

有限体积法定价跳扩散期权模型

甘小艇^{1,2}, 殷俊锋¹, 李蕊^{1,3}

(1. 同济大学 数学系, 上海 200092; 2. 楚雄师范学院 数学与统计学院, 云南 楚雄 675000;
3. 嘉兴学院 数理与信息工程学院, 浙江 嘉兴 314001)

摘要: 考虑有限体积法求解 Kou 模型下美式跳扩散期权. 基于线性有限元空间, 构造了向后欧拉和 Crank-Nicolson 两种全离散有限体积格式, 并采用简单高效的递推公式对偏微分积分方程中的积分项进行逼近. 针对美式期权离散得到的线性互补问题(LCP), 采用模超松弛迭代法(MSOR)进行求解, 并证明了 H_+ 离散矩阵下算法的收敛性. 数值实验表明, 所构造的方法是高效而稳健的.

关键词: 有限体积法; Kou 跳扩散期权模型; 线性互补问题; 模超松弛迭代法

中图分类号: O241.8

文献标志码: A

Finite Volume Methods for Pricing Jump-Diffusion Option Model

GAN Xiaoting^{1,2}, YIN Junfeng¹, LI Rui^{1,3}

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. School of Mathematics and Statistics, Chuxiong Normal University, Chuxiong Yunnan 675000, China; 3. College of Mathematics Physics and Information Engineering, Jiaxing University, Jiaxing Zhejiang 314001, China)

Abstract: Finite volume methods are developed for pricing American options under Kou jump-diffusion model. Based on a linear finite element space, both backward Euler and Crank-Nicolson full discrete finite volume schemes are constructed. For the approximation of the integral term in the partial integro-differential equation (PIDE), an easy-to-implement recursion formula is employed. Then we propose the modulus-based successive overrelaxation (MSOR) method for the resulting linear complementarity problems (LCPs). The H_+ matrix property of the system matrix which guarantees the convergence of the MSOR method is analyzed. Numerical experiments confirm the efficiency and robustness of the proposed methods.

Key words: finite volume method; Kou jump-diffusion option model; linear complementarity problem; modulus-based successive overrelaxation method

在金融经济学中, 标准的 Black-Scholes 定价方程是最成功也是使用最广泛的期权定价工具^[1]. 然而实证分析结果显示: 标准的 Black-Scholes 假设——标的资产价格服从波动率为常数的对数正态分布——与实际的市场观察并不一致. 通常将这一现象称作波动率偏态或波动率微笑, 该现象如今在许多主要金融市场中都存在. 为了解决波动率微笑的存在问题, 人们提出了 Black-Scholes 模型的各种演变形式. 常见的有: 随机波动率模型、带跳跃过程模型、非确定波动率模型、市场状态转换模型及确定性波动率模型等. 其中 Merton^[2] 和 Kou^[3] 跳扩散模型所隐含的波动率曲线与市场中观察到的波动率微笑十分接近, 吸引了众多国内外学者和专家的广泛关注和研究^[4].

近年来, 人们对跳扩散期权定价问题作了大量研究工作. Tavella 和 Randall^[5] 给出了欧式 Merton 跳扩散模型的隐式有限差分格式, 并提出了一种用于求解稠密系统的迭代格式. Andersen 等^[6] 中构造了欧式跳扩散模型的交替方向(ADI)格式, 并引入快速傅里叶变换(FFT)对积分项进行逼近, 计算量为 $O(m \log m)$, m 表示空间节点个数. 此后, d'Halluin 等^[7-8] 结合积分项的 FFT 逼近, 同时对欧式和美式 Merton 和 Kou 模型进行了研究. 针对欧式期权, 采用文献^[5]中的迭代格式进行求解, 并对该迭代格式进行了收敛性分析; 而针对美式期权, 则采用惩罚方法进行求解. 为了降低偏微分积分方程(PIDE)中积分项的计算量, Toivanen 等^[9-10] 构造

收稿日期: 2015-11-09

基金项目: 国家自然科学基金(11271289), 中央高校基本科研业务费专项资金, 云南省应用基础研究计划青年项目(2013FD045), 云南省教育厅科学研究基金项目(2015Y443).

第一作者: 甘小艇(1983—), 男, 博士生, 主要研究方向为金融计算. E-mail: 9xtgan@tongji.edu.cn

通讯作者: 殷俊锋(1979—), 男, 理学博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为金融计算. E-mail: yinjf@tongji.edu.cn

了简洁高效的线性插值逼近,并从理论上证明了该插值逼近的二阶收敛精度且离散矩阵为 M 矩阵. 特别地,根据 Kou 模型中对数双指数分布函数的特点, Toivanen 在文献[9]中针对积分项给出了具有最优计算量的递推公式, 仅需 $O(m)$. 另外,为克服 Black-Scholes 偏微分方程固有的对流占优特性而引起的计算困难, Zhang 等^[11-12] 讨论了欧式和美式 Merton 以及欧式 Kou 跳扩散模型的拟合有限体积方法(Fitted finite volume method). 该方法主要是将经典有限体积方法结合特定的逼近技术对偏微分方程(PDE)进行离散. 美式期权定价的经典有限体积方法及其最新研究进展可参阅文献 [13-14].

定价美式期权另一重要任务是对离散得到的线性互补问题进行求解. 目前常见的求解方法主要有: 投影超松弛迭代法(PSOR)^[15]; 算子分裂方法^[16]和惩罚函数方法^[17]. 近年来,另一类重要的迭代方法——模方法,得到了人们的广泛研究. 其数学思想在于将线性互补问题(LCP)转化成一系列线性方程组的求解. 通过将 LCP 转化成隐式不动点方程, Murty^[18] 最早提出了模迭代方法. 此后, Hadjidimos^[19]和 Dong^[20]通过引入参数,分别提出了非定常外推方法^[19]和改进模方法^[20],加速了模方法的收敛速度. 通过将 LCP 转化成一类新的不动点方程, Bai 提出了一类基于模分裂的迭代算法(modulus-based matrix splitting methods)^[21]. 此方法利用适当的矩阵分裂可以得到一系列新的迭代方法,如: 模超松弛方法(MSOR)等. 关于模方法的最新研究进展,可以参阅文献 [22-23].

本文研究 Kou 模型下跳扩散期权的有限体积法求解. 基于线性有限元空间,首先构造了向后欧拉和 Crank-Nicolson 两种稳定的全离散格式. 其次,采用文献[9]中的线性插值技术对 PIDE (partial integro-differential equation)中的积分项进行逼近. 针对离散得到的线性互补问题,采用 MSOR 方法进行求解,并进一步建立 H_+ 离散矩阵矩阵下算法的收敛性. 数值实验表明,文中方法是有效且稳健的.

1 跳扩散期权模型

假设标的资产价格 x 满足如下随机微分方程:

$$\frac{dx(t)}{x(t-)} = \mu dt + \sigma dW(t) + d\left(\sum_{j=1}^{N(t)} V_j\right) \quad (1)$$

式中: $dx(t)/x(t-)$ 为跳跃大小与跳跃前一个时刻的价格的比例; μ 和 σ 分别为资产价格没有发生跳跃

时的期望收益率和波动率; $W(t)$ 为标准的布朗运动; $N(t)$ 为强度为 λ 的泊松过程; $\{V_j\}$ 是一系列独立同分布的随机变量的集合,并且服从对数双指数密度分布

$$f(y) = \begin{cases} q\alpha_2 y^{\alpha_2-1}, & y < 1, \\ p\alpha_1 y^{-\alpha_1-1}, & y \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\alpha_1 > 1, \alpha_2, p, q$ 都是正常数,且 $p+q=1$.

由文献[9]可知, Kou 模型下欧式跳扩散期权值 v 满足如下 PIDE:

$$v_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx} - (r - \lambda \zeta) x v_x + (r + \lambda)v - \lambda \int_0^\infty v(xy) f(y) dy = 0 \quad (3)$$

其中: $(\tau, x) \in (0, T] \times [0, \infty), \tau = T - t, t$ 为当前时间, T 为到期日, r 为无风险利率, 系数 $\zeta = \frac{p\alpha_1}{\alpha_1 - 1} +$

$\frac{q\alpha_2}{\alpha_2 + 1} - 1$. 考察看跌期权, 边界条件为

$$v(\tau, 0) = Ke^{-r\tau}, \lim_{x \rightarrow \infty} v(\tau, x) = 0, \tau \in (0, T] \quad (4)$$

初值条件为

$$v(0, x) = g(x) = \max\{K - x, 0\} \quad (5)$$

对于看涨期权, 边界条件为

$$v(\tau, 0) = 0 \quad (6a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [v(\tau, x) - (x - Ke^{-r\tau})] = 0, \tau \in (0, T] \quad (6b)$$

初值条件为

$$v(0, x) = g(x) = \max\{x - K, 0\} \quad (7)$$

其中 K 为敲定价格.

另外, Kou 模型下美式跳扩散期权可以通过求解如下互补问题得到:

$$\begin{cases} Lv \geq 0, \\ v - g \geq 0, \\ Lv \cdot (v - g) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

其中:

$$Lv = v_\tau - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx} - (r - \lambda \zeta) x v_x + (r + \lambda)v - \lambda \int_0^\infty v(xy) f(y) dy$$

考察美式看跌期权, 初值条件为式(5), 边界条件为

$$v(\tau, 0) = K \quad (9a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(\tau, x) = 0, \tau \in (0, T] \quad (9b)$$

为有限体积离散方便, 首先将方程(3)简化为如下变系数抛物型方程:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} (p(x) \frac{\partial v}{\partial x}) + q(x) \frac{\partial v}{\partial x} +$$

$$cv - \lambda \left(\int_0^\infty v(xy) f(y) dy \right) = 0 \quad (10)$$

其中 $p(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2, q(x) = (\sigma^2 - r + \lambda\zeta)x, c = r + \lambda,$ 且满足相应的初边值条件.

本文主要考虑美式看跌期权模型的有限体积离散, 看涨情况的处理相似.

2 积分项逼近及有限体积离散

期权定价问题是定义在无限的区域 $[0, \infty) \times [0, T]$ 上, 为了采用有限体积求解, 必须把原问题限制在一个截断的区域 $[0, X] \times [0, T]$ 上, 其中 X 要取得足够大.

2.1 积分项逼近

本小节中, 主要采用文献[9]中的线性插值技术和递推公式对方程(10)中的积分项

$$-\lambda \int_0^\infty v(xy) f(y) dy$$

进行逼近, 并记离散后所得的稠密矩阵为 \mathbf{R} . 为简单记, 首先不妨对 $E = [0, X]$ 作如下均匀网格剖分 $T_h: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = X,$ 其中空间步长 $h = x_i - x_{i-1} = \frac{X}{m}, E_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, m.$

令 $y = \frac{z}{x},$ 则有:

$$Q = \int_0^\infty v(xy) f(y) dy = \int_0^\infty \frac{v(z) f(z/x)}{x} dz \quad (11)$$

将 Q 分成两部分, $Q = Q^- + Q^+,$ 其中:

$$Q^- = \int_0^x \frac{v(z) f(z/x)}{x} dz = q\alpha_2 x^{-\alpha_2} \int_0^x v(z) z^{\alpha_2-1} dz \quad (12)$$

$$Q^+ = \int_x^\infty \frac{v(z) f(z/x)}{x} dz = p\alpha_1 x^{\alpha_1} \int_x^\infty v(z) z^{-\alpha_1-1} dz \quad (13)$$

接下来, 首先考虑 Q^- 项的逼近. 在离散节点 $x_i (i=1, 2, \dots, m-1)$ 处, 有:

$$Q_i^- = q\alpha_2 x_i^{-\alpha_2} \int_0^{x_i} v(z) z^{\alpha_2-1} dz = \sum_{j=0}^{i-1} Q_{i,j}^- \quad (14)$$

其中:

$$Q_{i,j}^- = q\alpha_2 x_i^{-\alpha_2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(z) z^{\alpha_2-1} dz \quad (15)$$

在区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上对 $v(z)$ 进行线性插值处理, 可得:

$$Q_i^- \approx A_i^- = \sum_{j=0}^{i-1} A_{i,j}^- \quad (16)$$

其中:

$$A_{i,j}^- = q\alpha_2 x_i^{-\alpha_2} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\frac{x_{j+1} - z}{h} v(x_j) + \frac{z - x_j}{h} v(x_{j+1}) \right) z^{\alpha_2-1} dz \quad (17)$$

经积分计算得:

$$A_{i,j}^- = \frac{q\alpha_2 x_i^{-\alpha_2}}{(\alpha_2 + 1)h} [(x_{j+1}^{\alpha_2+1} - (x_{j+1} + \alpha_2 h)x_j^{\alpha_2})v(x_j) + (x_j^{\alpha_2+1} - (x_j - \alpha_2 h)x_{j+1}^{\alpha_2})v(x_{j+1})], j = 1, 2, \dots, i-1 \quad (18)$$

$$A_{i,0}^- = \frac{q}{\alpha_2 + 1} \left(\frac{x_1}{x_i} \right)^{\alpha_2} [v(0) + \alpha_2 v(x_1)] \quad (19)$$

同理, 对 Q^+ 项进行逼近, 即有:

$$Q_i^+ \approx A_i^+ = \sum_{j=i}^{m-1} A_{i,j}^+ \quad (20)$$

其中:

$$A_{i,j}^+ \approx p\alpha_1 x_i^{\alpha_1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(z) z^{-\alpha_1-1} dz, j = i, \dots, m-2 \quad (21)$$

$$A_{i,m-1}^+ \approx p\alpha_1 x_i^{\alpha_1} \int_{x_{m-1}}^\infty v(z) z^{-\alpha_1-1} dz, j = m-1 \quad (22)$$

在区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上对 $v(z)$ 进行插值处理并求积分, 则式(21)可以改写为

$$A_{i,j}^+ = \frac{p\alpha_1 x_i^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)h} [(x_{j+1}^{1-\alpha_1} - (x_{j+1} - \alpha_1 h)x_j^{-\alpha_1})v(x_j) + (x_j^{1-\alpha_1} - (x_j + \alpha_1 h)x_{j+1}^{-\alpha_1})v(x_{j+1})], j = i, \dots, m-2 \quad (23)$$

由于 $A_{i,m-1}^+$ 需要在区间 $[x_m, \infty)$ 上求近似积分, 假设当 $x \geq x_m$ 时, 有线性形式 $v(x) = v(x_m) + c(x - x_m)$ 成立. 对于看跌期权有: $v(x_m) = 0, c = 0;$ 对于欧式看涨期权有: $v(x_m) = x_m - Ke^{-r}, c = 1;$ 而对于美式看涨期权有: $v(x_m) = x_m - K, c = 1.$ 故

$$A_{i,m-1}^+ = \frac{p\alpha_1 x_i^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)h} [(x_m^{1-\alpha_1} - (x_m - \alpha_1 h)x_{m-1}^{-\alpha_1}) \cdot v(x_{m-1}) + (x_{m-1}^{1-\alpha_1} - x_m^{1-\alpha_1})v(x_m) + x_m^{1-\alpha_1} hc] \quad (24)$$

综上所述可知

$$(\mathbf{R}\mathbf{v})_i = -\lambda(A_i^- + A_i^+), i = 1, \dots, m-1 \quad (25)$$

其中 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{m-1})^T$ 为未知向量.

定理 1^[9] 对任意给定的 $\tau \in (0, T],$ 假设 $v(\tau, x)$ 关于 $x \in [0, X]$ 二阶连续可导. 则当 $\alpha_2 > 0, \alpha_1 > 1$ 时, 有如下结论成立:

$$|Q_i^- - A_i^-| = O(h^2), |Q_i^+ - A_i^+| = O(h^2).$$

定理 2^[9] 矩阵 $\mathbf{R} + \lambda\mathbf{I}$ 是一个非负对角占优的 \mathbf{Z} 矩阵, 即:

$$\sum_j (\mathbf{R} + \lambda\mathbf{I})_{i,j} \geq 0, \mathbf{R}_{i,j} \leq 0, \forall j \neq i, i = 1, \dots, m-1.$$

下面给出积分项逼近的递推公式的详细推导过程. 首先对 A_i^- , 由式(18)易知:

$$A_{i+1,j}^- = \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^{\alpha_2} A_{i,j}^-, j = 0, 1, \dots, i-1. \quad (26)$$

结合(16), 可得递推公式如下:

$$A_{i+1}^- = \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^{\alpha_2} A_i^- + A_{i+1,i}^-, i = 0, 1, \dots, m-1. \quad (27)$$

同理, 对 A_i^+ 有

$$A_{i-1}^+ = \left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right)^{\alpha_1} A_i^+ + A_{i-1,i-1}^+, i = 2, \dots, m-1. \quad (28)$$

其中 $A_{m-1}^+ = A_{m-1,m-1}^+$ 由式(24)给出.

2.2 有限体积格式

取试探函数空间 V_h 为相应于 T_h 的线性有限元空间, 即 V_h 为满足下列条件的函数 v_h 的集合: ① $v_h \in C(E)$, $v_h(X) = 0$; ② v_h 在每个 E_i 上是线性函数, 它完全由单元的两端点的值唯一确定. 由线性有限元空间的性质, 易知在单元 E_i 上有:

$$v_h = \frac{x_i - x}{h} v_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h} v_i \quad (29)$$

$$\frac{\partial v_h}{\partial x} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \quad (30)$$

对原始剖分 T_h 作对偶剖分 T_h^* : $0 = x_0 < x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{m-\frac{1}{2}} < x_m = M$, 并记 $E_0^* = [x_0, x_{\frac{1}{2}}]$, $E_i^* = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, $E_m^* = [x_{m-\frac{1}{2}}, x_m]$. 取检验函数空间 V_h^* 为相应于 T_h^* 的分片常数函数(阶梯函数)空间, 即 V_h^* 为满足下列条件的函数 \bar{v}_h 的集合: $\bar{v}_h(x) = 0$, $x \in E_m^*$; \bar{v}_h 在每个 E_i^* 上是常数.

抛物型方程(10)的半离散有限体积格式为: 求 $v_h = v_h(\tau, \cdot) \in V_h$ 使得:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v_h}{\partial \tau}, \bar{v}_h\right) + a_h(v_h, \bar{v}_h) = 0, \forall \bar{v}_h \in V_h^*, \\ 0 < \tau \leq T, \\ v(0, x) = g(x), \quad x \in E, \end{cases} \quad (31)$$

或者等价地

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v_h}{\partial \tau}, \varphi_i\right) + a_h(v_h, \varphi_i) = 0, i = 0, \dots, m-1, \\ v(0, x) = g(x), \quad x \in E, \end{cases} \quad (32)$$

其中 φ_i 为 V_h^* 中的基函数, 双线性形式:

$$a_h(v_h, \varphi_i) = p_{i-\frac{1}{2}} v_h'(x_{i-1/2}) - p_{i+\frac{1}{2}} v_h'(x_{i+1/2}) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) \frac{\partial v_h}{\partial x} dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} c v_h dx - \lambda \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} Q dx, i = 1, \dots, m-1 \quad (33)$$

由式(30), (16)和(20), 则:

$$a_h(v_h, \varphi_i) = p_{i-\frac{1}{2}} \frac{v_i - v_{i-1}}{h} - p_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_{i+1} - v_i}{h} + q_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_{i+1} + v_i}{2} - q_{i-\frac{1}{2}} \frac{v_i + v_{i-1}}{2} - (q_{i+\frac{1}{2}} - q_{i-\frac{1}{2}}) v_i + c v_i h - \lambda (A_i^- + A_i^+) h, i = 1, \dots, m-1 \quad (34)$$

其中 $v_m = 0$, $v_i = v_h(\tau, x_i)$, $p_{i-\frac{1}{2}} = p(x_{i-\frac{1}{2}})$, $q_{i-\frac{1}{2}} = q(x_{i-\frac{1}{2}})$. 特别地, 当 $x \in I_0^*$ 时, 有:

$$a_h(v_h, \varphi_0) = \left(\frac{p_{\frac{1}{2}}}{h} - \frac{q_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{h}{2}\right) v_0 + \left(\frac{q_{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{p_{\frac{1}{2}}}{h}\right) v_1 \quad (35)$$

另外, 时间项方向

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v_h}{\partial \tau}, \varphi_0\right) = 2 \frac{\partial v_0}{\partial \tau}, \\ \left(\frac{\partial v_h}{\partial \tau}, \varphi_i\right) = h \frac{\partial v_i}{\partial \tau}, i = 0, \dots, m-1 \end{cases} \quad (36)$$

由式(34)–(36)可得, 方程(31)对应的半离散矩阵形式为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \mathbf{S} \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (37)$$

其中 $\mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{R}$, \mathbf{R} 为积分部分离散所得稠密矩阵(25), \mathbf{P} 为非积分部分离散所得的三对角阵, 即:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_{m-2} \\ 0 & 0 & \dots & a_{m-1} & b_{m-1} \end{pmatrix}_{(m-1) \times (m-1)},$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{m-2} \\ v_{m-1} \end{pmatrix}_{(m-1) \times 1}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-2} \\ f_{m-1} \end{pmatrix}_{(m-1) \times 1}$$

且

$$\begin{cases} a_i = -\frac{1}{2} \sigma^2 (i - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} (\sigma^2 - r + \lambda \zeta) (i - \frac{1}{2}), \quad i = 2, \dots, m-1 \\ b_i = \frac{1}{2} \sigma^2 (i - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 (i + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} (\sigma^2 - r + \lambda \zeta) (i + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} (\sigma^2 - r + \lambda \zeta) (i - \frac{1}{2}) + c, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ c_i = -\frac{1}{2} \sigma^2 (i + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} (\sigma^2 - r + \lambda \zeta) (i + \frac{1}{2}), \quad i = 1, \dots, m-2 \end{cases}$$

式(37)的右端项为

$$\begin{cases} f_1 = K(\frac{3}{8}\sigma^2 + \frac{1}{4}(\lambda\zeta - r) + \frac{q}{\alpha_2 + 1}) \\ f_i = K\lambda(\frac{1}{i})^{\alpha_2} \cdot \frac{q}{\alpha_2 + 1}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1 \end{cases}$$

定理 3 当模型参数满足 $r > 0, \lambda > 0, \frac{5}{2}\sigma^2 > r - \lambda\zeta$ 和 $\frac{1}{2}\sigma^2 > \lambda\zeta - r$ 时, 矩阵 $\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}$ 是一个对角元素为正的严格对角占优 \mathbf{M} 矩阵, 即:

$$\sum_j (\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I})_{i,j} > 0, \quad \mathbf{P}_{i,j} \leq 0 (\forall j \neq i),$$

$$(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I})_{i,i} > 0$$

证明 首先对于 \mathbf{P} 中的 $a_i (i=2, \dots, m-1)$. 当 $i=2$ 时,

$$a_2 = -\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}(\sigma^2 - r + \lambda\zeta) \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}(\frac{5}{2}\sigma^2 - r + \lambda\zeta)$$

由假设 $\frac{5}{2}\sigma^2 > r - \lambda\zeta$ 可知 $a_2 < 0$. 注意到当 $i \geq 3$ 时, 有 $a_i = \frac{1-2i}{4}(\frac{2i+1}{2}\sigma^2 - r + \lambda\zeta)$, 又显然当 $i \geq 3$ 时, 有 $\frac{2i+1}{2} > \frac{5}{2}$, 故有:

$$\frac{2i+1}{2}\sigma^2 > r - \lambda\zeta$$

恒成立. 所以 $a_i < 0 (i=2, \dots, m-1)$.

同理对 \mathbf{P} 中的 $c_i (i=1, \dots, m-2)$. 当 $i=1$ 时, 有:

$$c_1 = -\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}(\sigma^2 - r + \lambda\zeta) \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}(\frac{1}{2}\sigma^2 + r - \lambda\zeta).$$

由假设 $\frac{1}{2}\sigma^2 > \lambda\zeta - r$ 可知 $c_1 < 0$. 注意到当 $i \geq 2$ 时, 有:

$$\frac{2i-1}{2}\sigma^2 > \lambda\zeta - r$$

恒成立. 故 $c_i < 0 (i=1, \dots, m-2)$.

最后对 \mathbf{P} 中的 $b_i (i=1, \dots, m-1)$. 当 $i=1$ 和 $i=m-1$ 时, 有:

$$b_1 > c_1, \quad b_{m-1} > a_{m-1}.$$

另外, 当 $i=2, \dots, m-2$ 时, 显然有

$$b_i + c_i + a_i = r + \lambda > 0.$$

因此 $\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}$ 是一个严格对角占优矩阵, 即:

$$\sum_j (\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I})_{i,j} \geq r > 0$$

由此式可知, 对任意的 i 显然有 $(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I})_{i,i} > 0$ 成立, 则定理得证.

由定理 3.2 和定理 3.3 可得如下推论.

推论 1 当模型(3)参数满足 $r > 0, \lambda > 0, \frac{5}{2}\sigma^2 > r - \lambda\zeta$ 和 $\frac{1}{2}\sigma^2 > \lambda\zeta - r$ 时, 半离散矩阵 $\mathbf{S} = \mathbf{P} + \mathbf{R}$ 是一个对角元素为正的严格对角占优 \mathbf{M} 矩阵.

接下来构造方程(31)的全离散有限体积格式. 对 $[0, T]$ 作均匀网格剖分 $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = T$, 其中时间网格步长为 $\Delta\tau = \frac{T}{n}$. 则求解方程(32)的全离散有限体积格式为: 求 $v_h^j (j=1, \dots, n) \in V_h$, 使得:

$$\left(\frac{\partial v_h^j}{\partial \tau}, \bar{v}_h\right) + a_h(v_h^{j,\theta}, \bar{v}_h) = 0, \quad \forall \bar{v}_h \in V_h^* \tag{38}$$

其中 $\frac{\partial v_h^j}{\partial \tau} = \frac{v_h^j - v_h^{j-1}}{\Delta\tau}$, $v_h^{j,\theta} = \theta v_h^j + (1-\theta)v_h^{j-1}$, 当 $\theta=1$ 时, 格式变为向后欧拉(BE)格式; 当 $\theta=\frac{1}{2}$ 时, 格式变为 Crank-Nicolson(CN)格式.

将式(38)写成矩阵形式:

$$\left(\frac{1}{\Delta\tau}\mathbf{I} + \theta\mathbf{S}\right)v^{(j)} = \left(\frac{1}{\Delta\tau}\mathbf{I} - (1-\theta)\mathbf{S}\right)v^{(j-1)} + \mathbf{f}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{39}$$

由推论 1 可知, 下面推论 2 结论显然成立.

推论 2 当模型(3)参数满足 $r > 0, \lambda > 0, \frac{5}{2}\sigma^2 > r - \lambda\zeta$ 和 $\frac{1}{2}\sigma^2 > \lambda\zeta - r$ 时, 且时间步长 $\Delta\tau$ 充分小时, 全离散矩阵 $\frac{1}{\Delta\tau}\mathbf{I} + \theta\mathbf{S}$ 是一个对角元素为正的严格对角占优 \mathbf{M} 矩阵.

推论 2 说明了全离散系统(39)满足离散极大值原理且离散是单调的.

3.3 线性互补问题

若考察美式期权定价问题, 在式(39)中令 $\mathbf{B} = \frac{1}{\Delta\tau}\mathbf{I} + \theta\mathbf{S}, \mathbf{C} = \frac{1}{\Delta\tau}\mathbf{I} - (1-\theta)\mathbf{S}$, 则经有限体积离散后, 式(8)可变为一系列时间层上的线性互补问题(LCP)

$$\begin{cases} \mathbf{B}v^{(j)} \geq \mathbf{C}v^{(j-1)} + \mathbf{f}, \\ v^{(j)} \geq \mathbf{g}, \\ (\mathbf{B}v^{(j)} - \mathbf{C}v^{(j-1)} - \mathbf{f}) \cdot (v^{(j)} - \mathbf{g}) = 0. \end{cases} \tag{40}$$

其中 $j=1, \dots, n$, 向量 \mathbf{g} 包含了收益函数 $g(x)$ 在网格点处的函数值. 特别地, 令 $\mathbf{z} := v^{(j)} - \mathbf{g}, \mathbf{A} := \mathbf{B}, \mathbf{q} := \mathbf{B}\mathbf{g} - \mathbf{C}v^{(j-1)} - \mathbf{f}$, 则式(40)变为标准的 LCP

$$\mathbf{w} := \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{q} \geq 0, \quad \mathbf{z} \geq 0, \quad \mathbf{z}^T \mathbf{w} = 0 \tag{41}$$

记为 $\text{LCP}(\mathbf{q}, \mathbf{A})$, 本文主要采用模超松弛迭代法对

其进行求解.

定理 4^[21] 令 $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 是一个 H_+ 矩阵, 且 $A = M - N$ 是 A 的一个 H 相容的分裂, 即 $\langle A \rangle = \langle M \rangle - |N|$. 假设 Ω 是一个正对角矩阵. 如果参数矩阵 Ω 满足 $\Omega \geq \frac{1}{2} \text{diag}(M)$, 则对任意的初始向量 $x_0 \in \mathbf{R}^n$, 迭代序列 $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbf{R}_+^n$ 收敛于 $\text{LCP}(q, A)$ 的唯一解 $z^* \in \mathbf{R}_+^n$.

接下来, 建立 MSOR 方法求解 Kou 跳扩散期权定价模型的收敛定理.

定理 5 令 S 和 $B = \frac{1}{\Delta\tau}I + \theta S$ 分别是美式期权模型(8)离散后得到的半离散和全离散矩阵. 如果模型参数满足:

$$r > 0, \lambda > 0, \frac{5}{2}\sigma^2 > r - \lambda\zeta, \frac{1}{2}\sigma^2 > \lambda\zeta - r$$

且参数矩阵 Ω 满足 $\Omega \geq \frac{1}{2} \text{diag}(M)$, 则对于任意的初始向量, MSOR 方法求解美式 Kou 跳扩散期权定价模型收敛于唯一解.

证明 根据推论 2, 全离散矩阵 B 是一个对角元素为正的严格对角占优 M 矩阵, 则由文献[22]可知矩阵 B 是一个 H_+ 矩阵, 而且 $B = D - L - U$ 是矩阵 B 的一个相容分裂. 由定理 4 可知, 如果 $\Omega \geq \frac{1}{2} \cdot \text{diag}(M)$, 则对于任意的初始向量, MSOR 方法收敛于唯一解.

3 数值实验

用数值实验来验证文中方法的有效性. Kou 模型参数取:

$$\sigma = 0.15, r = 0.05, T = 0.25,$$

$$K = 100, \lambda = 0.1, \alpha_1 = 3.0465,$$

$$\alpha_2 = 3.0775, p = 0.3445, q = 0.6555(42)$$

且计算区域为 $[0, 300] \times [0, 0.25]$. 这里的模型参数与文献[8-10]中的取值相同.

注意到模型参数(42)满足 $r > 0, \lambda > 0, \frac{5}{2}\sigma^2 > r - \lambda\zeta, \frac{1}{2}\sigma^2 > \lambda\zeta - r$. 所以对任意的初始向量, 定理 5 保证了 MSOR 算法可以收敛到唯一解. MSOR 方法中的参数矩阵和松弛因子分别取: $\Omega = D$ 和 $\alpha = 1.2$. 另外, PSOR 方法中的松弛因子取 $\omega = 1.2$. 为公平比较, PSOR 和 MSOR 的收敛准则同取:

$$\|\min(Az + q, z)\|_2 < \varepsilon, \varepsilon = 10^{-6}.$$

相对误差的计算公式为: $E_{\text{ror}} = \frac{\|v - v^*\|_2}{\|v^*\|_2}$, 其中 $\|\cdot\|_2$ 表示向量 2 范数, v 和 v^* 分别为 $t=0$ ($\tau=T$) 时刻的数值解和参考精确解. 所有计算均在一台 CPU 为 3.4 GHz 和内存为 8 GB 的机器上运行, 编程语言为 Matlab R2014a. 实验 m 和 n 分别表示股价方向和时间方向的网格剖分数.

首先, 表 1 给出了当取不同的网格剖分时, CN 有限体积格式求解 Kou 模型下美式看跌期权所得的部分节点处的期权值, 并与文献[9]作比较. 记 m 为时间方向离散网格数, n 为空间方向离散网格数. 从表中不难看出, 数值解随着网格剖分数的增大变得更加精确.

表 1 美式 Kou 跳扩散看跌期权的期权值 (CN 格式)

Tab.1 Option values of American put options under

Kou's jump-diffusion model (CN scheme)

(m, n)	$v(0, 90)$	$v(0, 100)$	$v(0, 110)$
(300, 200)	10.000 827	2.800 474	0.560 394
(600, 400)	10.004 765	2.805 993	0.561 488
(1 200, 800)	10.004 973	2.807 398	0.561 774
(2 400, 1 600)	10.005 034	2.807 755	0.561 848
(4 800, 3 200)	10.005 061	2.807 846	0.561 868
文献[9]	10.005 071	2.807 879	0.561 876

其次, 为了计算数值解的相对误差, 采用 CN 格式在网格 $(m, n) = (4\ 800, 3\ 200)$ 上求解美式看跌期权的价格作为参考解. 期权价格曲面如图 1a 所示. 图中还展示了当 $t=0$ 时刻的期权值、Delta 值和 Gamma 值. 从图中不难看出, 数值结果是稳健的.

最后, 比较 PSOR 方法和 MSOR 方法的求解时间, 平均迭代步数以及求解精度.

表 2 和表 3 中, 分别列出了 BE 和 CN 格式下 PSOR 和 MSOR 的平均迭代步数 I_T , CPU 时间和相对误差 E_{ror} . 由这两个表可以看出, 所有方法均随着网格剖分数的增大数值解变得更加精确, PSOR 和 MSOR 方法的计算精度大致相当. 虽然 PSOR 的平均迭代步数略少于 MSOR, 但是其所需的

表 2 两种方法的误差, 迭代步数和所需

CPU 时间 (BE 格式)

Tab.2 Comparison of two methods on iteration number,

CPU time and E_{ror} (BE scheme)

(m, n)	PSOR			MSOR		
	I_T	CPU	$E_{\text{ror}}/10^{-6}$	I_T	CPU	$E_{\text{ror}}/10^{-6}$
(50, 25)	8.9	0.04	357	9.6	0.01	357
(100, 50)	8.9	0.18	154	9.7	0.06	154
(200, 100)	9.9	0.77	59.9	14.8	0.31	59.9
(400, 200)	16.8	6.23	22.9	27.5	3.64	22.9
(800, 400)	31.9	102.27	9.51	53.6	64.08	9.51

CPU 时间却比 MSOR 要多. 另外, 对比两个表格还可看出, CN 格式的计算效率明显高于 BE 格式.

CPU 时间随着空间方向离散网格数 m 的变化曲线. 由图可以看出, PSOR 比 MSOR 需要更多的 CPU 时间.

在图 2 中, 还画出了 MSOR 和 PSOR 方法的

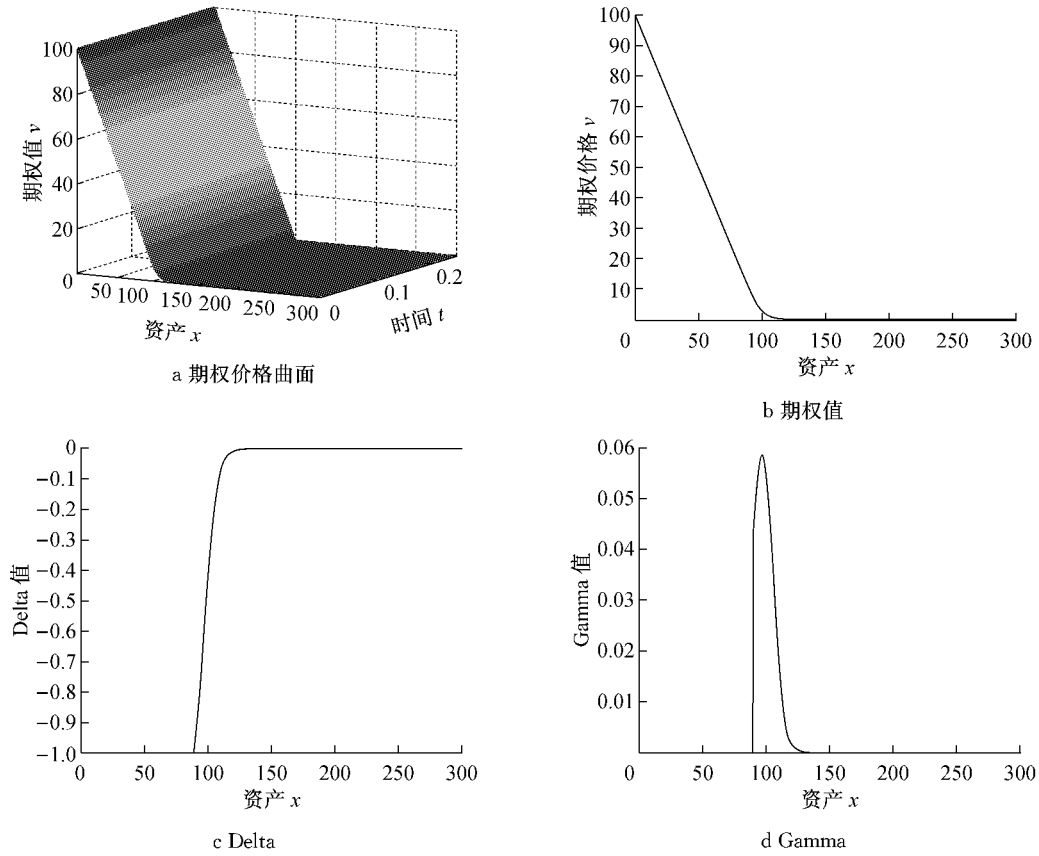


图 1 美式看跌期权

Fig.1 American put option

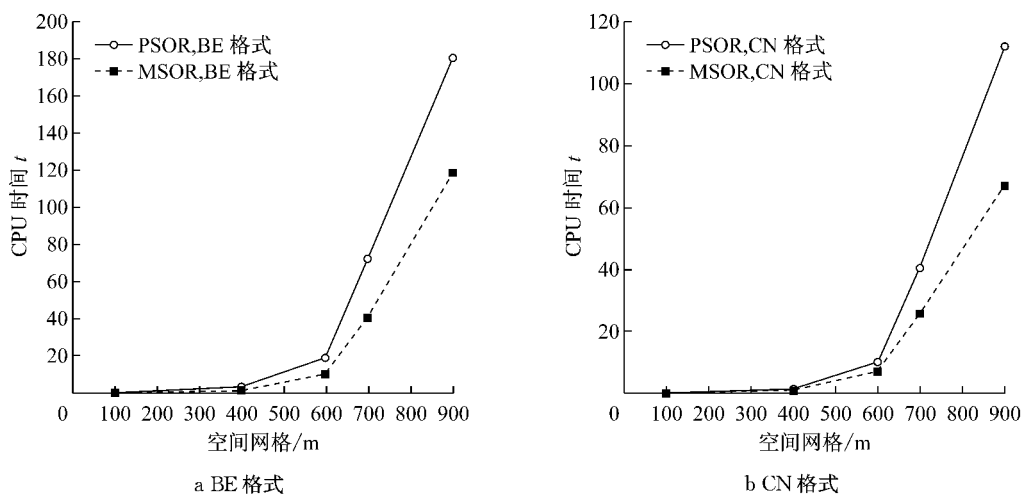


图 2 当 $m = n$ 时, PSOR 和 MSOR 的 CPU 时间比较

Fig.2 The CPU time of PSOR and MSOR with $m = n$

表 3 两种方法的误差,迭代步数和所需 CPU 时间(CN 格式)

Tab.3 Comparison of two methods on iteration number, CPU time and E_{error} (CN scheme)

(m, n)	PSOR			MSOR		
	I_T	CPU	$E_{\text{error}}/10^{-6}$	I_T	CPU	Error/ 10^{-6}
(50,25)	9.6	0.03	289	9.6	0.01	289
(100,50)	9.6	0.13	113	9.7	0.05	113
(200,100)	9.7	0.66	36.1	10.0	0.17	36.1
(400,200)	10.6	3.64	10.0	16.3	1.97	10.0
(800,400)	18.8	62.31	2.45	30.5	36.21	2.45

4 结论

本文主要研究了有限体积法定价 Kou 美式期权模型. 基于线性有限元空间, 构造了向后欧拉和 Crank-Nicolson 两种全离散有限体积格式, 针对 Kou 模型中的积分项, 采用文献[9]中高效的递归公式进行离散. 针对美式期权定价离散得到的一系列时间层上的线性互补问题, 采用模超松弛迭代方法进行求解, 并建立相应的收敛性定理. 数值实验验证了文中方法的高效性和稳健性. 但是, 如何将文中方法推广至高维的美式跳扩散期权定价问题的求解, 例如 Bates 模型, 并进行相应的收敛性分析, 这仍需进一步的研究.

参考文献:

- [1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3): 637.
- [2] Merton R C. Option pricing when underlying stock return are discontinuous [J]. *Journal of Financial Economics*, 1976, 3: 125.
- [3] Kou S G. A jump-diffusion model for option pricing [J]. *Management Science*, 2002, 48(8):1086.
- [4] Kou S G, Wang H. Option pricing under a double exponential jump diffusion model [J]. *Management Science*, 2004, 50(7): 1178.
- [5] Tavella D, Randall C. Pricing financial instruments: The finite difference method [M]. Chichester: John Wiley Sons, 2000.
- [6] Andersen L, Andreasen J. Jump-diffusion processes: Volatility smile fitting and numerical methods for option pricing [J]. *Review of Derivatives Research*, 2000, 4(3): 231.
- [7] dHalluin Y, Forsyth P A, Labahn G. A penalty method for American options with jump diffusion processes [J]. *Numerische Mathematik*, 2004, 97(2): 321.
- [8] dHalluin Y, Forsyth P A, Vetzal K R. Robust numerical methods for contingent claims under jump diffusion processes [J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2005, 25(1): 87.
- [9] Toivanen J. Numerical valuation of European and American options under Kou's jump-diffusion model [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2008, 30(4): 1949.
- [10] Salmi S, Toivanen J. An iterative method for pricing American options under jump-diffusion model [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2011, 61(7): 821.
- [11] Zhang K, Wang S. Pricing options under jump diffusion processes with fitted finite volume method [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 201(1): 398.
- [12] Zhang K, Wang S. A computational scheme for options under jump diffusion processes [J]. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2009, 6(1): 110.
- [13] 甘小艇, 殷俊锋. 二次有限体积法定价美式期权 [J]. *计算数学*, 2015, 37(1): 67.
GAN Xiaoting, YIN Junfeng. Quadratic finite volume method for pricing American options [J]. *Mathematic Numerica Sinica*, 2015, 37(1): 67.
- [14] Gan X T, Yin J F. Symmetric finite volume element approximations of second order linear hyperbolic integro-differential equations [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2015, 70 (10): 2589.
- [15] Cryer C W. The solution of a quadratic programming using systematic overrelaxation [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1971, 9(3): 385.
- [16] Ikonen S, Toivanen J. Operator splitting methods for American option pricing with stochastic volatility [J]. *Numerische Mathematik*, 2009, 113(2): 299.
- [17] 张凯. 美式期权定价——基于罚方法的金融计算 [M]. 北京: 经济科学出版社, 2012.
ZHANG Kai. Pricing American options—financial computation based on the penalty method [M]. Beijing: Economic Science Press, 2012.
- [18] Murty K. Linear complementarity, linear and nonlinear programming [M]. Berlin: Heldermann, 1988.
- [19] Hadjidimos A, Tzoumas M. Nonstationary extrapolated modulus algorithms for the solution of the linear complementarity problem [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2009, 431(1): 197.
- [20] Dong J L, Jiang M Q. A modified modulus method for symmetric positive-definite linear complementarity problems [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2009, 16 (2): 129.
- [21] Bai Z Z. Modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity Problems [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2010, 17(6): 917.
- [22] Zheng N, Yin J F. Modulus-based successive overrelaxation method for pricing American options [J]. *Journal of Applied Mathematics and Informatics*, 2013, 31(5): 769.
- [23] Zheng N, Yin J F. Accelerated modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problem [J]. *Numerical Algorithms*, 2013, 64(2): 245.