

局部加卸载下散粒体中接触力的残留特性及细观机理

付龙龙¹, 宫全美¹, 王长丹^{1,2}, 周顺华¹

(1. 同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 201804;
2. 麦克马斯特大学 土木工程学院, 安大略省 哈密尔顿 L8S 4L7, 加拿大)

摘要: 基于光弹试验分析了正五棱柱颗粒体系在一个分级加卸载周期下力链和颗粒位移的演化过程。结果表明, 强力链上的接触力和颗粒位移在卸载释放时均存在“残留”现象, 卸载阶段颗粒位移正响应区域大于加载阶段。定义量纲一化的位移恢复率 η_d ($-1 < \eta_d < 1$) 描述颗粒运动轨迹, 并给出颗粒运动的五种类型所对应的 η_d 取值; 随着深度的增大, η_d 逐渐增大。力链和颗粒位移的演化特性表明, 存在一个临界荷载值, 当附加荷载高于临界值时, 散粒体内残留接触力处于稳定平衡状态; 当卸载至临界值时, 残留接触力达到极限平衡状态, 进一步卸载残留接触力将快速释放, 并引起颗粒位置重分布。

关键词: 散粒体; 局部加卸载; 残留接触力; 颗粒位移; 光弹试验

中图分类号: U411.92

文献标志码: A

Residual Characteristics and Meso-Mechanism of Contact Force in Granular Materials Under Partial Loading and Unloading

FU Longlong¹, GONG Quanmei¹, WANG Changdan^{1,2}, ZHOU Shunhua¹

(1. Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. Department of Civil Engineering, McMaster University, Hamilton L8S 4L7, Canada)

Abstract: A photoelastic experiment was conducted to analyze the evolution characteristics of force-chain network and granule displacement in pentagons under a complete loading and unloading cycle. The results demonstrate that both contact force within the strong force chain and granule displacement show a visible “hysteresis” phenomenon during unloading; the area where granule displacement response is positive during unloading is larger than the area during loading. The displacement recovery ratio η_d ($-1 < \eta_d < 1$) was

defined to describe the movement locus of granules. Then the relationship between η_d and five types of movement locus were built. η_d increases along the depth. Evolution characteristics of both force-chain and granule displacement show a critical level of superload. The residual contact force in granular material is at the state of stable equilibrium when superload is higher than the critical level while reaches the limit equilibrium state when unloading to the critical level. Further unloading will result in instant release of residual contact force as well as the redistribution of granules.

Key words: granular material; partial loading and unloading; residual contact force; granule displacement; photoelastic experiment

土体的局部卸载行为广泛存在于土木工程领域, 如隧道、基坑开挖卸载^[1-2], 路基超载预压后卸载^[3]及动力荷载的循环加卸作用等。现有研究成果表明, 卸载导致的土体物理力学特性变化对工程建设^[2-4]和结构服役^[5-6]的安全性、经济性和耐久性产生不可忽视的影响, 甚至危及周边环境。

为研究土体的局部加卸载特性, 一部分学者采用应力释放和残余应力描述开挖对土中应力的影响^[1,6-8], 如周顺华等^[7]通过离心试验模拟实际开挖效应, 建立了易于观测的位移释放与应力释放的关系, 之后, 庄丽^[1]又基于 PFC (particle flow code) 数值模拟给出了不同开挖方式下开挖面周边土体的应力释放特征及释放率表达式。考虑到局部卸载(加卸载)最终表现为应力状态的空间分布和变化, 另一部分学者从单元体试验出发, 通过先将试样固结至目标状态而后卸载, 以获取卸载应力-应变关系^[1]、卸荷模量^[4]、卸荷强度^[9]、伸长卸载强度^[10]等变化特征。

收稿日期: 2015-04-21

基金项目: 国家自然科学基金(41472247)

第一作者: 付龙龙(1989—), 男, 博士生, 主要研究方向为铁道工程, 岩土工程。E-mail: 10_eddie@tongji.edu.cn

通讯作者: 宫全美(1967—), 女, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为岩土工程, 铁道工程。E-mail: gongqm@tongji.edu.cn

上述研究均侧重于加卸载作用下土体的宏观响应特性,然而由于土体本质上是岩石天然风化后形成的松散物集合体,其固相具有一定离散性和结构性,因而加卸载引起的细观结构变化才是宏观力学行为的根本原因^[11].仅考虑固相结构变化时,土体可视为散粒体,因此有学者借助离散元数值模拟分析了加卸载作用下散粒体的细观特性^[1,12-14],如 Sazzad 等^[13-14]通过密集椭圆颗粒的循环加卸载数值试验得出加卸载后颗粒接触法矢方向分布发生不可逆演变是宏观力学行为变化的内在原因.此外,也有学者基于可视化光弹试验分析了中心加载条件下颗粒体系的力链特性^[15],但并未考虑卸载.

总体而言,局部加卸载作用下土体或散粒体内力残留的细观物理过程和机理至今尚不明确.鉴于此,本文以土体的局部加卸载问题为背景,通过光弹试验分析了正五棱柱颗粒在加卸载作用下的接触力残留特性及细观机理.特别地,随着我国高铁大规模进入运营期,高平顺性要求与维养难度大、成本高等现实矛盾使得路基长期沉降控制问题日益突出,给现有理论和方法带来极大挑战,开展散粒体加卸载特性的细观机理研究为该问题的解决提供了一种新思路.

1 散粒体加卸载的光弹试验

光弹试验在加拿大 McMaster 大学岩土实验室 DDX-400 型光弹仪上进行,设备参数详见文献^[16].

1.1 试验设计

试验模型及其尺寸参数如图 1 所示,模型中上部正五棱柱颗粒(相关参数见表 1)即为此次研究的颗粒体.五棱柱颗粒与箱底之间错缝排列的长方体

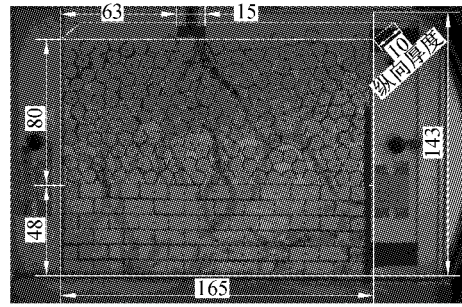


图 1 光弹试验模型(单位:mm)

Fig.1 Photoelastic experiment model (unit: mm)

表 1 光弹颗粒参数

Tab.1 Parameters of photoelastic granule	
五棱柱参数	取值
截面边长 l/mm	5
棱柱高度 h/mm	9
材料密度 $\rho/(\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$	1.25
材料模量 E/MPa	4
泊松比 ν	0.5
条纹值 $f/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	0.15

注: f 为单位厚度光弹材料产生一级等色条纹所需的应力差.

则起到了刚度过渡作用(下文数据分析均不涉及该部分),长方体与五棱柱材料相同.由于颗粒随机排列,使得表层起伏明显,而经验表明加载时若接触面不平整,表层承载颗粒易发生瞬时大转动而引起整个体系响应的瞬变,进而丧失规律的普遍性.因此为确保试验结果的有效性,加载面选在模型中心偏左约 12 mm 较为平坦的位置.

1.2 加卸载方案

试验中施加竖向荷载,加卸载方案如表 2 所示.加载共 11 级,第 1 级源自加载杆自重,2~11 级采用砝码(50 g)分级加载;卸载则先卸除砝码,再移除加载杆.加载设备及加卸载过程详见文献^[16].

表 2 加卸载方案

Tab.2 Experiment schemes of loading and unloading

荷载状态	0 级	1 级	...	k 级	...	11 级	...	卸至 k 级	...	卸至 1 级	卸至 0 级
标示	L0	L1	...	Lk	...	L11	...	ULk	...	UL1	UL0
附加荷载/N	0	0.6	...	$0.6+(k-1) \times 0.5$...	5.6	...	$5.6-(11-k) \times 0.5$...	0.6	0

2 加卸载作用下的力链演化特征

颗粒体系加卸载过程中接触力链的变化如图 2 所示.由图 2a 可见,随着外荷载的增大颗粒间接触力逐步扩散、增大,而卸载过程中(图 2b)接触力链形态基本不变,仅量值有所减小(对比 L11 和 UL1 也可看出其力链形态基本相同,只是 L11 条件下力链

上颗粒的色线数较 UL1 多),直至完全卸载时体系才基本回到初始状态,故仅列出 UL1 和 UL0.

对比 UL1 和 L1 两种状态下的接触力链发现,虽然外荷载相同,但 UL1 状态下的接触力范围和强度均大于 L1,表明加载引起的附加接触力在卸载后并未恢复到相同外荷载水平的加载状态.对比 UL0 和 L0 则可以看出,完全卸载后的接触力较初始状态没有明显增大.

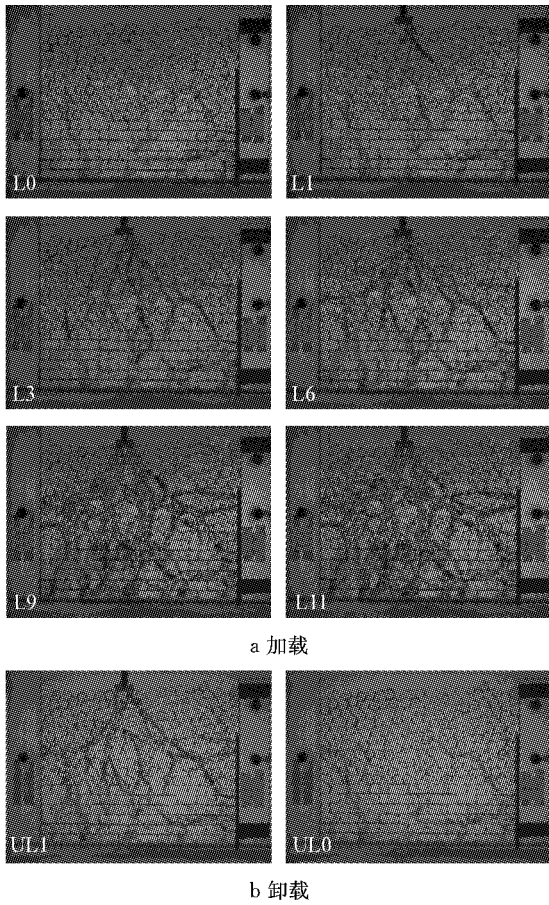


图 2 加卸载过程中特征荷载下的接触力链
Fig.2 Excerpted force chain during loading and unloading

为描述 ULk 与 Lk 两状态下颗粒间接触力的差异,定义 k 级外荷载对应的残留接触力如下式所示:

$$\Delta F_{ij}^{ul}(k) = F_{ij}^{ul}(k) - F_{ij}^l(k) \quad (1)$$

式中: F_{ij} 表示颗粒 i, j 间的接触力,由于正五棱柱为凸形颗粒,故任意两颗粒间只有一处接触(点-点或点-面或面-面接触);上标 l 表示处于加载阶段, u 表示处于卸载阶段。

理论上,光弹试验通过色线密度反映接触力大小,较为规则的光弹颗粒在简单加载条件下的应力可通过色线密度加以量化^[17],而对于五棱柱等多面体受多点非对称接触力作用的复杂情况,尚难以通过色线分布加以定量描述.文献[18]采用平均平方梯度法描述了局部加载条件下圆盘和棱柱颗粒体系的应力水平,但该方法并不适用于分析图 2 所示力链范围不断变化的情况.事实上,图 2 所示强力链上接触力的强度变化可定性示意如图 3,表明加载压缩形成的接触力链在卸载恢复时受到“阻挠”,从而表现出接触力残留现象。

由于强力链位于颗粒材料内部,因此其所受“阻挠”作用来自临近颗粒.考虑到临近颗粒的阻挠作用

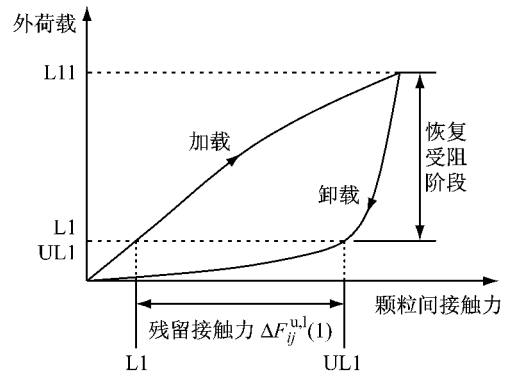


图 3 加卸载过程中强力链上接触力的变化规律
Fig.3 Evolution of contact force within strong force chain during loading and unloading

会反映到颗粒位移上,尤其是始终处于稳定接触状态的强力链上的颗粒,其位移在一定程度上反映了接触力大小,因此下文通过分析颗粒位移演化对上述现象加以解释;研究中不考虑颗粒转动。

3 颗粒坐标获取方法及误差

3.1 颗粒编号及坐标系建立

建立如图 4 所示坐标系(为简化数据,将基准点向左平移 10 mm),并对颗粒按行编号.行号按英文字母顺序递增,对于无序颗粒体系,“行”的划分基本满足式(2),以限定行的唯一性,最终得 A~L 共 12 行;各行采用“字母”+“数字”的方式编号.由于颗粒坐标只有测量值,从而误差产生。

$$\max |y_{i,m} - y_{i,n}| < \min_{i \neq j} |y_{i,m} - y_{j,k}| \quad (2)$$

式中: i, j 为行号; m, n, k 为列号。

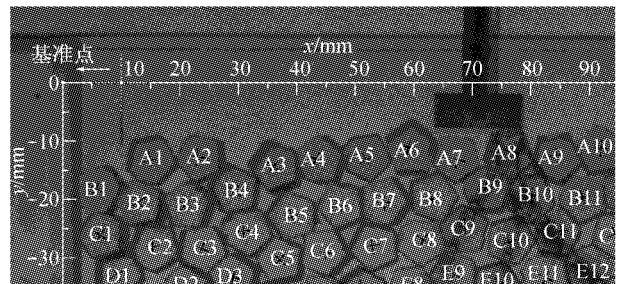


图 4 坐标设置及颗粒编号示意
Fig.4 Coordinate system and granule number

3.2 颗粒坐标采集方法

颗粒坐标通过“预设十字、矢量放大、拟合取交”三步获取:①试验前,在颗粒截面中部预设“十字”标记;②将分辨率为 300 像素的结果图片导入 CAD 矢量放大 60 倍;③用矩形包络颗粒中心“十字”,两矩形短边中点连线的交点即为颗粒坐标.颗粒坐标获

取过程详见图 5.

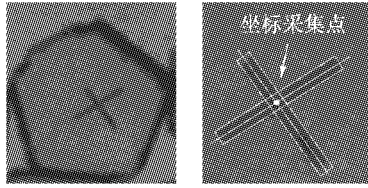


图 5 颗粒坐标采集点的确定
Fig.5 Coordinate positioning of granule

3.3 颗粒位移的传递误差

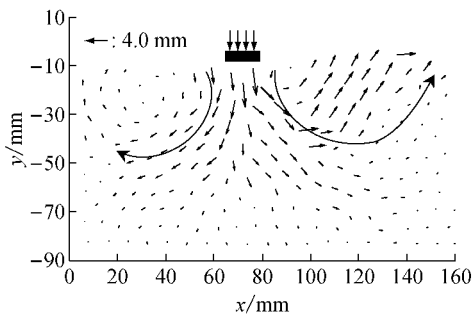
由 5 人分别按照 3.2 节所示方法采集颗粒坐标. 坐标真值的最佳估计采用各成员采集结果的算术平均值. 计算各成员的采集误差后发现, 各成员的采集误差均呈正态分布, 而且误差区间 $[-0.03, 0.03]$ mm 的置信度高于 98%, 故下文以 ± 0.03 mm 为颗粒坐标采集误差.

获取颗粒坐标旨在计算颗粒位移, 对于任意两荷载状态 i, j , 颗粒位移如式(3)所示.

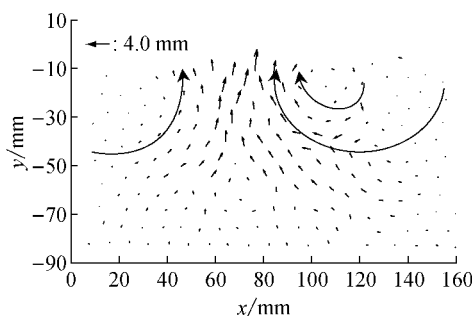
$$\Delta t_{ij} = \Delta t_j - \Delta t_i = (t_j - t_0) - (t_i - t_0) = t_j - t_i \quad (3)$$

式中: t 为颗粒坐标 x 或 y .

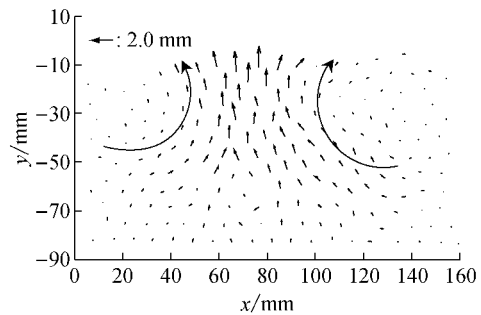
颗粒坐标 t_i 的采集误差会在计算中传递, 根据



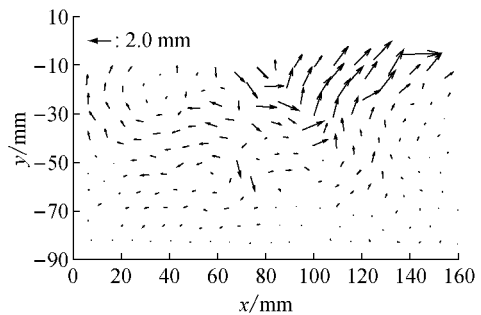
a 加载至 L11 时的颗粒位移(L11-L0)



c 卸载至 UL0 时颗粒位移的恢复(UL0-L11)



b 卸载至 UL1 时颗粒位移的恢复(UL1-L11)



d 完全卸载后的残留位移(UL0-L0)

图 6 加卸载状态下颗粒位移矢量图

Fig.6 Granule displacement vector at loading and unloading

由图 6 可知, 加卸载作用下颗粒的运动方向各异, 为便于量化分析, 按图 4 所示坐标系将位移分解为竖向和水平向, 且由于颗粒所受外荷载和重力均

式(3)和误差传递原理^[19]可得颗粒位移 Δt_{ij} 的测量误差为 ± 0.06 mm. 颗粒位移小于 0.06 mm 则取为 0.

4 加卸载作用下的颗粒位移特性

4.1 颗粒体系的位移响应及分区

由于加载(卸载)过程中颗粒体系的位移发展规律基本一致, 仅量值有所区别, 故为凸显位移规律同时兼顾图 2 所示力链发展特点, 仅给出 L11, UL1 和 UL0 三种状态下颗粒体系的位移矢量分布, 见图 6, 图中 L_i-L_j 表示 i, j 两种状态下颗粒位移的差值(下同). 图 6a 中加载区域两侧的涡旋位移场表明, 加载作用下颗粒的运动具有流动性; 图 6b~6c 中的涡旋位移场表明, 卸载阶段颗粒位移流动表现出一定可逆性; 但由图 6d 可知, 加载引起的颗粒位移在完全卸载后并不会恢复到初始状态, 而是存在较大残留位移. 特别地, 对比图 6b 中 UL1 和 UL0 时的位移恢复量发现, 其特点与图 3 所示力链发展规律一致, 即最后一级卸载引起的恢复量非常显著.

在竖向, 因此下文着重分析竖向位移演化特性.

定义颗粒位移响应状态 S_{ij} 如式(4)所示.

$$S_{ij} = (F_j - F_i)(t_j - t_i) \quad (4)$$

式中： F 为荷载大小， F 与 t 的正方向规定一致； i, j 为同一过程(加载/卸载)下的不同荷载状态。

加载和卸载过程中 S_{ij} 均同号的部分表明颗粒体系具有一定的弹性。 $S_{ij} > 0$ 表示位移变化与荷载变化同向，称为正响应； $S_{ij} = 0$ 表示无响应； $S_{ij} < 0$ 表示负响应；正响应区的边界称为位移扩散界线。

图 7 所示为 L11, UL1 和 UL0 三种荷载状态下颗粒竖向位移正响应区及位移扩散界线。理论上，单个颗粒的运动方式取决于所受外力之和，换言之颗粒运动在一定程度(还受重力影响)上反映了附加荷载的扩散情况，因此称加载引起的位移正响应区为“加载承载区”，如图 7a 所示；对应卸载则为“卸载承载区”，为图 7b~7c 中两条位移扩散线(实线)之间的区域。回顾图 2 所示接触力链分布发现，接触力链均位于加载承载区内。图 7 所示位移响应表明，卸载承载区较加载承载区有所增大，此处称增大区域为

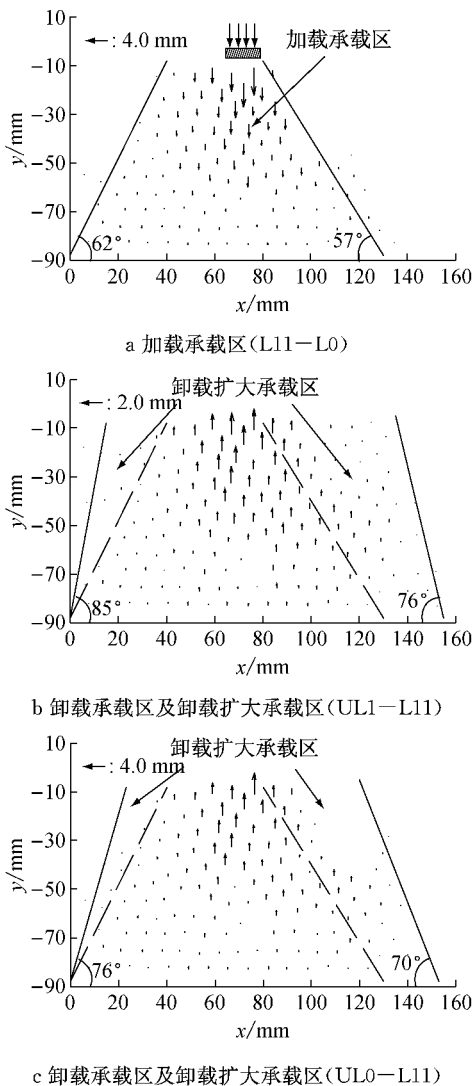


图 7 竖向位移正响应区域

Fig. 7 Positive response area of vertical displacement

“卸载扩大承载区”，如图 7b~7c 所示；从 UL1 卸载至 UL0 时卸载承载区和位移扩散角均有所减小。

图 7 还表明，卸载扩大承载区内的颗粒在整个加卸载过程中始终向上运动：加载阶段该部分颗粒由于加载承载区受压侧向膨胀而被挤向上部；但在卸载阶段该部分颗粒并未向下恢复，而因承担“卸载”继续上行。结合图 2~3 所示接触力残留现象与颗粒运动特点可得，卸载扩大承载区颗粒通过接触摩擦和咬合作用阻挠了强力链上接触力的释放，从而形成残留接触力；然而“阻挠”作用的机制和特征有待于进一步研究。卸载扩大承载区的存在从细观尺度暗合了文献[20]中所述“残余应力产生的根源是加卸载前后边界约束发生了变化”的结论。

需要注意的是，图 7 中左右两侧卸载扩大区不对称，虽然边界的影响不可忽视，但根本原因在于颗粒排列的随机性，这种随机性带来的不对称性也可见于图 2a 中左右两侧的力链形态。

4.2 颗粒运动历程的描述和分类

上述接触力链和颗粒位移所表现出的整体特征是各颗粒运动的综合结果，理论上可以通过单个颗粒的运动特征加以表述。细观上就单个颗粒而言，加卸载过程中的位置变化历程可简化示意图为图 8。为量化描述整个加卸载过程中颗粒的运动特点，定义如式(5)所示量纲一化的位移恢复率 η_d 。

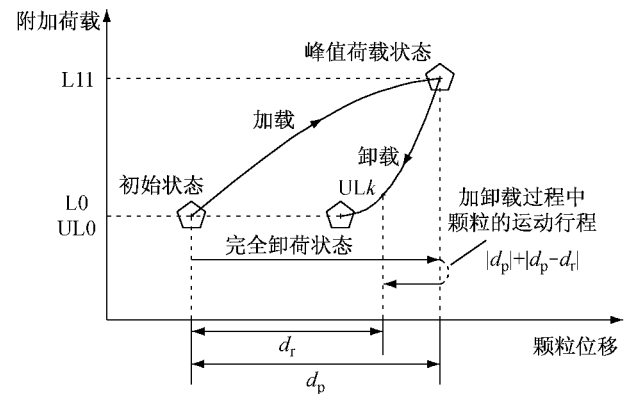


图 8 加卸载过程中颗粒位置的变化历程

Fig. 8 Movement locus of each granule during loading and unloading

$$\eta_d = \frac{d_p}{|d_p|} \frac{d_p - d_r}{|d_p| + |d_p - d_r|} \quad (5)$$

式中： d_p 为峰值荷载下的颗粒位移； d_r 为卸载状态下的颗粒位移；均相对于 L0 状态； $\eta_d \in (-1, 0, 1, 0)$ 。

根据颗粒运动的实际过程，颗粒位置的变化历程可归纳为图 9 所示五种情况。

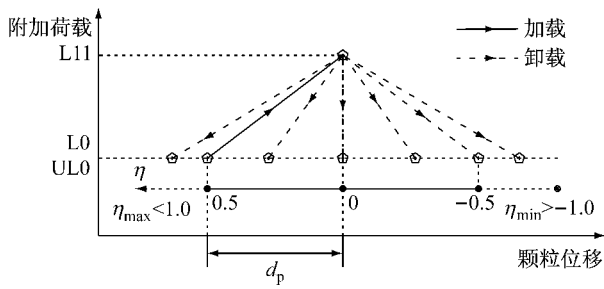


图 9 不同 η_d 取值表示的颗粒运动过程

Fig.9 Granule movement corresponding to different η_d values

结合式(5)可知,图 9 所示五种颗粒位置变化历程与 η_d 取值的对应关系如下:

- (1)持续残留型: $-1.0 < \eta_d < 0$, 整个加卸载过程中位移单向持续增大。
- (2)完全残留型: $\eta_d = 0$, 加载时位移单向增大, 卸载时位移不变。
- (3)恢复残留型: $0 < \eta_d < 0.5$, 加载时位移单向增大, 卸载时位移反向恢复, 但并未恢复到加载前的初始状态, 有残留位移。
- (4)完全恢复型: $\eta_d = 0.5$, 加载时位移单向增大, 卸载时位移反向恢复至加载前初始状态。
- (5)过度恢复型: $0.5 < \eta_d < 1.0$, 加载时位移单向增大, 卸载时位移反向恢复至加载前初始状态后继续反向增大。

4.3 卸载的位移恢复特性

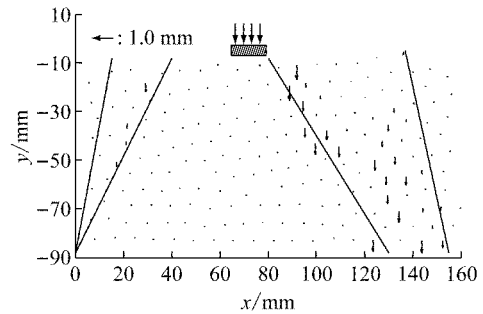
按式(5)计算整个颗粒体系的 η_d 发现,图 7 所示卸载扩大区均满足 $-1.0 < \eta_d < 0$, 如图 10 所示。

需要指出的是,式(5)所示 η_d 虽然能直观表示出本次试验中的卸载扩大承载区,但不同模型及荷载条件下 η_d 的表达式可能有所变化;此处 η_d 只是作为一个能够描述加卸载位移变化特点的参数给出。

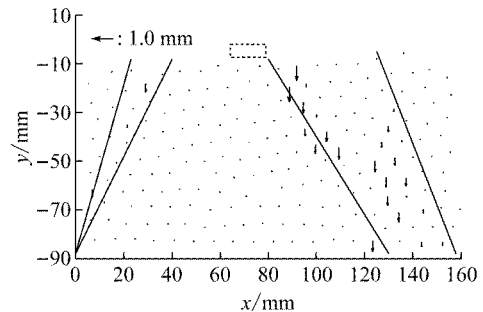
为进一步描述颗粒位移恢复与附加荷载的关系,图 11 给出不同卸载状态 UL k 条件下位移恢复率沿深度的变化规律,图中横坐标“行均深度”为各行颗粒深度的平均值。

由图 11 可以看出,在各级卸载状态下,位移恢复率均随着深度的增大而增大,这是因为随着深度的增大,初始自重荷载 σ_0 逐渐增大,附加荷载 σ_s 则逐步衰减,若采用附加荷载比 $\gamma = \sigma_s / \sigma_0$ 表示外荷载对体系的扰动,则深度越大扰动越小,越容易恢复。对比不同卸载状态下位移恢复率的特点发现,随着荷载的不断卸除,位移恢复率逐渐增大,但从 UL9 卸除到 UL1 的过程中,位移恢复率的级间增量较小,而从 UL1 卸除到 UL0 时(最后一级卸载),位移

恢复率增量明显增大。由此可见,卸载过程中位移恢复表现出的规律与第 2 节所述接触力链恢复规律相一致,区别在于,就量值而言,卸载至 UL0 时接触力基本恢复如初,而颗粒位移仍残留显著。



a 卸载至 UL1 时竖向位移恢复率为负的部分



b 卸载至 UL0 时竖向位移恢复率为负的部分

图 10 卸载扩大承载区的 η_d

Fig.10 η_d in load-bearing area extended during unloading

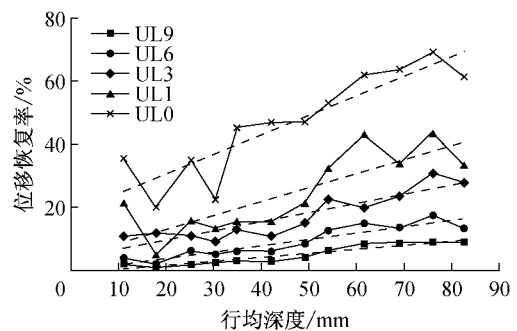


图 11 不同荷载下的行均位移恢复率

Fig.11 Average η_d of each row at different load levels

综合上述接触力链与颗粒位移的变化特征可知,卸载阶段附加荷载存在一个临界值,当外荷载卸至该临界值时,体系达到极限平衡状态,进一步卸载残留接触力将快速释放,并引起颗粒重分布。

5 结论与建议

- (1) 弹性颗粒组成的体系在局部加卸载作用下细观接触力和颗粒位移均表现出不完全可逆的特

性,卸载过程中存在残留接触力和残留位移.通过定义位移响应和位移扩散界线得出,卸载承载区大于加载承载区,两者差值为卸载扩大承载区.卸载扩大承载区颗粒通过接触摩擦和咬合作用阻挠了强力链上接触力的释放,从而形成残留接触力,然而“阻挠”作用的机制和特征有待于进一步研究.

(2) 定义了量纲一化的位移恢复率 η_d ,以此描述加卸载过程中颗粒的运动方式,并给出五种颗粒运动历程所对应 η_d 的取值;随着深度的增大,附加荷载比减小,位移恢复率逐渐增大.

(3) 存在一个临界荷载值,当附加荷载高于临界值时,散粒体内残留接触力处于稳定平衡状态;当卸载至临界值时,残留接触力达到极限平衡,进一步卸载,残留接触力将快速释放,并引起颗粒位置重分布.文中所述试验条件下,荷载等级 $k=1$ 为临界荷载.

(4) 颗粒材料光弹试验在结果分析时存在接触力难以定量分析,颗粒位移获取工作量大等问题,后续将结合 DEM(discrete element method)数值模拟分析颗粒接触法向矢量的方向分布规律及其与宏观力学特性的相关关系.

参考文献:

- [1] 庄丽. 散粒体的加卸载与应力释放特性[D]. 上海: 同济大学, 2009.
ZHUANG Li. Loading and unloading behavior and stress release of granular [D]. Shanghai: Tongji University, 2009.
- [2] 霍军帅. 双向开挖应力释放条件下坑中坑基坑围护墙间土压力计算方法[D]. 上海: 同济大学, 2012.
HUO Junshuai. The calculation method of earth pressure on enclosures of pit-in-pit excavation based on two directional unloadings [D]. Shanghai: Tongji University, 2012.
- [3] 周顺华, 许恺, 王炳龙, 等. 软土地基超载卸载再加荷的沉降研究[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(10): 1226.
ZHOU Shunhua, XU Kai, WANG Binglong, *et al.* Research on settlement of soft ground under overloading-unloading and reloading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(10): 1226.
- [4] 刘国彬, 侯学渊. 软土的卸荷模量[J]. 岩土工程学报, 1996, 18(6): 18.
LIU Guobin, HOU Xueyuan. Unloading modulus of the Shanghai soft clay [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 18(6): 18.
- [5] SHEN Shuilong, WU Huaina, CUI Yujun *et al.* Long-term settlement behaviour of metro tunnels in the soft deposits of Shanghai[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2014, 40: 309.
- [6] WANG Juan. Shakedown analysis and design of flexible road pavements under moving surface loads [D]. Nottingham: University of Nottingham, 2011.
- [7] 周顺华, 高渠清, 崔之鉴. 开挖应力释放率计算模型[J]. 上海力学, 1997, 18(1): 91.
ZHOU Shunhua, GAO Quqing, CUI Zhijian. The algorithmic model of the release ratio of excavation stress [J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1997, 18(1): 91.
- [8] 张传庆, 冯夏庭, 周辉, 等. 应力释放法在隧洞开挖模拟中若干问题的研究[J]. 岩土力学, 2008, 29(5): 1174.
ZHANG Chuanqing, FENG Xiating, ZHOU Hui, *et al.* Study of some problems about application of stress release method to tunnel excavation simulation [J]. Chinese Journal of Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(5): 1174.
- [9] 潘林有, 程玉梅, 胡中雄. 卸荷状态下黏性土强度特性试验研究[J]. 岩土力学, 2001, 22(4): 490.
PAN Linyou, CHENG Yumei, HU Zhongxiang. Experimental study on the shear strength of clay under the unloading state [J]. Chinese Journal of Rock and Soil Mechanics, 2001, 22(4): 490.
- [10] 庄丽, 周顺华. 散粒体卸载特性的三轴伸长试验研究[J]. 固体力学学报, 2009, 30(4): 354.
ZHUANG Li, ZHOU Shunhua. Triaxial extension test study on the unloading behavior of granular [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2009, 30(4): 354.
- [11] Karl Terzaghi. Theoretical soil mechanics [M]. New York, London: John Wiley & Sons, 1943.
- [12] 贾剑, 周顺华, 宫全美. 砂性土成拱应力释放特性的模型试验及数值模拟研究[J]. 岩土力学, 2013, 34(2): 395.
JIA Jian, ZHOU Shunhua, GONG Quanmei. Stress release characteristics of sandy soil arching by laboratory tests and numerical simulation [J]. Chinese Journal of Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(2): 395.
- [13] Sazzad Mahmud Md, Suzuki Kiichi. Micromechanical behavior of granular materials with inherent anisotropy under cyclic loading using 2D DEM [J]. Granular Matter, 2010(12): 597.
- [14] Sazzad Mahmud Md. Micro-scale behavior of granular materials during cyclic loading [J]. Particuology, 2014(16): 132.
- [15] Maya Muthuswamy, Antoinette Tordesillas. How do interparticle contact friction, packing density and degree of polydispersity affect force propagation in particulate assemblies? [J]. Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 2006(9): 1.
- [16] 王长丹. 散粒体材料摩擦结构附加应力传递特性与计算方法[D]. 上海: 同济大学, 2011.
WANG Changdan. The calculation method and transfer characteristics of additional stress in friction structure granular materials [D]. Shanghai: Tongji University, 2011.
- [17] GENG Junfei, Reydellet G, Clément E, *et al.* Green's function measurements of force transmission in 2D granular materials [J]. Physica D, 2003, 182: 274.
- [18] GENG Junfei, Howell D, Longhi E, *et al.* Footprints in sand: the response of a granular material to local perturbations [J]. Physical Review Letters, 2001, 87(3): 1.
- [19] 丁振良. 误差理论与数据处理[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2002.
DING Zhenliang. Theory of errors and data processing [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2002.
- [20] 李铀, Matthew Mauldon. 岩土工程中的二个理论问题的探讨[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(2): 227.
LI You, Matthew Mauldon. Research on two theoretical problems of geotechnical engineering [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, 18(2): 227.