

基于摩尔库伦准则考虑渗流影响的孔扩张理论

梅毕祥^{1,2}, 杨敏^{1,2}, 贾尚华^{1,2}

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092;

2. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 通过球对称问题的应变协调方程、渗流理论、统一强度准则和相关联流动法则分析了球孔扩张问题。首先, 根据渗流理论推导出了球对称状态下的球孔扩张的超孔隙水压力分布公式, 确定了考虑渗流影响的球形孔扩张问题的应力场、应变场和位移场的基本公式。利用位移公式, 结合塑性区球孔孔壁位移, 推导了球孔初始半径 a_0 , 扩孔半径 a 和对应的塑性区半径 r_p 三者的理论关系式。利用该关系式和其他相关公式给出了求解球孔扩张问题的具体求解方法。通过该方法求得具体问题的应力场、应变场和位移场。总之, 通过扩孔压力 p 、初始孔径 a_0 和扩孔孔径 a 这三者中的任意两者可求得具体问题的扩孔压力、应力场和位移场等。最后分析了一个计算实例的主要参量、应力场、位移场。

关键词: 球孔扩张理论; 渗流理论; 扩孔压力; 塑性区半径

中图分类号: TU43

文献标志码: A

Mohr-Coulomb Criterion-based Theoretical Solutions of Spherical Cavity Expansion Considering Seepage

MEI Bixiang^{1,2}, YANG Min^{1,2}, JIA Shanghua^{1,2}

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: An analysis was made of the cavity expansion based on the unified strength theory, seepage theory, strain compatibility equations in spherical coordinates and the associative flow rule. First, the excess pore water pressure formula was derived by the seepage theory in spherical coordinates and the basic formulas of stresses, strains, displacements in the elastic and plastic regions were obtained with the excess pore water pressure formula. Then the formula of displacements, boundary conditions of plastic zone were used to derive the theoretical relationship formula among

the initial radius a_0 , expanded radius a and radius of plastic zone r_p of the spherical bore. The solution method of the spherical cavity expansion considering seepage was obtained based on the above-mentioned formula and some other relative formulas. The closed-form solutions of stresses, strains, displacements in the elastic and plastic regions could be obtained in concrete problems of cavity expansion. In summary, the expansion pressure, stresses, strains, displacements in concrete problems could be directly obtained. Finally, a case study was made of the main parameters, the distributions of stresses, strains and displacements.

Key words: spherical cavity expansion theory; seepage theory; internal pressure; radius of plastic zone

自圆孔扩张理论在 1945 年提出以后, 经过 Vesic, Yu 等和 Collins 等^[1-5], 该理论已经广泛应用于岩土工程中的沉桩^[6]、静力触探^[7]以及压密注浆^[8]等多方面的工程研究中, 并且取得了长足的发展。各国学者研究了饱和土体、非饱和土体^[8-10]等多种介质中的圆孔扩张理论, 采用了多种屈服准则, 如 Mohr-Coulomb、Tresca、修正剑桥模型和 SMP (Spatial Mobilized Plane) 等^[1,12-15], 并且将大小应变理论、剪胀理论、应变软化特征和结构性特征等多方面应用于扩孔理论中^[13,8-10,16]。

但是, 考虑渗流影响的圆孔扩张理论研究甚少, 而且多数集中于柱孔扩张问题讨论中, 在球孔扩张问题中研究的几乎没有。即使在柱孔扩张中, 已有文献对渗流作用进行了较大的假设, 渗流力仅仅作用于一个有限范围内, 类似于裘布依并流公式的求解过程^[9,17]。对于软土地区桩基础持力层往往选择承载力较高的砂层、砾石层, 而这类土层水力通道发育, 渗透性高, 桩端后注浆工艺中的清水开塞、甚至

收稿日期: 2016-03-07

第一作者: 梅毕祥(1979—)男, 工程师, 博士生, 主要研究方向为桩基础及软土地基。E-mail: 2637734247@qq.com

通讯作者: 杨敏(1960—)男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为深基础与桩基础。E-mail: yangmin@tongji.edu.cn

压注水泥浆过程中存在渗流作用. 因此研究考虑渗流影响的球孔扩张理论, 不仅完善了球孔扩张理论的不足, 而且对部分工况下桩端后注浆开塞压力、甚至注浆压力预测具有工程指导意义. 本文研究考虑渗流影响的球孔扩张理论, 分析渗流对球孔扩张的影响.

1 模型及基本理论

1.1 模型

无限空间土体中球对称的圆孔扩张问题, 计算模型参见图 1. 土中初始应力各向同性均为 p_0 , 初始孔半径为 a_0 , 当均匀分布的内压力从 p_0 变为 p , 孔内超孔隙水压力从 0 变为 p_w 时, 孔半径由 a_0 变为 a , 随着内压力的不断增加, 孔周围土体开始屈服, 从原来整体弹性状态转变为同时含有弹性区和塑性区的弹塑性状态, 此时塑性区半径为 r_p , 弹性与塑性区交界面位移为 u_{rp} , 对应的径向应力为临塑压力 p_y . 求解时, 规定应力、应变以压为正, 初始孔半径为 a_0 简称为初始半径, 扩孔后的孔半径 a 简称为扩孔半径, p 称为扩孔压力; σ_r, σ_φ 分别为径向正应力和环向正应力; u_r 为径向位移. 上面所述各应力除超孔隙水压力外均属于有效应力.

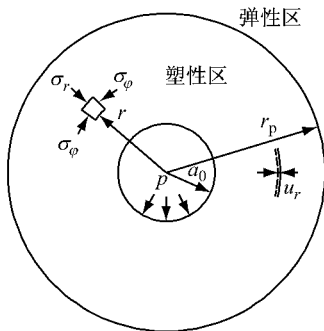


图 1 球形扩张力学模型平面示意图

Fig.1 Mechanical model for expansion of cylindrical cavity

1.2 基本方程

从土体力学平衡的角度考虑, 考虑渗流影响的球对称状态下的平衡微分方程为^[17]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{\partial u_{wat}}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

式中, u_{wat} 为超孔隙水压力.

根据弹性理论, 弹性区的几何方程和物理方程为

$$\epsilon_r = -\frac{du_r}{dr}, \quad \epsilon_\varphi = -\frac{u_r}{r} \quad (2)$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\varphi), \quad \epsilon_\varphi = \frac{1}{E}[(1-\nu)\sigma_\varphi - \nu\sigma_r] \quad (3)$$

式中: E 为弹性模量; ν 为泊松比.

由于环向应力处处相等, 受力状态与三轴试验相同, 因此, 土体的屈服准则非常适用 Mohr-Coulumb 准则^[1], 即

$$F = \sigma_r - M\sigma_\varphi - \sigma_0 = 0$$

$$M = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \sigma_0 = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (4)$$

式中: 内摩擦角 φ 由三轴压缩试验测得; c 为粘聚力; F 为屈服函数; M 为常数.

应力边界条件为

$$\sigma_{r(r=a)} = p \quad (5-a)$$

$$\sigma_{r(r \rightarrow \infty)} = p_0 \quad (5-b)$$

球孔扩张的渗流边界条件为

$$u_{wat(r=a)} = p_w$$

$$u_{wat(r \rightarrow \infty)} = 0 \quad (6)$$

将式(2)消除位移 u_r , 即可得球对称的应变协调方程, 即

$$\epsilon_r = \frac{d}{dr}(r\epsilon_\varphi) - \frac{d\epsilon_\varphi}{dr} + \frac{\epsilon_\varphi - \epsilon_r}{r} = 0 \quad (7)$$

2 球对称状态下球孔超孔隙水压力

假设土体在受压时, 孔隙率和孔隙结构变化微小, 无论土体在弹性还是塑性状态都认为土体的渗透系数不变. 根据渗流理论可知, 稳定渗流方程为拉普拉斯方程, 转化后可得球对称状态下球孔扩张问题的超孔隙水压力方程基本微分方程为^[18]

$$\nabla^2 u_{wat} = \frac{\partial^2 u_{wat}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_{wat}}{\partial r} = 0 \quad (8)$$

式(8)可化为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u_{wat}}{\partial r} \right) = 0 \quad (9)$$

得

$$r^2 \frac{\partial u_{wat}}{\partial r} = K \quad (10)$$

通解为

$$u_{wat} = \int \frac{K}{r^2} dr = -\frac{K}{r} + C \quad (11)$$

式(10)和式(11)中, K, C 为积分常数. 将渗流边界条件式(6)代入通解, 得

$$C = 0, \quad K = -ap_w \quad (12)$$

则考虑渗流影响的球孔扩张问题的超孔隙水压力方程为

$$u_{wat}(r) = \frac{ap_w}{r} \quad (13)$$

3 弹塑性应力求解

3.1 弹性应力、应变及位移

在求解球孔扩张问题时,假设球孔内半径为 a ,外半径为无穷大的问题.假设球孔内受到超孔隙水压力 p_w 和扩张压力 p ,外表面受压力 p_0 .该问题属于球对称弹性力学问题,根据该问题的特性,适用拉梅应变势解决该问题,设该问题的拉梅应变势为

$$\Phi(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 \quad (14)$$

式中, A, B, C 为常数.同时该 Lamé 应变势 $\Phi(r)$ 满足泊松方程如下:

$$\nabla^2 \Phi(r) = \text{constant} \quad (15)$$

则球孔周围土体的位移为

$$u_r = \frac{1}{2G} \frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{1}{2G} \left(-\frac{A}{r^2} + B + 2Cr \right) \quad (16)$$

式中: G 为剪切模量, $G = E / (2(1+\nu))$.将式(16)代入式(2),得

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{du_r}{dr} = -\frac{1}{2G} \left(\frac{2A}{r^3} + 2C \right) \\ \varepsilon_\varphi &= -\frac{u_r}{r} = -\frac{1}{2G} \left(-\frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + 2C \right) \end{aligned} \quad (17)$$

联立式(17)和式(3)可得

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2A}{r^3} - \frac{2\nu B}{(1-2\nu)r} - \frac{2(1+\nu)C}{1-2\nu} \\ \sigma_\varphi &= \frac{A}{r^3} - \frac{B}{(1-2\nu)r} - \frac{2(1+\nu)C}{1-2\nu} \end{aligned} \quad (18)$$

将式(18)代入式(1)即可求出参数 B ,得

$$B = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} ap_w \quad (19)$$

则应力方程可变为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2A}{r^3} - \frac{\nu}{(1-\nu)r} ap_w - \frac{2(1+\nu)C}{1-2\nu} \\ \sigma_\varphi &= \frac{A}{r^3} - \frac{1}{2(1-\nu)r} ap_w - \frac{2(1+\nu)C}{1-2\nu} \end{aligned} \quad (20)$$

将式(20)代入本问题的边界条件:

$\sigma_{r(r=a)} = p, \sigma_{r(r=\infty)} = p_0$,求得参数 A 和 C ,得

$$\begin{aligned} 2A &= a^3 \left(p_0 - p - \frac{\nu p_w}{1-\nu} \right) \\ C &= \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} p_0 \end{aligned} \quad (21)$$

则扩孔问题的弹性应力和位移场为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\left(p_0 - p - \frac{\nu}{1-\nu} p_w \right) \frac{a^3}{r^3} - \frac{\nu ap_w}{(1-\nu)r} + p_0 \\ \sigma_\varphi &= \frac{1}{2} \left(p_0 - p - \frac{\nu}{1-\nu} p_w \right) \frac{a^3}{r^3} - \frac{ap_w}{2(1-\nu)r} + p_0 \end{aligned}$$

$$u_r = \frac{1}{2G} \left\{ \frac{a^3}{r^3} \left(p - p_0 + \frac{\nu}{1-\nu} p_w \right) r + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} ap_w + \frac{1-2\nu}{1+\nu} p_0 r \right\} \quad (22)$$

式(22)所求的位移是绝对位移,而工程实践中关心的是相对于初始应变的相对应变和位移,即考虑的是扣除初始应力产生的应变后的应变和位移.初始应力 p_0 产生的应变为

$$\varepsilon = \frac{p_0}{E} (1-2\nu) = \frac{C}{G} \quad (23)$$

则该问题的位移和应变为

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{4G} \left[\frac{a^3}{r^3} \left(p - p_0 + \frac{\nu}{1-\nu} p_w \right) r + \frac{1-2\nu}{1-\nu} ap_w \right] \\ \varepsilon_r &= \frac{a^3}{2G} \left(p - p_0 + \frac{\nu}{1-\nu} p_w \right) \frac{1}{r^3} \\ \varepsilon_\varphi &= -\frac{1}{4G} \left[\left(p - p_0 + \frac{\nu}{1-\nu} p_w \right) \frac{a^3}{r^3} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{ap_w}{r} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)中的位移公式中含有常数项,即不论半径 r 为多大,土体均存在一个固定的位移,对于式(22)所对应的问题是合理的.但是对于式(24)所对应的问题与实际工程情况不太符合,其实实际情况中由于地层和裸露等因素超孔隙水压力不可能如式(13)扩散到无限远的地方,因此,式(24)得出的位移值在距离球孔中心点一定范围内还是具有理论意义和指导意义的.

3.2 塑性区应力求解

弹塑性交界面处的应力既满足弹性解答,同时也满足屈服准则.如球孔扩张问题进入弹塑性阶段,从本文 2.1 节可知弹性区的内半径 a 为 r_p ,内表面受力 p 为 p_y ;即相应的将 2.1 节中所有 a 替换为 r_p ,所有 p 替换为 p_y .根据式(13)知界面处的超孔隙水压力 u_{wat} 为

$$u_{wat(r=r_p)} = \frac{ap_w}{r_p} \quad (25)$$

将式(22)中的应力解代入屈服准则式(4),并且将 p_w 替换为 $u_{wat(r=r_p)}$,可得临塑压力 p_y 为

$$p_y = \sigma_{r(r=r_p)} = \frac{3Mp_0 - \frac{(1+\nu)Ma}{(1-\nu)r_p} p_w + 2\sigma_0}{2+M} \quad (26)$$

将式(13)与式(4)代入式(1)得

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_0}{r} - \frac{ap_w}{r^2} = 0 \quad (27)$$

解之得

$$\sigma_r = Kr^{-2(1-\frac{1}{M})} + \frac{Ma p_w}{M-2} r^{-1} - \frac{\sigma_0}{(M-1)} \quad (28)$$

式中, K 为积分常数.

塑性区应力边界条件为

$$\begin{aligned} \sigma_{r(r=a)} &= p \\ \sigma_{r(r=r_p)} &= p_y \end{aligned} \quad (29)$$

将塑性区应力边界条件式(29)代入式(28)可得

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \begin{cases} -\left(p_0 - p_y - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{a p_w}{r_p}\right) \frac{r_p^3}{r^3} - \frac{\nu a p_w}{(1-\nu)r} + p_0, & (r \geq r_p) \\ \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1}\right] \left(\frac{r_p}{r}\right)^{2(1-\frac{1}{M})} + \frac{Ma p_w}{M-2} r^{-1} - \frac{\sigma_0}{(M-1)} & (r_p > r \geq a) \end{cases} \\ \sigma_\varphi &= \begin{cases} \frac{1}{2} \left(p_0 - p_y - \frac{\nu}{1-\nu} \frac{a p_w}{r_p}\right) \frac{r_p^3}{r^3} - \frac{a p_w}{2(1-\nu)r} + p_0, & (r \geq r_p) \\ \frac{1}{M} \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1}\right] \left(\frac{r_p}{r}\right)^{2(1-\frac{1}{M})} + \frac{a p_w}{M-2} r^{-1} - \frac{\sigma_0}{(M-1)} & (r_p > r \geq a) \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

式(31)就是所求球孔扩张的应力场解.

3.3 塑性区应变、位移求解

球孔塑性区土体屈服, 采用相关联流动准则^[19], 得

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (32)$$

式中: ϵ_{ij}^p 为塑性应变, 将式(4)代入式(32)得

$$d\epsilon_r^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_r} = d\lambda \quad (33a)$$

$$d\epsilon_\varphi^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_\varphi} = -Md\lambda \quad (33b)$$

式中: ϵ_r^p 为径向塑性正应变; ϵ_φ^p 为环向塑性正应变.

由式 33(a)一式 33(b)可得

$$\frac{d\epsilon_r^p}{d\epsilon_\varphi^p} = -\frac{1}{M} \quad (34)$$

对式(34)两端进行积分, 根据初始屈服时候各向塑性应变为零的条件, 得

$$\epsilon_r^p = -\frac{1}{M} \epsilon_\varphi^p \quad (35)$$

因为塑性区的弹性应变满足虎克方程, 即式(3), 则联立式(31)和物理式(3)得

$$\begin{aligned} \epsilon_r^e &= \frac{1}{E} \left\{ \left(1 - \frac{2\nu}{M}\right) \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1}\right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{r_p}{r}\right)^{2(1-\frac{1}{M})} + \frac{(M-2\nu)ap_w}{M-2} r^{-1} - \frac{(1-2\nu)\sigma_0}{(M-1)} \right\} \\ \epsilon_\varphi^e &= \frac{1}{E} \left\{ \left(\frac{1-\nu}{M} - \nu\right) \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1}\right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{r_p}{r}\right)^{2(1-\frac{1}{M})} + \frac{(1-\nu-\nu M)ap_w}{M-2} r^{-1} - \frac{(1-2\nu)\sigma_0}{(M-1)} \right\} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1}}{r_p^{-2(1-\frac{1}{M})}} = \\ &= \frac{p - \frac{Ma p_w}{M-2} + \frac{\sigma_0}{M-1}}{a^{-2(1-\frac{1}{M})}} \end{aligned} \quad (30)$$

联立式(4)、式(22)中的弹性应力公式和式(28)以及式(30), 再通过如式(26)类似的方法将相关参量进行替换得

式中 ϵ_r^e 为径向弹性正应变; ϵ_φ^e 为环向弹性正应变. 塑性区的应变关系为

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon_r^e + \epsilon_r^p \\ \epsilon_\varphi &= \epsilon_\varphi^e + \epsilon_\varphi^p \end{aligned} \quad (37)$$

将式(35)和式(37)代入式(7)并化简得

$$\frac{d\epsilon_\varphi^p}{dr} + \left(1 + \frac{1}{M}\right) \frac{\epsilon_\varphi^p}{r} + \frac{\epsilon_\varphi^e - \epsilon_r^e}{r} + \frac{d\epsilon_\varphi^e}{dr} = 0 \quad (38)$$

式(38)是以 ϵ_φ^p 为因变量, r 为自变量的一阶线性微分方程, 将式(36)代入式(38)求得的通解为

$$\begin{aligned} \epsilon_\varphi^p &= Cr^{-(1+\frac{1}{M})} - \frac{1}{E} \frac{(2\nu-M)ap_w}{M-2} Mr^{-1} - \\ &\quad \frac{(\nu-1)M}{(3-M)E} \left(1 + \frac{1}{M} - \frac{2}{M^2}\right) \cdot \\ &\quad \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1}\right] \left(\frac{r_p}{r}\right)^{2(1-\frac{1}{M})} \end{aligned} \quad (39)$$

塑性区边界 $r=r_p$ 处塑性应变为 0, 则积分常数 C 为

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{E} \frac{(2\nu-M)ap_w}{M-2} Mr_p^{\frac{1}{M}} + \\ &\quad \frac{M(\nu-1)}{(3-M)E} \left(1 + \frac{1}{M} - \frac{2}{M^2}\right) \cdot \\ &\quad \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1}\right] r_p^{(1+\frac{1}{M})} \end{aligned} \quad (40)$$

联立式(39)和式(40)以及式(35)推导出的式子就可以求出塑性区的径向、环向塑性应变. 将塑性区塑性应变和弹性应变叠加即可求得塑性区应变. 这样求得的应变公式为总应变, 而实际工程中关心的是相对应变. 因此将总应变减去一个初始应变即可获得相对应变.

根据虎克定律, 初始应力产生的应变为

$$\epsilon'_{,r} = \epsilon'_\varphi = \frac{1-2\nu}{E} p_0 \quad (41)$$

为求解塑性区位移,列出环向应变式如下:

$$\begin{aligned} \epsilon_\varphi = & \frac{M(\nu-1)}{(3-M)E} \left(1 + \frac{1}{M} - \frac{2}{M^2}\right) \\ & \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1} \right] \left(\frac{r_p}{r}\right)^{(1+\frac{1}{M})} + \\ & \frac{1}{E} \frac{M(2\nu-M)ap_w}{M-2} \left(\frac{r_p}{r}\right)^{(1+\frac{1}{M})} r_p^{-1} - \\ & \frac{1}{E} \left[\frac{\nu-1}{3-M} \left(M + \frac{1}{M}\right) + \nu \right] \\ & \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1} \right] \left(\frac{r_p}{r}\right)^{2(1-\frac{1}{M})} + \\ & \frac{1}{E} \frac{(1-\nu-3\nu M+M^2)ap_w}{M-2} r^{-1} + \\ & \frac{2\nu-1}{E} \left(\frac{\sigma_0}{M-1} + p_0\right) \end{aligned} \quad (42)$$

将式(42)代入式(2)得塑性区位移如下:

$$\begin{aligned} u_r = -\epsilon_\varphi r = & \frac{\nu-1}{E} \frac{M}{3-M} \left(\frac{2}{M^2} - \frac{1}{M} - 1\right) \\ & \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1} \right] \left(\frac{r_p}{r}\right)^{(1+\frac{1}{M})} r + \\ & \frac{1}{E} \left[\frac{\nu-1}{3-M} \left(M + \frac{1}{M}\right) + \nu \right] \\ & \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1} \right] \left(\frac{r_p}{r}\right)^{2(1-\frac{1}{M})} r - \\ & \frac{1}{E} \frac{M(2\nu-M)ap_w}{M-2} \left(\frac{r_p}{r}\right)^{\frac{1}{M}} - \frac{2\nu-1}{E} \left(\frac{\sigma_0}{M-1} + p_0\right) r - \\ & \frac{1}{E} \frac{(1-\nu-3\nu M+M^2)ap_w}{M-2} \end{aligned} \quad (43)$$

根据式(24)中位移公式进行适当参量替换得塑性区外弹性区位移场为

$$u_r = \frac{1}{4G} \left[\frac{r_p^3}{r^3} \left(p_y - p_0 + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{ap_w}{r_p} \right) r + \frac{1-2\nu}{1-\nu} ap_w \right] \quad (44)$$

3.4 初始孔径、扩孔孔径和扩孔压力之间的关系

球孔内表面位移等于初始半径和扩孔半径的差,则:

$$\begin{aligned} a - a_0 = u_r |_{r=a} = & -\frac{1}{E} \frac{(1-\nu-3\nu M+M^2)p_w}{M-2} a + \\ & \frac{\nu-1}{E} \frac{M}{3-M} \left(\frac{2}{M^2} - \frac{1}{M} - 1\right) \\ & \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1} \right] \left(\frac{r_p}{a}\right)^{(1+\frac{1}{M})} a + \\ & \frac{1}{E} \left[\frac{\nu-1}{3-M} \left(M + \frac{1}{M}\right) + \nu \right] \\ & \left[p_y - \frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1} \right] \left(\frac{r_p}{a}\right)^{2(1-\frac{1}{M})} a - \end{aligned}$$

$$\frac{1}{E} \frac{M(2\nu-M)p_w}{M-2} \left(\frac{r_p}{a}\right)^{\frac{1}{M}} a - \frac{2\nu-1}{E} \left(\frac{\sigma_0}{M-1} + p_0\right) a \quad (45)$$

根据式(26)可知临塑应力 p_y 是塑性区半径 r_p 的函数,则式(45)为塑性区半径 r_p 、初始半径 a_0 和扩孔半径 a 三者的关系式。

3.5 求解方法(过程)说明及扩孔压力求解

从式(24)中的弹性位移公式分析可知,不论塑性区半径为多大,弹塑性界面处的位移为

$$u_r = \frac{1}{4G} \left[\left(p_y - p_0 + \frac{\nu}{1-\nu} p_w \right) r_p + \frac{1-2\nu}{1-\nu} ap_w \right] \quad (46)$$

计算球孔扩张问题的弹塑性解,首先应计算球孔扩张是否进入塑性状态.如果弹塑性界面发生在孔口处,则

$$u'_{r(r=a)} = \frac{1}{4G} \left[\left(p_y - p_0 + \frac{\nu}{1-\nu} p_w \right) a + \frac{1-2\nu}{1-\nu} ap_w \right] \quad (47a)$$

$$u'_{r(r=a)} = a - a_0 \quad (47b)$$

此时 $p = p_y, r_p = a$.

如果孔内压力再增大,球孔扩张问题进入弹塑性状态,则有

$$u'_{r(r=a)} < a - a_0 \quad (48)$$

将式(47a)和式(26)代入式(48)可得

$$\frac{1}{4G} \left[\frac{2\sigma_0 + 2(M-1)p_0}{2+M} + \frac{2(1-\nu-\nu M)p_w}{(1-\nu)(2+M)} \right] < 1 - \frac{a_0}{a} \quad (49)$$

则式(49)就是判断球孔是否进入弹塑性状态的判别式,满足式(49)球孔进入弹塑性状态.如果已知扩孔压力 p ,判断扩孔问题是否属于弹塑性问题就非常简单的,即: $p > p_{y(r=a)}$ 说明进入弹塑性状态,反之亦然.

如球孔扩张进入弹塑性状态,并且已知初始半径 a_0 和扩孔半径 a ,将式(26)代入式(45)后,对超越方程式(45)进行数值解可以求得 r_p .这样就可以求得扩孔压力 p ,球孔扩张问题的应力场和位移场等.

如果已知参数为初始半径 a_0 和扩孔压力 p ,根据式(46)可以得到 r_p 为因变量、 p 为自变量的函数关系式,将该关系式以及式(26)代入式(45)即可通过数值方法求出扩孔半径 a .

将式(26)代入式(30)可得扩孔压力,即

$$p = \left[\frac{3Mp_0 + 2\sigma_0}{2+M} - \frac{(1+\nu)Ma p_w}{(1-\nu)(2+M)r_p} \right]$$

$$\frac{Ma p_w}{(M-2)r_p} + \frac{\sigma_0}{M-1} \left] \left(\frac{r_p}{a} \right)^{2(1-\frac{1}{M})} + \frac{M p_w}{M-2} - \frac{\sigma_0}{M-1} \right. \quad (50)$$

4 算例分析

假设各向同性的均质黏性土受到初始均匀土压力 p_0 的作用, $p_0=100$ kPa, 土的弹性模量 $E=26$ MPa, 泊松比 $\nu=0.3$, 内摩擦角为 25° , 粘聚力 20 kPa. 土体中存在一孔, 其初始孔半径 $a_0=0.1$ m, 扩孔半径为 a , 孔内表面施加的压力为 p .

首先, 根据式(49)判断本算例是否进入塑性区, 求得 $a > 0.100161$ m.

当满足上式, 该球孔扩张问题就进入弹塑性状态.

4.1 塑性区半径及扩孔压力分析

图 2 给出了 p_w 为 0, 30 和 50 kPa 时, 扩孔半径 a 对塑性区半径 r_p 的影响规律图. 图 3 给出了 p_w 为 0, 30 kPa 时, 扩孔半径对塑性区半径与扩孔半径比值 r_p/a 和扩孔压力 p 影响规律.

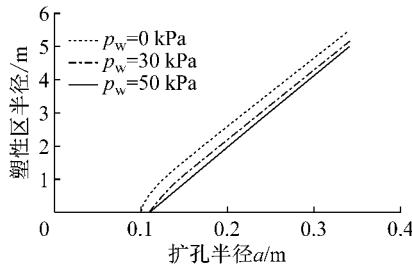


图 2 扩孔半径 a 对塑性区半径的影响
Fig.2 Variations of r_p with a

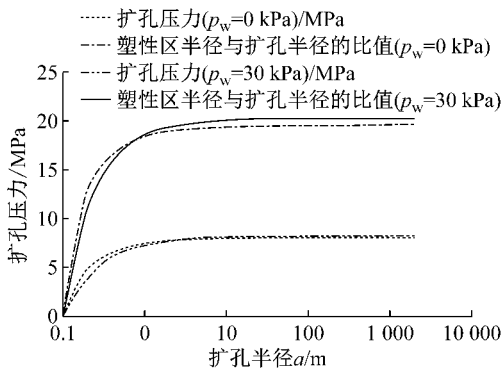


图 3 扩孔半径 a 对扩孔压力 p 、塑性区半径 r_p 与扩孔半径 a 的比值的影响

Fig.3 Variations of $p, r_p/a$ with a

从图 2~图 3 中可知塑性区半径 r_p 随扩孔半径 a 的增大开始增速非常快, 随后变慢, 最后二者的比

值几乎趋于一个常数, 该常数近似为 20, 并且 p_w 越大其比值越小. 从图 3 中得出扩孔压力 p 随着扩孔半径 a 增大而增大, 最后趋于 8 MPa 左右, 并且 p_w 为 30 kPa 时其极限值趋于 8.12 MPa, p_w 为 0 时其极限值趋于 8.12 MPa.

4.2 应力场、位移场分析

算例的扩孔半径为 0.12 m, 球孔内水压力值 p_w 分别为 0, 1, 5 和 100 kPa. 其中对 $p_w=0$ 的算例与文献[20]和文献[1]进行了对比. 算例结果及对比结果见图 4~图 5.

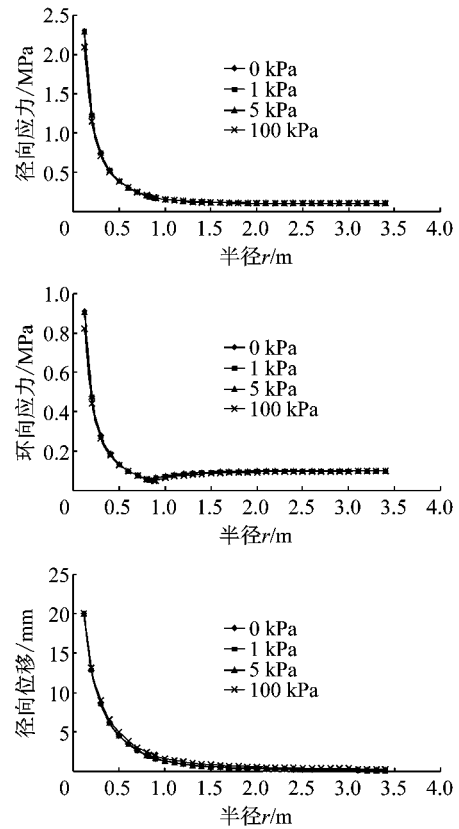


图 4 径向、环向应力和径向位移沿径向的分布情况
Fig.4 Stresses, displacement distributions of the cylindrical cavity

图 4 给出孔内不同水压力下的应力、位移分布情况, 扩孔压力 p 随孔内水压力的变化略有变化, 随着孔内水压力增大扩孔压力随之变小, 扩孔压力大约 2 MPa 左右, 是初始地应力的 20 倍左右. 径向应力、位移随半径越来越小; 环向应力在塑性半径位置处出现最小值. 从图中可以看出 p_w 在 0, 1 和 5 kPa 时, 其对土体径向、环向应力的影响较小, 但是当 p_w 为 100 kPa 时, 其对土体径向、环向应力的影响比较明显. 总体上各半径处的位移随着 p_w 增大而增大, 但是变化极其微小.

图 5 给出了本文计算结果与文献[20]和文献

[1]的对比结果. 本文计算结果是依据地层基本资料、初始半径 a_0 以及扩孔半径 a 直接得出的. 已知, $a_0=0.1\text{ m}$, $a=0.12\text{ m}$, 得出扩孔压力 $p=2.302\text{ MPa}$, $r_p=0.827\text{ m}$; 而文献[20]和文献[1]的计算结果是基于扩孔压力 p , 扩孔半径 a 得出的. 已知 $p=2.302\text{ MPa}$, $a=0.12\text{ m}$, 得出文献[20]的 $r_p=0.827\text{ m}$, 对于文献[1], 本文假设塑性区体积应变为 0, 得出 $r_p=0.803\text{ m}$. 从图 5 可知本文与文献[20]二者应力场分布基本相同, 位移场大体上也比较接近, 二者得出孔口位移一致, 说明本文的理论成果正确. 文献[1]的径向应力与本文基本相同, 但是环形应力略高于本文算例和文献[20]算例结果, 这是因为本文算例和文献[20]都考虑了塑性区的体积应变, 而文献[1]计算体积应变缺少参数, 没考虑塑性区体积应变.

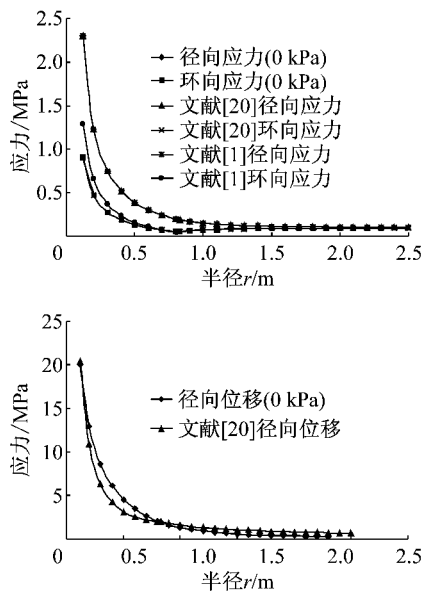


图 5 本文计算结果与文献[20]对比结果

Fig.5 Comparison between the results of the paper and Ref.[20]

5 结论

(1)通过渗流方程求解出球对称状态下的无限球孔扩张问题的超孔隙水压力方程;然后借助 lame 应变势求解考虑渗流影响的球孔扩张问题的弹性应力、应变和位移解,经代入平衡方程、边界条件和应变协调方程,结果表明所求解完全满足,证明该解是正确的.

(2)基于摩尔库伦准则求解球孔扩张问题,得出了球孔扩张问题的弹塑性应力场基本公式;使用相

关联流动准则求解出球孔扩张问题的弹塑性应变、位移基本公式;依据球孔边界条件,在孔周土体存在塑性屈服的前提下,推导出塑性区半径 r_p 、球孔初始半径 a_0 和扩孔半径 a 三者的关系式;推导了球孔扩张问题的全应力场和全位移场,其中环向应力存在一个极小值,该极小值对应的位置正好为塑性区半径 r_p .

(3)针对球孔扩张问题的复杂性,给出了求解球孔问题的具体求解过程,并通过算例讨论扩孔半径对塑性区半径、扩孔压力等的影响,并且通过与已有成果对比,证明了理论成果的正确性.该成果完善了球孔扩张理论,而且对部分工况下桩端后注浆开塞压力、甚至注浆压力预测具有工程指导意义.

参考文献:

- [1] Vesic A C. Expansion of cavity in infinite soil mass[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division, 1972, 98(3): 265.
- [2] YU H S, HOULSBY G T. Finite cavity expansion in dilatant soil: Loading analysis[J]. Geotechnique, 1991, 41(2): 173.
- [3] Collins I F, Pender M J, Wang Y. Cavity expansion in sands under drained loading conditions[J]. International Journal Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1992, 16(1): 3.
- [4] SALGADO R. Analysis of penetration resistance in sands[D]. California: University of California, 1993.
- [5] COLLINS I F, YU H S. Analysis of penetration resistance in sands[J]. International Journal Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1996, 20(7): 489.
- [6] 胡伟,黄义,刘增荣,等.饱和粘土中挤土桩球形孔扩张的弹塑性分析[J].工程力学,2008,25(8):180.
HU Wei, HUANG Yi, LIU Zengrong, et al. Elastic-plastic solution of sphere cavity expansion of soil compaction pile in saturated clay[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(8): 180.
- [7] Salgado R, Mitchell J K, Jamiolkowski M. Cavity expansion and penetration resistance in sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1997, 123(4): 344.
- [8] Chai J C, Carter J P, Miura N, et al. Improved prediction of lateral deformations due to installation of soil-cement columns[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2009, 135(12): 1836.
- [9] 饶平平,李镜培,张常光.考虑各向异性、剪胀和渗流的柱孔扩张问题统一解[J].岩土力学,2010,31(S2):79.
RAO Pingping, LI Jingpei, ZHANG Changguang. Unified solutions of cylindrical cavity expansion considering anisotropy, shear dilation and seepage[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(S2): 79.
- [10] 肖昭然,张昭,杜明芳.饱和土体小孔扩张问题的弹塑性解析解[J].岩土力学,2004,25(9):1373.
XIAO Zhaoran, ZHANG Zhao, DU Mingfang. An elastoplastic

- closed-form approach of cavity expansion in saturated soil based on modified Cam Clay Model [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, 25(9): 1373.
- [11] 胡伟,刘明振. 非饱和土中球形孔扩张的弹塑性分析[J]. *岩土工程学报*, 2006, 28(10): 1292.
HU Wei, LIU Mingzhen. Elastic-plastic solution of expansion of sphere cavity in unsaturated soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2006, 28(10): 1292.
- [12] Cao L F, Teh C I, Chang M F. Undrained cavity expansion in modified Cam clay I: theoretical analysis[J]. *Geotechnique*, 2001, 51(4): 323.
- [13] 邹金锋,吴亚中,李亮,等. 考虑大变形和排水条件时柱孔扩张问题统一解析[J]. *工程力学*, 2010, 27(6): 1.
ZOU Jinfeng, WU Yazhong, LI Liang, *et al.* Unified elastic plastic solution for cylindrical cavity expansion considering large strain and drainage condition [J]. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(6): 1.
- [14] 邹金锋,彭建国,张进华,等. 基于非线性 Mohr-Coulomb 强度准则下的扩孔问题解析[J]. *土木工程学报*, 2009, 42(7): 90.
ZOU Jinfeng, PENG Jianguo, ZHANG Jinhua, *et al.* Analytical solution of cavity expansion with the non-linear Mohr-Coulomb failure rule [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2009, 42(7): 90.
- [15] 刘时鹏,施建勇,雷国辉. 基于 SMP 准则柱孔扩张问题相似解[J]. *岩土力学*, 2012, 33(5): 1375.
LIU Shipeng, SHI Jianyong, LEI Guohui. Similarity solutions of cylindrical cavity expansion based on SMP criterion [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2012, 33(5): 1375.
- [16] 刘维正,石名磊,徐林荣. 考虑软黏土结构性损伤的圆柱孔扩张弹塑性分析[J]. *岩土工程学报*, 2013, 35(3): 487.
LIU Weizheng, SHI Minglei, XU Linrong. Elastoplastic analysis of cylindrical cavity expansion in natural sedimentary soft clay with structure damage [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, 35(3): 487.
- [17] 李宗利,任青文,王亚红. 考虑渗流场影响深埋圆形隧洞的弹塑性解[J]. *岩石力学与工程学报*, 2004, 23(8): 1291.
LI Zongli, REN Qingwen, WANG Yahong. Elasto-plastic analytical solution of deep-buried circle tunnel considering fluid flow field [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(8): 1291.
- [18] 苑莲菊,李振栓,武胜忠,等. 工程渗流力学及应用[M]. 北京:中国建材工业出版社,2001.
YUAN Lianju, LI Zhenshuan, WU Shengzhong, *et al.* *Engineering seepage mechanics and its application* [M]. Beijing: China Building Materials Industry Press, 2001.
- [19] 陈晓平,杨光华,杨雪强. 土的本构关系[M]. 北京:中国水利水电出版社,2011.
CHEN Xiaoping, YANG Guanghua, YANG Xueqiang. *Constitutive relation of soils* [M]. Beijing: China Water & Power Press, 2011.
- [20] 余海岁. 岩土介质小孔扩张理论[M]. 周国庆,赵光思,梁恒昌,等译. 北京:科学出版社,2013.
YU Haisui. *Cavity expansion methods in geomechanics* [M]. Translated by ZHOU Guoqing, ZHAO Guangsi, LIANG Hengchang, *et al.* Beijing: Science Press, 2013.