(对应的 v_0 减小),特征值负实部绝对值增大,系统稳定性增强.

(4)摩擦系数-速度有无正斜率以及斜率大小对频率的改变不大(图 4b).

综上,摩擦系数-速度正斜率会增强系统的稳定性,但不会显著改变不稳定频率的大小;不同正斜率 β 对应的模态耦合不稳定的摩擦系数分岔点相同,但因 $f_{a1}^* \geq f_{c1}^*$,因此 $\beta > 0$ 比 $\beta = 0$ 可以在更宽的摩擦系



a 实部随摩擦系数的变化



b 频率随摩擦系数的变化

图 4 $\beta > 0$ 时特征值随摩擦系数的变化

Fig.4 The locus of eigenvalue with respect to friction coefficient when $\beta > 0$

数范围内产生模态耦合.

2.5 摩擦系数和摩擦系数-速度斜率的汇总分析

汇总上述分析,在不同摩擦系数-速度斜率情况下的系统不稳定如表 1 所示.由表可见,模态耦合的分岔点摩擦系数的大小仅取决于系统的结构参数和接触参数,虽然与摩擦系数-速度斜率的大小无关,但是与摩擦系数-速度斜率的正负紧密相关.当 $\kappa_{12} > 0$ 时, $f_{a1}^* \geq f_{b1}^* = f_{b2}^* = f_{c1}^* = f_{c2}^*$;当 $\kappa_{12} < 0$ 时, $\beta = 0$ 时系统始终只有 2 个稳定模态,因此, $\beta \neq 0$ 比 $\beta = 0$ 在摩擦系数的更大范围内产生模态耦合不稳定.

表 1 不同斜率时的模态耦合分岔点及模态稳定性

Tab.1 The bifurcation point and modal stability with respect to different kinds of slope

斜率	模态耦合的 f^* 分岔点		模态稳定性特征	
	$\kappa_{12} > 0$	$\kappa_{12} < 0$	摩擦系数小于分岔点的值	摩擦系数大于分岔点的值
$\beta = 0$	f_{a1}^*		2 个稳定模态	1 个稳定模态和 1 个不稳定模态
$\beta < 0$	f_{b1}^*	f_{b2}^*	2 个不稳定模态	1 个稳定模态和 1 个不稳定模态
$\beta > 0$	f_{c1}^*	f_{c2}^*	2 个稳定模态	1 个稳定模态和 1 个不稳定模态

参照表 1,基于系统参数组合 I,取 f^* 与 β 组合随机数进行特征值的计算和稳定性的判断,如图 5.按照模态耦合摩擦系数分岔值和摩擦系数-速度斜率将图形分成 4 个区域:①正斜率无模态耦合稳定区(I 区);②正斜率模态耦合不稳定区(II 区);③负斜率无模态耦合不稳定区(III 区);④负斜率模态耦合不稳定区(IV 区).4 个区域之间分界线分别为 $\beta = 0$

和 $f^* = f_{a1}^* = f_{b1}^* = f_{b2}^* = f_{c1}^* = f_{c2}^*$ (分岔点参数也可能不相等).根据图 5 可知,摩擦系数-速度负斜率引起的不稳定和模态耦合不稳定是 2 种完全独立的摩擦振动和噪声发生机理理论,彼此独立且可以并存.

图 6 所示为对应 4 个区域的系统特征值实部与频率关系图.由图 6 可知:① I 区和 III 区几乎对称,系统分别有 2 个稳定频率和 2 个不稳定频率,这是

因为摩擦系数相等时,无论 β 的正负与大小,频率都比较接近;② II 区与 IV 区都有 1 个不稳定频率和 1 个稳定频率,2 个区域也近似对称分布,原因同前。

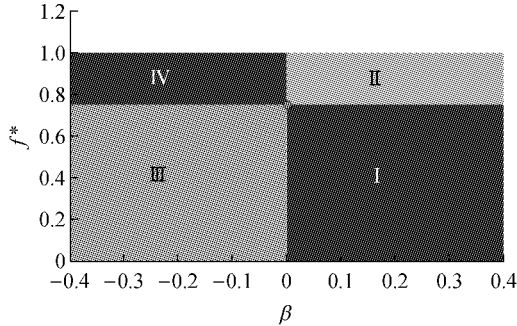


图 5 摩擦系数及其斜率变化时的 4 个区域

Fig.5 Four areas when friction coefficient and slope change

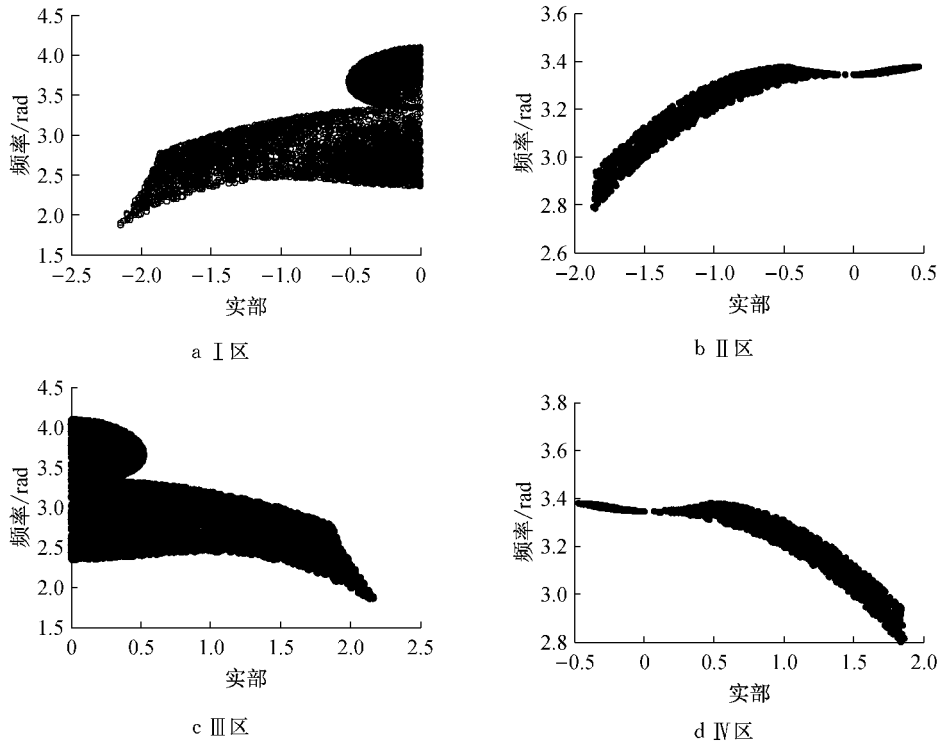


图 6 4 个区域的频率-实部关系

Fig.6 The relationship between frequency and real part in four areas

式中: $\dot{u} = w = p_1(u, w, v, z)$, $\dot{w} = -\kappa_{11}u - (\kappa_{12} - f(w)\kappa_2)v + (f(w) - f^*)\kappa_2v^* = p_2(u, w, v, z)$, $\dot{v} = z = p_3(u, w, v, z)$, $\dot{z} = -\kappa_{12}u - \kappa_{22}v = p_4(u, w, v, z)$. 可求得散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\partial p_1}{\partial u} + \frac{\partial p_2}{\partial w} + \frac{\partial p_3}{\partial v} + \frac{\partial p_4}{\partial z} = \frac{df}{dw}\kappa_2(v + v^*) \quad (12)$$

式中: df/dw 表示摩擦系数在相对速度为 $\sqrt{m/k_1} \cdot v_0 + \dot{u}$ 时的斜率。

3 摩擦特性对黏滑运动的影响

按照 4 个区域系统考察摩擦特性变化对系统黏滑运动的影响以及其对工况的依赖性。

考虑到有时可能存在极限环,首先介绍进行极限环存在性判断的 Bendixson-Dulac 判据^[36]。

定义 $\mathbf{X}(\tau) = (u(\tau) \ w(\tau) \ v(\tau) \ z(\tau))^T$, 将运动微分方程(6)化成状态空间方程,可得

$$\frac{d\mathbf{X}(\tau)}{d\tau} = \begin{bmatrix} p_1(u, w, v, z) \\ p_2(u, w, v, z) \\ p_3(u, w, v, z) \\ p_4(u, w, v, z) \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\mathbf{X}) \quad (11)$$

假设带与质点之间始终不脱离,则量纲一化的法向力为 $n_v = -\kappa_2(v + v^*) \geq 0$ 。

根据 Bendixson-Dulac 判据^[36], $Ourw$ 平面内极限环产生的必要条件是 $\nabla \cdot \mathbf{P}$ 改变符号。因此,只有当 df/dw 改变符号时才会出现极限环。

3.1 III 区的黏滑运动特点分析

取摩擦系数参数组合 I 和系统参数组合 I,系统处于图 5 中的 III 区,由于 $\frac{df}{dw} = \frac{df}{dV_r} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \frac{df}{dV_{rel}}$, 从

图 2 所示的摩擦系数-速度特性中摩擦系数曲线 I 可看出,当 $|V_{\text{rel}}|$ 非常小时, $\frac{df}{dV_{\text{rel}}} > 0$, 因此 $\frac{df}{d\omega} > 0$, 质点 x 方向速度与带速相差较小, 此时系统处于黏着阶段; 而当 $|V_{\text{rel}}|$ 比较大时, $\frac{df}{dV_{\text{rel}}} < 0$, 因此 $\frac{df}{d\omega} < 0$, 质点 x 方向速度与带速相差较大, 此时系统处于滑动阶段. 这说明, 当极限环出现时, 摩擦系数必定在正斜率区与负斜率区之间反复变化, 也就是说极限环的出现必然伴随有黏滑现象. 下面在不同的带速下

进行计算和验证分析.

3.1.1 $v_0 = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

由于摩擦系数-速度负斜率时线性化系统始终不稳定, 导致质点 x 方向速度达到带速, 因此产生了黏滑现象, 且产生间断性的多次黏滑现象, 并最终进入稳定的极限环(图 7a); 同时, 由于黏滑运动的发生, f 变化剧烈, 并有可能产生小于零的情况(图 7b), 即摩擦力会反向, 这也与文献[27]的试验现象相符. 由图 7c 可知, 质点与带之间没有产生分离.

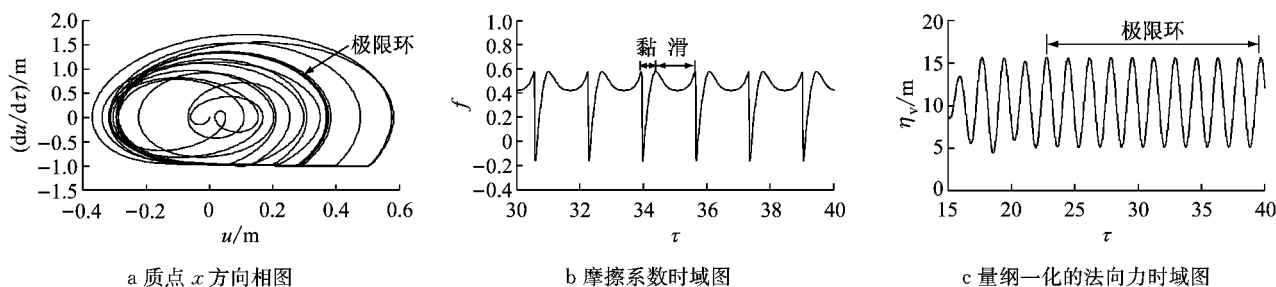


图 7 $v_0 = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时 III 区的动态响应

Fig. 7 The dynamical responses in area III when $v_0 = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

改变 $\Delta\mu = \mu_s - \mu_k$ 进行仿真, 对比极限环的变化, 如图 8 所示. 分析可知, $\Delta\mu$ 越小, 极限环越小, 黏着段对应的位移区间越小.

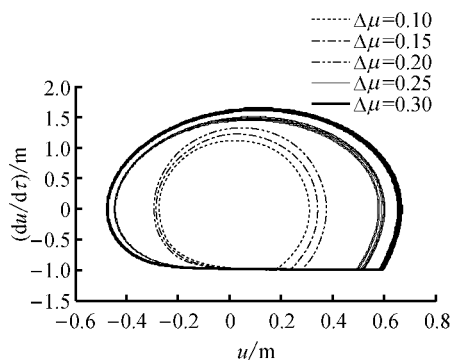


图 8 $\Delta\mu$ 变化引起的极限环的变化
Fig. 8 Limit cycle varying with $\Delta\mu$

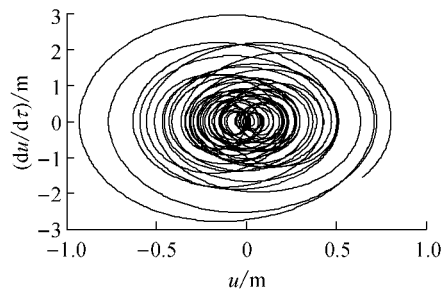
3.1.2 $v_0 = 3.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

带速增大, 特征值正实部减小, 线性化系统越趋向于稳定, 而且带速越大, 质点速度越难以达到带速(图 9a), 而且, 由于只产生滑动运动时, 摩擦系数也比较稳定, 无突变发生(图 9b).

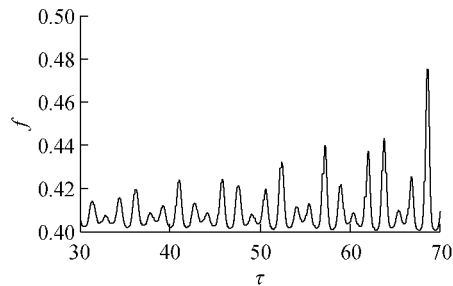
3.2 I 区的黏滑运动特点分析

由式(12)可知, β 为正时, $\nabla \cdot \mathbf{P}$ 符号不会改变, 因此不能产生极限环.

取摩擦系数参数组合 II 和系统参数组合 I, 系统处于图 5 中的正斜率模态耦合稳定区, 在低带速



a 质点 x 方向相图

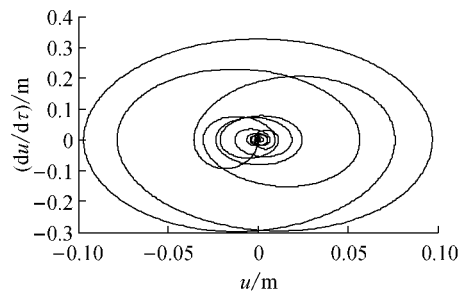


b 摩擦系数时域图

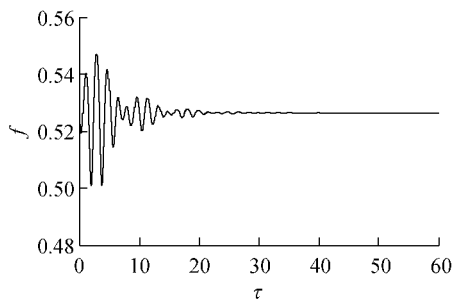
图 9 $v_0 = 3.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时 III 区的动态响应

Fig. 9 The dynamical responses in area III when $v_0 = 3.5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$v_0 = 1.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 下对非线性系统(6)进行仿真计算, 相图结果和摩擦系数变化如图 10. 显然, 由于线性化系统特征值具有负实部, 系统很快趋于稳定的滑动状态, 很难产生黏滑运动, 摩擦系数也很稳定.



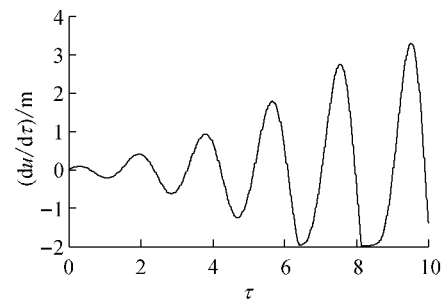
a 质点 x 方向相图



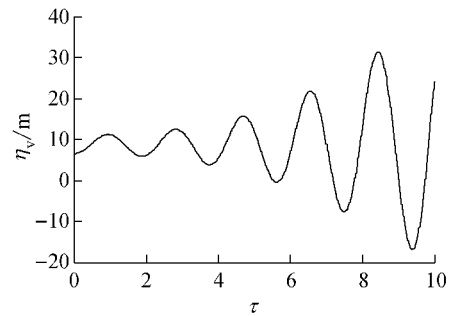
b 摩擦系数时域图

图 10 I 区的动态响应

Fig. 10 The dynamical responses in area I



a 质点 x 方向速度时域图



b 量纲一化的法向力时域图

图 11 II 区的动态响应

Fig. 11 The dynamical responses in area II

3.3 II 区与IV区的黏滑运动特点分析

此时系统存在模态耦合不稳定,系统不稳定性加剧,质点速度更容易达到带速从而产生黏滑现象.现取 $\mu_s=0.8, \mu_k=0.95, d=50, h=1$, 以及系统参数组合 I, 选取 $v_0=2.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 进行计算. 由图 11a 可知, 当系统在 $\tau=8$ 以后趋向于产生黏滑运动, 但由图 11b 可知, $\tau=7$ 以后质点与带之间就产生了脱离. 也就是说, 此时黏滑运动的发生一般伴随有质点与带的间断性分离, 这也与文献[28]的现象吻合. 由于 n_v 出现了小于零的情况, 违反了模型的假设, 所以在此不作深入分析.

4 摩擦系数-速度斜率产生的 Hopf 分岔现象

系统只有在 β 为正时才有可能产生 Hopf 分岔现象. 若 Hopf 分岔点存在, 则可求得 Hopf 分岔点如下:

当 $\kappa_{12} > 0$ 时, 由

$$\kappa_2 f|_{v_{\text{rel}}=v_0} - \kappa_{12} = 0 \quad (13)$$

确定.

当 $\kappa_{12} < 0$ 时, 由

$$(f|_{v_{\text{rel}}=v_0} \kappa_{12} + \kappa_{11}) \kappa_2 + \kappa_1 (\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \cos \alpha_1)^2 = 0 \quad (14)$$

确定.

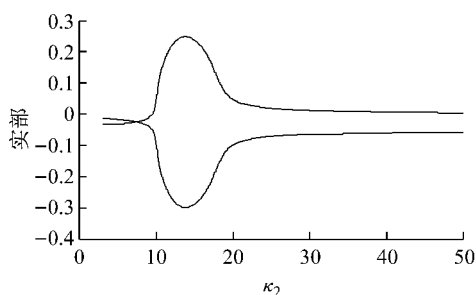
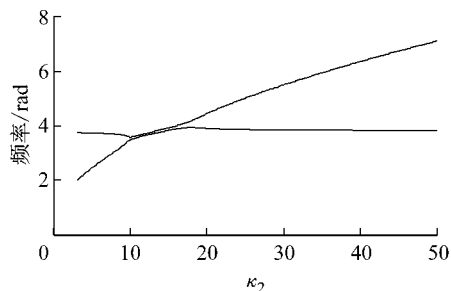
取摩擦系数参数组合 II 以及系统参数组合 I (仅改变系统参数 κ_2), $v_0=3.0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 进行说明.

由式(11)可知, $\frac{d\mathbf{X}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{P}(\mathbf{X}, \kappa_2)$, 记

$$\mathbf{A}(\kappa_2) = D\mathbf{P}(\mathbf{0}, \kappa_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial u} & \frac{\partial p_1}{\partial w} & \frac{\partial p_1}{\partial v} & \frac{\partial p_1}{\partial z} \\ \frac{\partial p_2}{\partial u} & \frac{\partial p_2}{\partial w} & \frac{\partial p_2}{\partial v} & \frac{\partial p_2}{\partial z} \\ \frac{\partial p_3}{\partial u} & \frac{\partial p_3}{\partial w} & \frac{\partial p_3}{\partial v} & \frac{\partial p_3}{\partial z} \\ \frac{\partial p_4}{\partial u} & \frac{\partial p_4}{\partial w} & \frac{\partial p_4}{\partial v} & \frac{\partial p_4}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\kappa_{11} & \beta \kappa_2 v^* & -(\kappa_{12} - f^* \kappa_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\kappa_{12} & 0 & -\kappa_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

求出矩阵 $\mathbf{A}(\kappa_2)$ 的特征值 λ , 计算得到实部和频率随 κ_2 变化的曲线, 如图 12 所示. 由图 12a 可知, 当 $\kappa_2 = \kappa_0 \approx 9.488$ 时, 只有 1 对特征值的实部为零, 而其余特征值的实部都小于零, 且 $\frac{d}{d\kappa_2}(\text{Re}(\lambda(\kappa_2)))|_{\kappa_2=\kappa_0} \neq 0$. 显然, $\mathbf{P}(\mathbf{X}, \kappa_2)$ 在 $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}$ 包含 $(\mathbf{0}, \kappa_0)$ 的一个邻域内解析, $\mathbf{P}(\mathbf{0}, \kappa_2) = 0$. 因此, $\kappa_2 = \kappa_0$ 是系统的 Hopf 分岔点.

运用中心流形定理^[37], 先将式(11)简化为 $\frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{K}(\mathbf{X})$ 的形式, 作线性变换 $\mathbf{Y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{X}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ 为

a 实部随 κ_2 变化的曲线b 频率随 κ_2 变化的曲线图 12 实部和频率随 κ_2 变化的曲线Fig.12 The locus of real part and frequency with respect to κ_2

A 的若当标准型), 其中

$$K(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ (f(w) - f^* - \beta w)\kappa_2 v^* + (f(w) - f^*)\kappa_2 v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Y(\tau) = (u_1(\tau) \quad w_1(\tau) \quad v_1(\tau) \quad z_1(\tau))^T, v_c = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{bmatrix},$$

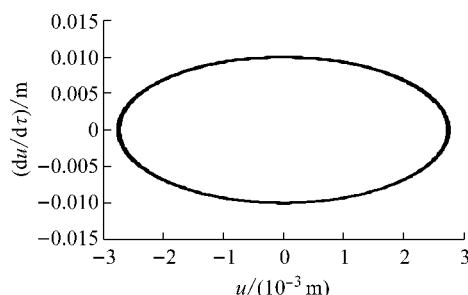
$$v_s = \begin{bmatrix} v_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \text{ 在 } (0, \kappa_0) \text{ 处可得到}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_c = J_c(\kappa_2) v_c + G(v_c, v_s, \kappa_2) \\ \dot{v}_s = J_s(\kappa_2) v_s + H(v_c, v_s, \kappa_2) \\ \dot{\kappa}_2 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

式中: $\text{Re}[\lambda_{J_c(\kappa_2)}] = 0$; $\text{Re}[\lambda_{J_s(\kappa_2)}] < 0$, $G(v_c, v_s, \kappa_2)$ 及 $H(v_c, v_s, \kappa_2)$ 为非线性项, 存在一中心流形 $v_s = h(v_c, \kappa_2)$, 其中 $\|v_c\|$, $\|\kappa_2 - \kappa_0\|$ 足够小, 可使系统降维. 在 $(0, \kappa_2)$ 附近系统简化为

$$\begin{cases} \dot{v}_c = J_c(\kappa_2) v_c + G(v_c, h(v_c, \kappa_2), \kappa_2) \\ \dot{\kappa}_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

从而可确定系统在 $\kappa_2 = \kappa_0$ 附近系统的轨线情况. 通过仿真可知, $\kappa_2 < \kappa_0$ ($\|\kappa_2 - \kappa_0\|$ 充分小) 时, 原点为稳定焦点, 并在原点邻域内有不稳定的闭轨. 图 13 所示为 $\kappa_2 = \kappa_0 - \delta$ ($\delta = 0.05$) 时的 x 方向相图中出现的极限环图像; 而当 $\kappa_2 > \kappa_0$ 时, 原点为不稳定的焦点.

图 13 $\kappa_2 = \kappa_0 - \delta$ 时质点 x 方向相图中的极限环Fig.13 Limit cycle of the phase diagram of the mass in x direction when $\kappa_2 = \kappa_0 - \delta$

同样地, 若改变系统参数 $\kappa_1, \alpha_1, \alpha_2$ 等, 也可能产生类似 Hopf 分岔现象, 可由式(13)和式(14)确定.

5 结语

针对一类由集总参数柔体-刚体摩擦副构成的摩擦振动系统, 建立单质量二自由度非线性摩擦振动动力学模型, 采用数学公式推导和数值计算的手段得到以下结论:

(1) 由摩擦系数-速度负斜率产生的阻尼矩阵加剧了系统的不稳定; 摩擦系数-速度正斜率也能产生模态耦合, 而且有时比摩擦系数-速度无斜率时更容易产生模态耦合; 摩擦系数-速度斜率的正负与大小并没有改变模态耦合的范围, 而且对频率的影响不大.

(2) 可根据摩擦系数及其斜率把系统分为 4 个区域, 分别为正斜率无模态耦合稳定区、正斜率模态耦合不稳定区、负斜率无模态耦合不稳定区、负斜率模态耦合不稳定区.

(3) 当系统处于负斜率无模态耦合不稳定区时, 能否产生黏滑现象一定程度上取决于带速. 带速较小时, 能产生间断性的多次黏滑运动现象, 且最终进入了稳定的极限环运动; 但带速较大时, 较难产生黏滑现象. 当系统处于正斜率无模态耦合稳定区时, 由于系统很快稳定下来, 所以即使带速很小也难以产生黏滑运动现象. 当系统处于正斜率模态耦合不稳定区与负斜率模态耦合不稳定区时, 系统产生黏滑运动时会伴随有质点与带的脱离.

(4) 仅在摩擦系数-速度正斜率时, 当系统参数有微小改变时, 在某些特定值附近可能产生 Hopf 分岔现象.

参考文献:

- [1] Akay A. Acoustics of friction[J]. Journal of Acoustical Society of America, 2002, 111 (4): 1525.

- [2] Kinkaid N M, O'Reilly O M, Papadopoulos P. Review of automotive disc brake squeal [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 267 (1): 105.
- [3] 周仲荣,雷源忠,张嗣伟. 摩擦学发展前沿[M]. 北京:科学出版社,2006.
ZHOU Zhongrong, LEI Yuanzhong, ZHANG Siwei. *Frontier of tribology*[M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [4] 国家自然科学基金委员会工程与材料科学部. 机械工程学科发展战略报告(2011—2020)[M]. 北京:科学出版社,2010.
Engineering and Materials Science Division of NSFC. *Strategy report of mechanical engineering discipline development (2011—2020)*[M]. Beijing: Science Press, 2010.
- [5] Hoffmann N, Gaul L. Friction induced vibrations of brakes: research fields and activities[C]//SAE Paper. [S. l.]: SAE, 2008;2008-01-2579.
- [6] Hoffmann N, Fischer M, Allgaier R, *et al.* A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations [J]. *Mechanics Research Communications*, 2002, 29(4): 197.
- [7] North M R. Disc brake squeal, braking of road vehicles, automobile division of the institution of mechanical engineers [M]. London: Mechanical Engineering Publications Limited, 1976.
- [8] Nishiwaki M. Review of study on brake squeal[J]. *Japan Society Automobile Engineering Review*,1990,11(4):48.
- [9] Crolla D A, Lang A M. Brake noise and vibration—the state of the art[J]. *Tribology Series*, 1991,18:165.
- [10] Ibrahim R A. Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos—Part I: Mechanics of contact and friction[J]. *Applied Mechanics Review*, 1994,47(7): 209.
- [11] Ibrahim R A. Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos—Part II: Dynamics and modeling [J]. *Applied Mechanics Review*, 1994, 47(7): 227.
- [12] Yang S, Gibson R F. Brake vibration and noise: Reviews, comments and proposals[J]. *International Journal of Materials and Product Technology*, 1997, 12(4/6): 496.
- [13] Papinniemi A, Lai J C S, Zhao J, *et al.* Brake squeal: A literature review[J]. *Applied Acoustics*, 2002, 63: 391.
- [14] Ioannidis P, Brooksand P C, Barton D C, *et al.* Brake system noise and vibration—A review[C]// *Proceedings of Braking 2002. From the driver to the road*. Leeds:[s. n.], 2002;53-73.
- [15] Chen F, Quaglia R L, Tan C A. On automotive disc brake squeal part I: Mechanisms and causes[C]//SAE Paper. [S. l.]:SAE,2003; 2003-01-0683.
- [16] Omar Dessouki, George Drake, Brent Lowe, *et al.* Disc brake squeal: diagnosis and prevention[C]//SAE Paper. [S. l.]: SAE,2003;2003-01-1618.
- [17] OUYANG Huajiang, Nack Wayne, YUAN Yongbin, *et al.* On automotive disc brake squeal part II: Simulation and analysis [C]// SAE Paper. [S. l.]:SAE,2003; 2003-01-0684.
- [18] Chen F, Abdelhamid M K, Blaschke P, *et al.* On automotive disc brake squeal part III: test and evaluation[C]//SAE Paper [S. l.]:SAE,2003; 2003-01-1622.
- [19] Chen F, Tong H, Chen S E, *et al.* On automotive disc brake squeal part IV: reduction and prevention[C]//SAE Paper. [S. l.]:SAE, 2003;2003-01-3345.
- [20] OUYANG Huajiang, Wayne Nack, YUAN Yongbin, *et al.* Numerical analysis of automotive disc brake squeal: A review [J]. *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 2005,1(3-4):207.
- [21] Sergienko V P, Bukharov S N, Kupreev A V. Noise and vibration in brake systems of vehicles. Part 1: Experimental procedures[J]. *Journal of Friction and Wear*, 2008, 29(3): 234.
- [22] Sergienko V P, Bukharov S N. Vibration and noise in brake systems of vehicles. Part 2: Theoretical investigation techniques[J]. *Journal of Friction and Wear*, 2009, 30(3): 216.
- [23] Cantoni C, Cesarini R, Mastinu G, *et al.* Brake comfort—A review[J]. *Vehicle System Dynamics*, 2009, 47(8): 901.
- [24] 张立军,刁坤,孟德建,等. 摩擦引起的振动和噪声的研究现状与展望[J]. *同济大学学报:自然科学版*,2013, 41(5):765.
ZHANG Lijun, DIAO Kun, MENG Dejian, *et al.* Literature survey and research prospect of friction induced vibration and noise[J], *Journal of Tongji University:Natural Science*, 2013, 41(5):765.
- [25] Hoffmann N, Gaul L. Effects of damping on mode - coupling instability in friction induced oscillations[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, 83(8): 524.
- [26] Sinou J J, Jézéquel L. Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2007, 26(1): 106.
- [27] Chen G X, Zhou Z R. Correlation of a negative friction-velocity slope with squeal generation under reciprocating sliding conditions[J]. *Wear*, 2003, 255(1): 376.
- [28] Meziane A, D'Errico S, Baillet L, *et al.* Instabilities generated by friction in a pad-disc system during the braking process[J]. *Tribology International*, 2007, 40(7): 1127.
- [29] Kang J, Krousgrill C M, Sadeghi F. Oscillation pattern of stick-slip vibrations[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2009, 44(7): 820.
- [30] Ibrahim R A. Friction induced vibration, chatter, squeal, and chaos, Part2: Dynamics and modeling[J]. *Applied Mechanics Review*, 1994, 47:227.
- [31] Crolla D A, Lang A M. Brakes noise and vibrations—The state of the art [C]//*The Proceedings of the Leeds—Lyon Symposium on Tribology*. [S. l.]: The University of Leeds, 1990:165-174.
- [32] Bhushan B. Stick-slip induced noise generation in water-lubricated compliant rubber bearings[J]. *ASME Journal of Lubrication Technology*,1980(102):201.
- [33] Bergman F, Mikael E, Eriksson M, *et al.* Influence of disc topography on generation of brake squeal[J]. *Wear*,1999(225-229):621.
- [34] Eriksson M, Bergman F, Jacobson S. Surface characteristic of brake pads after running under silent and squealing conditions [J]. *Wear*, 1999(232):163.
- [35] D'Souza A F. Design of control systems[J]. *Zee Control System Magazine*,1982,32(3):364.
- [36] Thompson J M T, Stewart H B. *Nonlinear dynamics and chaos* [M]. Chichester: John Wiley & Sons,2002.
- [37] Carr J. *Application of center manifold* [M]. New York: Springer, 1981.