

结构可靠度计算的自适应辅助域方法

陶伟峰

(同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 提出了一种 Metropolis 算法与支持向量机(SVM)方法相结合的自适应辅助域方法. 利用 Metropolis 算法生成目标失效域内的条件样本点, 并以该过程中的备选点作为初始训练点训练 SVM 模型. 根据训练得到的 SVM 模型再自适应地选择一部分样本点加入训练点集, 并对 SVM 模型进行更新, 直至满足迭代终止条件. 以最终得到的 SVM 模型作为辅助失效域, 计算近似失效概率和两个条件失效概率. 对近似失效概率进行修正, 使最终得到的目标失效概率渐进无偏且更加稳定. 算例表明该算法具有较好的计算精度、效率和鲁棒性.

关键词: 结构可靠度; 自适应; Metropolis 算法; 支持向量机; 辅助失效域

中图分类号: O213.2

文献标志码: A

An Adaptive Auxiliary Domain Method for Computing Structural Reliability

TAO Weifeng

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: An adaptive auxiliary domain method that combines the Metropolis algorithm and the support vector machine (SVM) method is proposed in this paper. First, conditional sample points were generated in the target failure domain by using the Metropolis algorithm and then an SVM model with the candidate points produced in this process was trained. Secondly, according to the SVM model obtained, a number of extra sample points were adaptively added into the training set and the SVM model was updated until the stopping criterion was reached. Then, the final SVM model was taken as an auxiliary failure domain and the corresponding approximate failure probability and two conditional failure probabilities were calculated respectively. Finally, the approximate failure probability was corrected with the two conditional failure probabilities to make the final target failure probability asymptotically unbiased and more stable. The examples given

in this paper demonstrate the satisfactory accuracy, efficiency and robustness of the proposed method.

Key words: structural reliability; adaptive; Metropolis algorithm; support vector machine; auxiliary failure domain

在实际工程的可靠度分析中, 结构响应往往需要通过数值方法(如有限单元法)计算获得, 因而相对应的极限状态函数没有显式表达式. 在此背景下, 代理模型法通常是解决问题的一种途径. 这一途径的基本思想是利用较少样本点获得目标极限状态函数的近似显式函数, 通过对该近似函数的分析获得结构可靠度. 代理模型法主要分为 3 类: 参数化方法、半参数化方法以及非参数化方法. 参数化方法中最具代表性的是响应面法(RSM)^[1]. 其思想是用多项式函数近似目标极限状态函数, 且一般以二次多项式为主. RSM 的计算精度主要取决于抽样点的选取以及多项式交叉项的取舍. 虽然从提出至今 RSM 取得了许多研究进展, 但对于多变量、强非线性问题, 仍然无法取得很好的逼近效果. 半参数化方法中最具代表性的是 Kriging 插值法, 1951 年由南非地质学家 Krige 提出并用于矿产评估^[2]. 该方法在响应面回归模型基础上加了一个非参数化的高斯随机过程, 具有较大的灵活性和较强的全局逼近能力. 然而, 该方法对于噪声数据很敏感, 且对于高维问题效率较低. 非参数化方法中的典型代表是人工神经网络(ANN)方法和支持向量机(SVM)方法. ANN 方法是模拟大脑神经系统工作的一种人工智能算法, 对于复杂非线性函数具有较强的逼近能力, 迄今已有不少研究者将其用于结构可靠度分析^[3-4]. 但是, ANN 方法的学习效果受网络拓扑结构选择的影响比较大, 同时, 由于 ANN 方法采用的是经验风险最小化准则, 因此会出现过学习或陷入局部最优现象.

收稿日期: 2015-04-27

基金项目: 国家自然科学基金(51261120374)

第一作者: 陶伟峰(1987—), 男, 博士生, 主要研究方向为结构随机动力学及结构可靠度. E-mail: 1040020008@tongji.edu.cn

与 ANN 方法不同,基于统计学习理论的 SVM 方法^[5]采用了结构风险最小化准则,能避免出现过学习现象,并获得全局最优解,在解决小样本、非线性及高维问题中表现出诸多优势. 2002 年, Rocco 等^[6]最早用 SVM 方法研究了网络系统的可靠度. Hurtado 等^[7]将结构可靠度问题考虑成模式识别问题,基于随机有限元模型用 SVM 方法求解可靠度. Li 等^[8]提出了将 SVM 方法与一次可靠度方法 (FORM) 或直接蒙特卡洛 (DMC) 方法相结合的结构可靠度分析方法. 2011 年, Bourinet 等^[9]将 SVM 方法与子集模拟方法相结合,提出了²SMART 算法. 为了能够在结构失效域的重要区域获得极限状态函数比较好的拟合效果, Proppe^[10]提出用 Metropolis 算法生成目标失效域内的条件样本点,然后采用移动最小二乘法进行拟合. 用 Metropolis 算法生成的马尔科夫链能自动搜索目标失效域内的重要区域,因此相比采用普通选点策略得到的结果精度更高. 受 Proppe 的工作启发,袁修开等^[11]提出了一种基于马尔科夫链模拟的 SVM 可靠度计算方法. 与 Proppe 采用马尔科夫链的样本点作为训练点不同,该文建议用马尔科夫链备选点作为训练点,原因是前者会出现训练点重叠,而后者不仅避免了训练点的重叠,还充分利用了模拟过程中的有用信息,同时保证有部分训练点落入安全域内,使 SVM 分类方法得以适用.

本文主要在 Proppe 和袁修开等人工作基础上进一步展开. 首先,引用单分量自适应 Metropolis (SCAM) 算法,其效率和适用范围优于文献^[11]中所用算法;其次,提出了一种自适应选点策略,即根据每一步训练得到的 SVM 模型,额外选择一部分样本点加入训练点集,从而大大加快了 SVM 的训练速度;最后,针对维数较高问题 SVM 模型效果不理想的情况,提出了用辅助域方法对失效概率计算结果进行修正,使得最终计算结果渐进无偏且更加稳定.

1 训练样本点选取

1.1 两类不同的选点策略

对于代理模型法而言,无论是参数化方法、半参数化方法还是非参数化方法,其计算精度都受训练点选择的影响. 为了能在结构失效域的重要区域获得满意的近似表达式,传统的选点方法往往采用中心复合抽样与迭代插值相结合的思路,试图将训练样本点主要集中在验算点附近区域. 虽然对于许多

问题这种选点策略能在较少计算量前提下取得比较好的计算效果,但是,当问题维数较高、验算点附近非线性程度较强甚至验算点搜索不收敛时,这种选点策略就无法取得满意的计算结果. 马尔科夫链模拟则提供了一种新的思路,利用 Metropolis 算法或其改进算法生成的样本点,能自动搜索目标失效域内的重要区域,并最终渐进服从目标失效域内的条件分布. 该方法不仅避开了验算点搜索过程中梯度计算困难和不收敛的问题,同时对于高维问题和极限状态曲面的非线性程度都有较强的适应能力.

1.2 Metropolis 算法及单分量自适应 Metropolis 算法

马尔科夫链蒙特卡洛 (MCMC) 方法用于生成满足某个特定目标分布的样本点,其主要思想是构造一条各态历经的马尔科夫链,使得其平稳分布渐进于目标分布. Metropolis 算法是最基本的 MCMC 方法^[12],其基本思路如下:选择一个对称的提议函数 $q(\cdot | \mathbf{x})$ 作为抽样函数,以当前步的样本点 \mathbf{x}_{i-1} 为抽样中心,抽样得到一个样本点 \mathbf{z} 作为下一步的备选点. 假设目标分布为 $\pi(\mathbf{x})$,则下一步样本点 \mathbf{x}_i 以接受概率 $\alpha(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{z})$ 取为 \mathbf{z} .

$$\alpha(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{z}) = \min\left(1, \frac{\pi(\mathbf{z})}{\pi(\mathbf{x}_{i-1})}\right) \quad (1)$$

均匀分布函数和正态分布函数是两种比较常用的提议函数类型,其中以正态分布函数的应用更为广泛,本文选用正态分布函数作为提议函数.

选定提议函数后,其协方差矩阵的取值对算法效率有很大影响. 如果协方差取值过大,虽然备选点会以较高的概率出现在离当前步样本点较远的位置,但其接受概率很小,导致最终马尔科夫链以很大的概率停留在当前步样本点处;反之,如果协方差取值过小,则马尔科夫链每一步的搜索范围会很小,虽然备选点的接受概率比较大,但整体上仍导致算法收敛速度较慢. 此外,大量模拟计算表明,随着问题维数的增加,传统 Metropolis 算法的效果会越来越差,主要表现在备选点的接受概率逐步降低,特别对于高维问题,接受概率接近于零,导致马尔科夫链一直停留在初始点处. 为了有效解决上述两个问题,本文采用了 Haario 等^[13]提出的单分量自适应 Metropolis (SCAM) 算法. 这一算法被视为自适应 Metropolis 算法与单分量 Metropolis 算法的一种有机结合,分别用于解决传统 Metropolis 算法的协方差取值问题和高维问题. 算法的基本思想是用一维正态分布函数对备选点的分量逐一进行抽样,并根据当前步及前面各步样本点分量所对应的方差,分

别对各正态分布函数的方差进行实时更新. 假设 $\pi(\mathbf{x})$ 为 d 维空间中的目标分布函数, 当前步及前面各步的样本点分别为 $(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{t-1})$, 则可按照如下步骤确定下一步样本点各分量 $x_i^t (i=1, \dots, d)$ 的取值:

(1) 利用一维正态分布函数 $N(x_{t-1}^i, \sqrt{v_t^i})$ 抽样获得备选点的对应分量 z^i .

(2) 计算 z^i 的接受概率.

$$\alpha_i^t = \min\left(1, \frac{\pi(x_t^1, \dots, x_t^{i-1}, z^i, x_t^{i+1}, \dots, x_t^d)}{\pi(x_t^1, \dots, x_t^{i-1}, x_{t-1}^i, x_t^{i+1}, \dots, x_t^d)}\right) \quad (2)$$

并以该概率值取 $x_i^t = z^i$, 以剩余概率值取 $x_i^t = x_{t-1}^i$.

方差 v_t^i 自适应取值如下:

$$v_t^i = \begin{cases} v_0^i & t \leq t_0 \\ s \text{Var}(x_0^i, \dots, x_{t-1}^i) + s\varepsilon & t > t_0 \end{cases} \quad (3)$$

式中: t_0 为初始长度; v_0^i 为初始方差, 其值对算法效果影响并不大; s 为比例因子, 可取为 2.4^[14]; ε 可取为任意一个足够小的正常数, 其主要作用是避免 v_t^i 为零.

需要强调的是, SCAM 算法所获得的结果本质上已不再具有马尔科夫性, 但其各态历经性仍然能得到保证. 文献[13]中已经证明, 采用 SCAM 算法获得的结果仍然渐进服从目标分布. 此外, 值得一提的是, Au 等在文献[15]中也采用了单分量 Metropolis 算法, 虽然其接受概率计算公式形式上与本文的不同, 但不难证明在标准正态空间中两者等价. 不同之处在于, 该文献采用了均匀分布函数作为提议函数, 并且没有采用自适应方法选取参数, 在其算例中仅根据经验进行取值.

1.3 训练点选取

前面阐述了利用 SCAM 算法获得满足任意目标分布的样本点的基本步骤, 将其用于结构可靠度问题中时, 目标分布函数为结构失效域内的条件分布函数 $f(\mathbf{x}|F) = I_F(\mathbf{x})f(\mathbf{x})/P_f$, 其中, $I_F(\mathbf{x})$ 为结构失效域 F 内的示性函数, 当 $\mathbf{x} \in F$ 时, $I_F(\mathbf{x}) = 1$, 否则 $I_F(\mathbf{x}) = 0$; $f(\mathbf{x})$ 为基本随机变量的联合概率密度函数; P_f 为失效概率, 虽然它的值未知, 但并不影响最终结果, 因为在计算接受概率时并不需要知道目标分布的确切函数值, 而只需要知道它们的比值.

利用 SCAM 算法, 满足结构失效域内条件分布的样本点可按下述步骤生成:

(1) 根据工程经验进行试算, 获得结构失效域内的初始样本点 \mathbf{x}_0 .

(2) 在已知当前步及前面各步的样本点

$(\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{t-1})$ 后, 按式计算出各维所对应的方差 v_t^i , 然后用一维正态分布函数 $N(x_{t-1}^i, \sqrt{v_t^i})$ 逐维抽取备选点 \mathbf{z} 的各个分量 z^i , 并根据相应的接受概率 α_i^t 对其进行取舍, 得到一个新的样本点 ξ .

(3) 判断新样本点 ξ 是否落在结构失效域内, 如果是, 则取 $\mathbf{x}_t = \xi$; 反之则取 $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_{t-1}$.

为了充分利用模拟过程中的有用信息, 同时保证有部分训练点落入安全域内以便应用 SVM 分类方法, 本文采用了文献[11]的思路, 用模拟过程中的备选点而非样本点作为训练点. 需要指出的是, 经过大量计算, 本文作者发现仅用模拟过程中的备选点进行 SVM 训练仍然无法获得很好的学习效果, 具体原因和改进策略将在后面详细介绍.

2 自适应辅助域算法

2.1 支持向量机

统计学习理论是一门研究有限样本情况下机器学习规律的学科, 由 Vapnik^[5] 在 20 世纪 60 年代开始研究并在 90 年代中期逐渐成熟. 在神经网络等其他机器学习方法的研究遇到网络结构确定问题、过学习与欠学习问题、局部最优问题等困难时, 统计学习理论在各领域中的应用越来越受到重视. 支持向量机(SVM)就是建立在统计学习理论的 Vapnik-Chervonenkis(VC)维理论和结构风险最小化准则基础上的一种机器学习方法. 它具有很强的非线性分类能力, 尤其适用于小样本学习问题. 由于在要求经验风险最小的同时还要求置信区间最小, 因此这一方法能有效克服过学习和欠学习问题, 提高了泛化能力. 对于线性可分问题, 通过引入拉格朗日乘子后可以转化为凸二次优化问题, 从而避免了局部极值问题. 对于线性不可分问题, 则可通过非线性变换将训练点映射至更高维特征空间, 使问题在更高维特征空间成为线性可分. 需要指出的是, 对于线性不可分问题, 最终并不需要知道非线性映射函数的具体表达形式, 而只需要知道其内积即可. 根据核函数理论, 该内积对应着一个特定的核函数, 如多项式核函数、高斯核函数、Sigmoid 核函数等, 视具体问题类型而定. 正是由于这一点, 使得 SVM 在处理非线性分类问题时变得非常简单, 并能够克服“维数诅咒”. 以上这些特点, 使 SVM 特别适用于结构可靠度问题的求解. 限于篇幅, SVM 理论的具体细节不在此处给出, 可以参考文献[5]. 本文源程序中调用了台湾大学林智仁教授等开发的开源程序包 LIBSVM. 计算

中,如无特别说明,核函数采用径向基函数(RBF).同时,最优参数 c 和 g 采用 3 重交叉验证方法确定.

2.2 自适应选点策略

选取 SCAM 算法模拟过程中的备选点作为训练点,可以确保大部分训练点落入结构失效域的重要区域内,同时还有部分训练点落入极限状态曲面附近的安全域内.在此基础上,用 SVM 进行学习,有望获得目标失效边界的一个很好的显式近似表达式.利用这个显式近似表达式,并结合 DMC 方法,可以获得结构失效概率的近似值.但是,经过大量计算,本文作者发现这种策略很多时候并不能给出满意的计算结果.特别值得指出的是,对于许多问题,当训练点数目比较少时,甚至会出现失效概率的近似值比真实值大 1~2 个数量级的情况.造成这种情况的原因可以通过图 1 来解释.图 1 所示是一个二维问题所对应的标准正态空间,利用 SCAM 算法得到一系列训练点,其中落入失效域内的训练点主要集中在失效域的重要区域.不难想象,在训练点分布集中的区域,近似失效边界与真实失效边界能吻合得较好,但在缺乏样本点的其他区域则既有可能吻合得较好(如近似失效边界 1)、也有可能差别较大(如近似失效边界 2),这取决于 SVM 核函数类型的选取.当采用 DMC 方法计算近似失效概率时,近似失效边界 1 能给出比较满意的计算结果,但近似失效边界 2 所对应的结果却将远远大于目标失效概率.为了解决这一难题,本文提出了一种自适应选点策略,如图 2 所示,即在每次获得一个新的 SVM 模型后,再在原来缺乏样本点的近似失效域内生成部分样本点,加入训练点集.可以推测,经过这种自适应选点策略更新后的 SVM 模型,对真实失效边界的逼近效果能得到明显改进.换句话说,采用本文提出

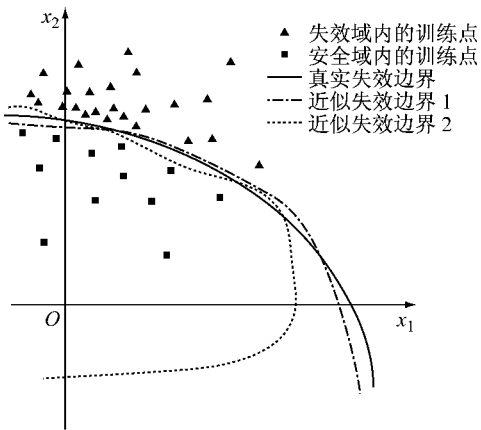


图 1 非自适应策略得到的 SVM 模型
Fig.1 SVM models obtained by using non-adaptive strategy

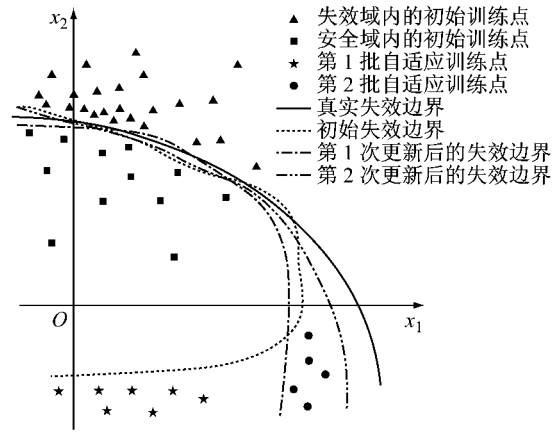


图 2 自适应策略得到的 SVM 模型
Fig.2 SVM models obtained by using adaptive strategy

的自适应策略,即使事先选用的 SVM 核函数并不十分适用于所要处理的问题,但经过几步模型自适应更新后,最后所得计算结果仍然比较理想.

2.3 辅助域方法

采用自适应选点策略能避免出现近似失效概率远大于目标失效概率的情况,且 SCAM 算法的样本点能自动搜索目标失效域的重要区域,当有足够多备选点作为训练点时,亦不会出现近似失效概率远小于目标失效概率的情况.换句话说,综合 SCAM 算法和自适应策略选取训练点,有可能给出比较满意的结果.然而计算表明,对于低维问题,该算法用少量训练点就能给出比较满意的结果,但随着问题维数的增加,这一算法的精度和效率仍然会逐渐降低.究其原因,主要在于 SVM 的学习效率会随着维数的增加而降低.为此,本文采用 Katafygiotis 等^[16]提出的辅助域方法对上述算法进行进一步改进.

辅助域方法的基本思想见图 3.假设已知目标极限状态函数的一个近似模型,其对应的失效域称为辅助失效域 Ω_A ,并与目标失效域 Ω_T 有一个交叉域 Ω_I .根据概率论基本公式,目标失效概率的计算可以分解成如下形式:

$$P_f = P_r(\Omega_T) = \frac{P_r(\Omega_A)P_r(\Omega_T|\Omega_A)}{P_r(\Omega_A|\Omega_T)} \quad (4)$$

其中,近似失效概率 $P_r(\Omega_A)$ 的计算可以采用 DMC 方法.由于 SVM 模型解析表达式已知,因此这部分计算量可以忽略不计.

条件概率 $P_r(\Omega_T|\Omega_A)$ 和 $P_r(\Omega_A|\Omega_T)$ 的大小取决于辅助失效域与目标失效域之间的重叠程度,或者说其值大小能够用来衡量辅助失效域与目标失效域的重叠程度.当辅助失效域与目标失效域重叠程度较高时,两个条件概率值都会比较大(如大于 0.5),从而用少量条件样本点就可以获得比较稳定

的计算结果. 式中 $P_r(\Omega_T|\Omega_A)/P_r(\Omega_A|\Omega_T)$ 起到修正系数的作用, 确保了 P_f 的渐进无偏性.

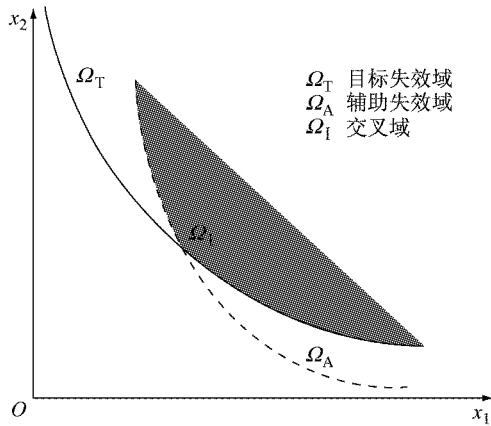


图 3 辅助域方法示意图

Fig. 3 Diagram of auxiliary domain method

2.4 算法描述

将自适应选点策略与辅助域方法相结合, 就得到自适应辅助域方法. 两者结合的契机在于近似 SVM 模型训练过程中已生成了目标失效域内分布趋于平稳的条件样本点, 可以直接用来计算条件概率 $P_r(\Omega_A|\Omega_T)$, 而条件概率 $P_r(\Omega_T|\Omega_A)$ 的计算非常简单, 只需直接生成辅助失效域内的条件样本点, 然后用 DMC 进行计算. 需要指出的是, 由于最终训练得到的 SVM 模型不可避免地存在分类错误率, 因此条件概率 $P_r(\Omega_A|\Omega_T)$ 一般都小于 1, 而这正是有必要用其对近似失效概率 $P_r(\Omega_A)$ 进行修正的原因.

算法的具体步骤如下:

(1) 取 $k=0$, 用 SCAM 算法生成 N_1 个目标失效域内的条件样本点, 并选取对应的备选点作为初始训练点. 训练初始 SVM 模型, 并用 DMC 方法计算近似失效概率 $P_{r_0}(\Omega_A)$.

(2) 取 $k=k+1$, 在辅助失效域内选取 q 个条件样本点, 将这些样本点加入训练点集. 更新 SVM 模型, 用 DMC 方法计算对应的近似失效概率 $P_{r_k}(\Omega_A)$.

(3) 如满足 $|P_{r_k}(\Omega_A) - P_{r_{k-1}}(\Omega_A)| / P_{r_{k-1}}(\Omega_A) \leq c$, 则将最终得到的 SVM 模型作为辅助失效域, 并转入下一步, 否则返回步骤(2).

(4) 用 DMC 方法生成 N_2 个落入辅助失效域内的条件样本点, 并计算条件失效概率 $P_r(\Omega_T|\Omega_A)$. 同时, 用步骤(1)中生成的条件样本点计算条件失效概率 $P_r(\Omega_A|\Omega_T)$.

(5) 根据式(4)计算目标失效概率 P_f .

上述步骤(3)中, c 为阈值, 作为 SVM 模型停止更新的条件, 可取为 0.05~0.10. 假设 SVM 模型的

自适应更新次数为 S , 确定初始失效点所需要的计算次数为 N_0 , 则整个计算过程中极限状态函数的总计算次数为 $N_T = N_0 + N_1 + N_2 + Sq$.

3 算例

这里给出 3 个算例, 用来验证所提算法的精度、效率和稳定性. 其中, 前 2 个为数值算例, 第 3 个为实际工程结构算例. 为了保证所编程序的通用性, 所有算例都变换到标准正态空间中进行分析.

算例 1 考虑 1 个验算点处极凹的极限状态曲面, 对应的极限状态函数为^[17]

$$g(\mathbf{x}) = 3 - X_2 + (4X_1)^4 \quad (5)$$

式中: X_1 和 X_2 均为标准正态随机变量.

图 4 所示为近似失效边界的自适应更新过程及真实失效边界. 由于验算点处曲率非常大, FORM 得到的结果必然有较大误差. 即使采用基于验算点的重要性抽样 (IS), 也仍然仅有小部分样本点落入失效域内.

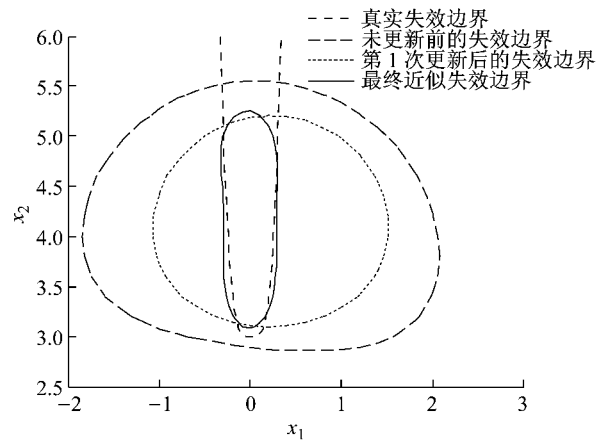


图 4 真实失效边界及近似失效边界的自适应更新

Fig. 4 Exact failure boundary and adaptive updating of approximate failure boundaries

分别采用 DMC, FORM, IS 以及本文方法进行计算, 失效概率结果见表 1. 其中, IS 和本文方法各运行 50 次, 计算失效概率的均值和变异系数(括号内). 对于本文方法, 取 $N_1 = 850$, $N_2 = 100$, $S = 5$, $q = 10$. 此外, 这里不妨用 FORM 得到的验算点作为 Markov 链的初始失效点.

以 DMC 计算结果作为参考值. 从表 1 可以看到, FORM 虽然收敛速度快, 但计算结果远远大于实际失效概率. 在相同计算量的前提下, IS 和本文方法的均值都与 DMC 结果接近, 但后者的变异系数明显小于前者, 体现了本文方法的优越性.

表 1 不同方法计算得到的失效概率

Tab.1 Failure probabilities obtained by using different methods

方法	N_T	$P_f/10^{-4}$
DMC	1×10^7	1.77
FORM	12	13.50
IS	1 012	1.78 (0.17)
本文方法	1 012	1.79 (0.10)

算例 2 考虑如下极限状态函数^[9]:

$$g(\mathbf{x}) = g(X_1, \dots, X_n) = (n + a\sigma\sqrt{n}) - \sum_{i=1}^n X_i \quad (6)$$

式中: $X_i, i=1, \dots, n$ 为独立同分布的对数正态随机变量, 均值 $\mu=1$, 标准差 $\sigma=0.2$; 参数 $a=3$; n 为随机变量数目, 本文考虑 $n=10$ 的情况。

取 1×10^6 次 DMC 方法计算得到的失效概率作为参考值, 其值为 $P_f=2.70 \times 10^{-3}$ 。取 $N_2=200, S=10, q=20$, 并分别取 N_1 等于 300, 500 和 800。每种情况下都重复计算 50 次, 计算失效概率的均值和变异系数。此外, 为了研究不同的 SVM 核函数对最终计算结果的影响, 在 $N_1=800$ 的情况下又额外选取线性核函数 (Linear) 和多项式核函数 (Polynomial) 进行计算, 结果见表 2。

表 2 失效概率对比

Tab.2 Comparison of failure probabilities

N_1	核函数	P_f 均值/ 10^{-3}	P_f 变异系数
300	RBF	2.42	0.14
500	RBF	2.54	0.12
800	RBF	2.68	0.10
800	Linear	2.67	0.10
800	Polynomial	2.68	0.10

从表 2 可以看到, 随着 N_1 的增大, 失效概率的均值越来越接近 DMC 的计算结果, 且变异系数也逐渐减小; 当 $N_1=800$ 时, 计算结果几乎已经无偏, 这表明用 SCAM 算法生成的目标失效域内的条件样本点的分布已经趋于平稳; 3 种不同核函数对应的失效概率的均值和变异系数均非常接近, 说明本文方法对核函数的选择比较鲁棒。

算例 3 桁架结构的可靠度

图 5 所示的钢桁架结构^[11]跨度为 24 m, 高为 2 m, 由 15 根杆组成。上、下弦杆的横截面面积均为 A_1 , 腹杆的横截面面积为 A_2 , 钢材的弹性模量为 E , 集中荷载 $F_i (i=1, 2, 3, 4)$ 依次作用在相应节点上。问题中共包含 9 个基本随机变量, 认为其相互独立, 对应的分布类型及参数见表 3。以桁架下弦跨中 C 点的竖向位移 V 不超过跨度的 $1/500$ (即 24 000

mm/500=48 mm) 建立以下极限状态函数:

$$g(\mathbf{X}) = 48 - V(\mathbf{X}) \quad (7)$$

该模型需要采用有限元方法进行计算, 极限状态函数没有显式表达式。

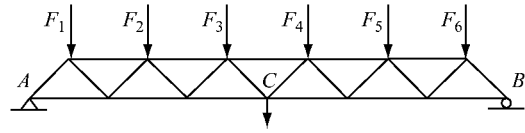


图 5 桁架结构示意图

Fig.5 Diagram of truss structure

表 3 基本随机变量分布信息

Tab.3 Distribution of basic random variables

随机变量	变量描述	分布类型	均值	变异系数
X_1	弹性模量 E	对数正态	$2.1 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$	0.10
X_2	弦杆横截面面积 A_1	对数正态	$5 \times 10^3 \text{ mm}^2$	0.10
X_3	腹杆横截面面积 A_2	对数正态	$2 \times 10^3 \text{ mm}^2$	0.10
X_4	集中荷载 F_1	极值 I 型	$5 \times 10^4 \text{ N}$	0.15
X_5	集中荷载 F_2	极值 I 型	$5 \times 10^4 \text{ N}$	0.15
X_6	集中荷载 F_3	极值 I 型	$5 \times 10^4 \text{ N}$	0.15
X_7	集中荷载 F_4	极值 I 型	$5 \times 10^4 \text{ N}$	0.15
X_8	集中荷载 F_5	极值 I 型	$5 \times 10^4 \text{ N}$	0.15
X_9	集中荷载 F_6	极值 I 型	$5 \times 10^4 \text{ N}$	0.15

本算例旨在探究采用辅助域方法对失效概率进行修正的思路能否改进计算精度。为此, 对如下 2 种情况进行分析: 情况 1 为不采用辅助域方法进行修正, 取 $N_1=900, N_2=0, S=10, q=10$; 情况 2 为采用辅助域方法进行修正, 取 $N_1=800, N_2=100, S=10, q=10$ 。可见, 2 种情况下计算量相等。每种情况分别计算 50 次, 获得失效概率的均值和变异系数, 结果见表 4。取 1×10^6 次 DMC 方法计算得到的失效概率作为参考值, 其值为 $P_f=4.66 \times 10^{-3}$ 。

表 4 2 种情况下的失效概率对比

Tab.4 Comparison of failure probabilities in two cases

分类	P_f 均值/ 10^{-3}	P_f 变异系数
情况 1	5.21	0.13
情况 2	4.74	0.10

从表 4 可知, 采用辅助域方法对失效概率进行修正, 不仅能提高均值的精度, 还能减小变异性。即在保证目标失效域内的条件样本点分布已平稳的前提下, 适当减小 N_1 , 将这部分样本点用于计算条件失效概率 $P_r(\Omega_T | \Omega_A)$, 并结合 $P_r(\Omega_A | \Omega_T)$ 对近似失效概率进行修正, 可以提高计算结果的精度。

为了说明本文方法的优越性, 下面进一步给出 FORM 和基于验算点的 IS 算法的计算结果, 如表 5

所示. IS 算法的计算量设定为与辅助域算法一致,并分别选取 4 个不同的抽样标准差 σ 进行计算. 计算结果表明: FORM 的计算效率最高,但计算结果的误差较大; IS 算法的计算效果受抽样标准差的影响很大,特别当 σ 取值过小或过大时,计算结果会出现严重偏差,且变异性非常大. 因此,若综合考虑计算结果精度和算法鲁棒性,则本文所提算法比传统的结构可靠度方法具有一定的优越性.

表 5 3 种方法计算结果对比

Tab.5 Comparison of results obtained by using three different methods

方法	计算量	P_f 均值/ 10^{-3}	P_f 变异系数
FORM	54	2.63	
IS ($\sigma=0.5$)	1 000	3.72	0.50
IS ($\sigma=1.0$)	1 000	4.87	0.06
IS ($\sigma=1.5$)	1 000	4.51	0.12
IS ($\sigma=2.0$)	1 000	4.17	0.47
本文方法	1 000	4.74	0.10

4 结论

针对实际工程问题中极限状态函数没有显式表达的情况,提出了一种用于结构可靠度计算的自适应辅助域方法. 通过数值算例和工程算例验证了该方法的精度、效率和稳定性,并得到了如下结论:

(1) 自适应辅助域方法不需要用到验算点信息,避免了复杂问题中验算点搜索不收敛以及多验算点问题,且计算精度高于基于验算点的 FORM 和 IS.

(2) SCAM 算法较传统 Metropolis 算法的效率更高,能使所生成的样本点较快地收敛于目标分布,从而保证最终计算结果趋于无偏.

(3) 在确保目标失效域内的条件样本点分布已平稳的前提下,采用辅助域方法对近似失效概率进行修正能提高计算结果的精度.

(4) 自适应策略使得最终计算结果对所选用的 SVM 核函数类型具有较强的鲁棒性.

参考文献:

[1] BUCHER C G, BOURGUND U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems [J]. *Structural Safety*, 1990, 7(1): 57.

[2] KRIGE D G. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand [J]. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 1951, 52(6): 119.

[3] HURTADO J E, ALVAREZ D A. Neural-network-based reliability analysis: a comparative study [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191(1): 113.

[4] GOMES H M, AWRUCH A M. Comparison of response surface and neural network with other methods for structural reliability analysis [J]. *Structural Safety*, 2004, 26(1): 49.

[5] VAPNIK V. *The nature of statistical learning theory* [M]. New York: Springer-Verlag, 2013.

[6] ROCCO C M, MORENO J A. Fast Monte Carlo reliability evaluation using support vector machine [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2002, 76(3): 237.

[7] HURTADO J E, ALVAREZ D A. Classification approach for reliability analysis with stochastic finite-element modeling [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2003, 129(8): 1141.

[8] LI H S, LV Z Z, YUE Z F. Support vector machine for structural reliability analysis [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(10): 1295.

[9] BOURINET J M, DEHEEGER F, LEMAIRE M. Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and support vector machines [J]. *Structural Safety*, 2011, 33(6): 343.

[10] PROPPE C. Estimation of failure probabilities by local approximation of the limit state function [J]. *Structural Safety*, 2008, 30(4): 277.

[11] 袁修开, 吕震宙, 许鑫. 基于马尔科夫链模拟的支持向量机可靠性分析方法 [J]. *工程力学*, 2011, 28(2): 36.

YUAN Xiukai, LV Zhenzhou, XU Xin. Support vector machine reliability analysis method based on Markov chain simulation [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(2): 36.

[12] METROPOLIS N, ROSENBLUTH A W, ROSENBLUTH M N, et al. Equation of state calculations by fast computing machines [J]. *The Journal of Chemical Physics*, 1953, 21(6): 1087.

[13] HAARIO H, SAKSMAN E, TAMMINEN J. Componentwise adaptation for high dimensional MCMC [J]. *Computational Statistics*, 2005, 20(2): 265.

[14] GELMAN A, ROBERTS G O, GILKS W R. Efficient Metropolis jumping rules [J]. *Bayesian Statistics*, 1996, 5(599-608): 42.

[15] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2001, 16(4): 263.

[16] KATAFYGIOTIS L, MOAN T, CHEUNG S H. Auxiliary domain method for solving multi-objective dynamic reliability problems for nonlinear structures [J]. *Structural Engineering and Mechanics*, 2007, 25(3): 347.

[17] AU S K, BECK J L. A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations [J]. *Structural Safety*, 1999, 21(2): 135.