文克勒地基板极限承载力的弹塑解

谈至明，姚尧，郭晶晶

(同济大学道路与交通工程教育部重点实验室，上海：200092)

**摘要：**将圆形均布荷载作用下的文克勒地基上板出现环状裂缝时的板划分为二个区域，环内屈服区仍采用刚塑性假设，而环外弹性区采用线弹性假设，进而推导得到了文克勒地基上板极限承载力的弹塑性解，其中，环状裂缝出现位置由板承载力最小化条件求出，从而弥补了现有刚塑性理论解中不能确定环状裂缝出现位置的缺陷，使理论解更完备且具有良好的拓展性。分析结果表明，梅依尔霍夫的地基板承载力的解偏大且在圆形均布荷载相对半径*ρa*=2.925时发散，在*ρa*=0.09~0.7范围时，梅氏解偏大6%~10%。最后，为简便使用给出了弹塑性解的板极限承载力系数*φE*回归式。

**关键词：**地基板；极限承载力；刚塑性；弹塑性；混凝土铺面；环状裂缝位置

中图分类号： TU313

Elastic-Plastic Solution to Ultimate Bearing Capacity of Plate on Winkler Foundation

Tan Zhiming, Yao yao, Guo Jingjing

(Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract：**The plate on Winkler foundation with circumferential crack was divided into two areas under circular uniformly distributed load. Rigid-plastic hypothesis was used within the circumferential crack and linear-elastic hypothesis was used without it. Then, the elastic-plastic solution to ultimate bearing capacity of plate on Winkler foundation was given. And the position of annular crack was found on the condition of minimal ultimate bearing capacity. It can make up the defects that the location of the annular cracks can’t be solved through the existing rigid-plastic theory. It’s more complete and has good expansibility. The result shows that the Meyerhof’s solution to ultimate bearing capacity of plate is larger and divergent when the relatively radius of circular uniformly distributed load is 2.925. And the Meyerhof’s solution is larger 6% ~ 10% when the relatively radius of circular uniformly distributed load is between 0.09 and 0.7. Finally, a more convenient regression formula of ultimate bearing capacity of plate coefficientis proposed.

**Key Words：**foundation plate; ultimate bearing capacity; rigid-plastic; elastic-plastic; concrete pavement; position of annular crack

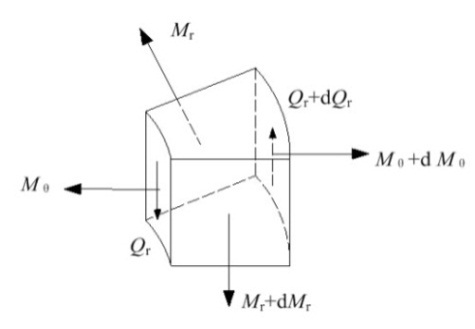
水泥混凝土地坪、堆场和路面等铺面结构的极限承载力是土木工程力学中典型问题之一，早在上世纪四十年代，对此问题开展了不少试验和理论研究，发现水泥混凝土铺面结构在圆形荷载作用下，铺面结构的工作状态可分弹性、中央区屈服、环状裂缝出现和冲剪破坏四个阶段，并将环状裂缝出现时的荷载量作为水泥混凝土铺面极限承载力[1,4]。对此的力学解析由梅依尔霍夫(G.G.Meyerhof，1962)为代表，他将水泥混凝土铺面视为文克勒地基上板，并用刚塑理论拟合板的变形，这种忽略板弹性变形的近似处理方式导致了无法在理论上获得环状裂缝的位置，对此，梅依尔霍夫通过大量试验总结给出了环状裂缝位置经验值[1]。梅氏的水泥混凝土极限承载力计算方法获得了广泛的应用，例如，英国工业混凝土地坪设计方法中被采用[2,3]。但是，从理论上来看梅氏方法是不够完善的，一旦当地基板结构或荷载圆半径超过梅氏当年的试验范围，直接应用梅氏公式的精度就难以保证了。另外，蒋大骅指出梅氏板中荷载的板极限承载力公式仅是一个上限解[4]，叶又等人应用弹塑性有限元研究了钢纤维混凝土路面板的极限承载力后指出，板环状破裂面与梅氏解不符，但未能总结其规律[5]，因此，有必要对此问题开展更深入的研究。

**基金项目：国家自然科学基金资助项目(51378394)**

**谈至明，1960.2，男，教授，工学博士，主要研究方向：路面工程，E-mail：[13901779114@126.com](mailto:13901779114@126.com)**

1. 文克勒地基板极限承载力的刚塑解

随着作用于文克勒地基板的圆形均布荷载的荷载集度持续增大，荷载圆中心点的板底弯拉应力达到材料抗弯强度，板由弹性转入屈服状况，而后，从荷载圆中心为起点的径向裂缝开始萌生、扩展、伸长，直到距离板中心某一半径*b*处的最大负弯矩所产生的弯拉应力达到板的抗弯强度，板结构到达了极限状态：环形裂缝出现。根据刚塑性理论，板的极限状态如图1所示意，其中，*w*0为荷载中点的板挠度，*a*为圆形均布荷载半径，*p*为荷载集度。



塑性铰

塑性铰

塑性铰

*a*

*b*

*q*

*w*0

**图1 板中受荷的极限状态 图2 板微分单元**

**Fig. 1 Limit states of the load in the plate Fig. 2  Differential element of plate**

在*r<b*范围的板挠度方程为：

 (1)

由静力平衡条件，圆形均布荷载合力*P*为：

 (2)

式中：*k*为文克勒地基的反应模量。

取板一微分单元(参见图2)，板平衡微分方程为：

 (3)

式中：*Mr*为径向弯矩；*Qr*为径向剪力；*Mθ*为切向弯矩，它在整个屈服区均达了屈服弯矩，即：*Mθ*= *Me*。

解式(3)得到：

 (4)

式中：*P*为圆形均布荷载的合力。

*r=b*时，剪力*Q*(*b*)=0，径向弯矩达到板限弯矩*Mr*(*b*)=-*Ms*，由此得到文克勒地基板极限承载力的刚塑性解：

 (5)

式中：*λ*e为板屈服弯矩与极限弯矩之比，即*λ*e=*Me/Ms*。

由于*Ps*~*b*之间关系是单调，*Ps*随着*b*加大而减小，因此，无法求出*Ps*极值。梅依尔霍夫根据大量试验指出，荷载圆半径*a*与环形裂缝半径*b*之比*a/b*在0.05~0.75范围时，*b*= 3.9*l*，其中，*l*为文克勒地基板的相对刚度半径：



式中：*E*、*ν*分别为板弹性模量和泊松比；*h*为板厚度。

1. 文克勒地基板极限承载力的弹塑解

在环形裂缝之外的区域(*r≥b*)，地基板始终处于弹性状态，其力学问题即为文克勒地基带孔无限大薄板的边值问题，在*r=b*边界，有径向弯矩*Mr*(*b*)=-*Ms，Qr*(*b*)=0(可从式(3)推出)，由此得到带孔无限大文克勒地基板的边值问题：

 (6)

本问题属齐次轴对称问题，板挠曲微分方程解可表示为[5]：

 (7)

式中：；ker(•)、kei(•)、ber(•)、bei(•)为虚宗量的贝塞尔函数，也称之开尔文函数。

由无穷收敛条件得到待定常数*B*3=*B*4=0，径向弯矩*Mr*和径向剪力*Qr*的表达式为：

 (8)

将*ρ=ρb=b/l*的二边界条件代入式(8)联立解得待定常数*B*1、*B*2：

 (9)

环形裂缝内侧的板挠度可表示为：

 (10)

由静力平衡条件，得到圆形荷载合力*P*与板中心点及环形裂缝处挠度*w*0、*wb*的关系为：

 (11)

由此得到，文克勒地基板的极限承载力*P*s的表达式为：

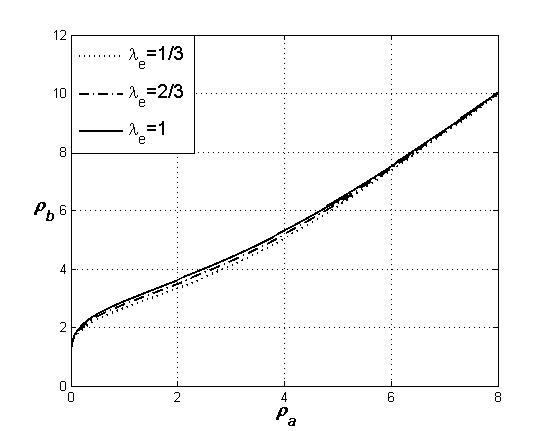
 (12)

式中：*ξb*为环裂处的挠度系数，。

对极限承载力*P*s作*b*的导数，并由条件，得到板极限承载力的极值条件为：

 (13)

式中：*ρa*=*a/l*。



*ρa*

*ρb*

**图3 板极限状态的*ρa*~*ρb***

**Fig. 3 *ρa*~*ρb* in the limit state**

上式是非常系数微分方程，需应用数值解求得，计算结果表明，材料泊松比的影响甚小，可忽略。图3给出了不同屈服弯矩与极限弯矩比*λ*e条件下的*ρa*~*ρb*关系曲线，从中可以看到，*λ*e值对出现环状裂缝的相对位置*ρb*影响也很小；*ρb*值随着圆形均布荷载相对半径*ρa*的加大而增大，在*ρa*很小时，*ρb*稍小于2，当*ρa*>4以上，*ρb*与*ρa*的关系近似线性，两者之比*ρb*/*ρa*趋近1.25。

将对应极限承载力极小值的*ρb*代入式(7)即可得到环状裂缝处的板挠度系数*ξb*，进而利用式(11)求出文克勒地基板极限承载力*Ps*。

上述求解是针对无限大板而言的，对于有限尺寸圆板中心受荷时，若圆板尺寸较小，有可能不出现环状破裂面。为此，在式(6)增设外边界为自由的边界条件：，即可分析有限尺寸圆板中心受荷的极限承载力问题。计算结果表明，否出现环状破裂面的圆板临界相对半径*ρR=R*0/*l*与均布荷载圆相对半径*ρa*有关，在*ρa*很小时，*ρR-ρc*接近2，随着*ρa*增大，*ρR-ρc*有所减小，在*ρa=*7时*，ρR-ρc*降至1附近；大于临界半径*R*0的圆板极限承载力*Ps*变化很小可忽略，即可直接套用无限大板极限承载力*Ps*的值。

1. 弹塑性解的讨论和比较

弹塑性解中，板出现环状裂缝时的地基板挠曲形状如图4示意。在刚塑解中，环状裂缝位置*b*和板挠度零点位置*c*合一，在弹性解中两者相距(*c*-*b*)为 1.32*l*~1.16*l*；其次，环状裂缝处的板挠度系数*ξb*变化幅度较小，荷载圆相对半径*ρa*从0增至8，*ξb*从0.61增至0.95*，*参见图5。

(*c,*0)

*w*0

(*b,w* b)

**图4 地基板挠曲示意图**

**Fig. 4 Schematic diagram of  foundation slab deflection**

按梅依尔霍夫所言的*a/b*在0.05~0.75范围时*b*=3.9*l*的条件下来看，*ρa*值变化在0.2~2.93范围内，而对应*b*=3.9*l*的弹塑性解的*ρa*值为2.4，即*a/b=*0.615，也就是说*ρa*值缩减至0.09~2.4之间；若将刚塑性解的环状裂缝位置*b*改为板挠度零点位置*c*，则*ρa*适用范围缩小至0.2~0.7之间。

*ξb*

*ρa*

*ρc –ρb*

**图5 *ξb* ~ *ρa*、(*ρc*-*ρb*) ~ *ρa*关系图**

**Fig. 5 *ξb* ~*ρa*、(*ρc*-*ρb*) ~*ρa* relationship diagram**

为了比较弹塑性解和刚塑性梅氏解的差异，将板极限承载力*Ps*表示为：

 (14)

式中：*φi*可称为之板极限承载力系数*，i*=*E*为弹塑性解，*i*=*M*为梅氏解。

两种不同解的板极限承载力系数*φ*见图6。从图6可以看到，梅氏解是偏大，在*ρa*很小时，*φM*偏大5%，*ρa*=0.7时*φM*偏大10%；*ρa*=0.09~0.7范围内，梅氏解平均偏大8%；*ρa*超过1.5之后，偏差迅速上升，并在*ρa*=2.925时趋向无穷。

**图6 极限承载力系数*φ*图**

**Figure 6 The change plot of bearing capacity coefficient *φ***

常见荷载的*ρa*值不大于0.7，载重卡车的轮载相对道路水泥混凝土路面而言，*ρa*约0.1~0.3；集装箱单箱角荷载相对水泥混凝土堆场铺面的*ρa*不大于0.1，多列箱箱角荷载的*ρa*在0.1~0.4之间；吊车、起重机支腿的*ρa*一般小于0.6，因此，利用梅氏解估计混凝土铺面板极限承载力约偏大5%~10%，破裂环出现位置偏差更大些，两者之差超过1倍板相对刚度半径。

考虑到开尔文函数不常用，且计算环状裂缝位置*b*和该处弹性挠度*wb*不太简便，为此对*φE*与*ρa*之间关系进行回归，在*ρa*<8且误差不足1%的回归式：

 (15)

式中：。

若*ρa*在0.09~0.7范围内，即满足梅氏关于荷载圆半径与环状裂缝半径(板挠度零点半径)比的要求，板极限承载力*Ps*可直接对梅氏解除以1.08即可，其偏差不大等2%。

4 结语

将圆形均布荷载下的文克勒地基上板出现环状裂缝时的板划分为二个区域，环状裂缝内侧的中心屈服区采用刚塑性假设，即为倒圆锥形；环外区域采用线弹性假设，即为开孔无限大文克勒地基薄板的边值问题，联立上述两个解，由板承载力最小化条件求得环状裂缝出现位置，从而得到了板极限承载力的弹塑性解。对于有限尺寸圆板，出现环状裂缝的圆板临界相对半径*ρR*约比出现环状裂缝的相对位置*ρb*大1~2；大于临界相对半径的有限尺寸圆板极限承载力变化很小有忽略。此解弥补了现有基于刚塑性理论的极限承载力解存在着不能确定环状裂缝出现位置的缺陷，使理论解更完备且具有良好的拓展性。

随后，分析了弹塑性解的特征规律，并与刚塑性解进行比较，分析比较结果表明，环状裂缝出现在地基反力锥形区内，其相对位置*ρb*的板挠度系数*ξb*在0.61~0.95范围内变化；梅依尔霍夫给出的环状裂缝位置(3.9*l*)仅是*a/b*=0.615的特例，其解偏大且在*ρa*=2.925时发散，在*ρa*=0.09~0.7范围时，梅氏解偏大6%~10%。最后，为简便使用给出了弹塑性解的板极限承载力系数*φE*回归式。

参考文献

[1] Meyerhof.G.G. Load carrying capacity of concrete pavements[J]．Proceedings of the American Society of Civil Engineers，Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division，June, 1962, 88(2): 11.

[2] Geoffrey Griffiths，Nick Thom, Concrete pavement design guidance notes[M], New York, Routledge Press, 2007

[3] The Concrete Society, Technical report 34-concrete industrial ground floors，A guide to design and construction[R]，3nd，2003．

[4] 蒋大骅．关于混凝土地面的承载能力[J]．同济大学学报，自然科学版，1980，No.1: 17．

JIANG Dahua, On the bearing capacity of concrete ground[J], Journal of Tongji University, Natural Science, 1980, No.1: 17．

[5] 叶又,刘效尧,吴长春;[钢纤维混凝土路面板极限承载力的有限元分析](http://www.cnki.com.cn/Article/CJFDTOTAL-ZGGL199702002.htm%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20%20)[J]．中国公路学报， 1997,10(2):11

YE You, LIU Xiaoyao, WU Changchun, Analysia of Load Carrying Capacity of Steel Fibre Concrete Pavement by FEM[J], 1997, 10(2):11

[6] 朱照宏，王秉纲，郭大智．路面力学计算[M]．北京：人民交通出版社，1985．

ZHU Zhaohong, WANG Binggang, GUO Dazhi. Pavement mechanics calculation[M], Beijing: China Communications Press, 1985



