文章编号：0253-374X(2017)02-0296-06 DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2017.02.021

两步模系矩阵分裂算法求解弱非线性互补问题

李 蕊[1,2]，殷俊锋[1]

(1. 同济大学 数学科学学院，上海 200092；2. 嘉兴学院 数理与信息工程学院，浙江 嘉兴 314001)

摘要：考虑两步模系矩阵分裂算法求解弱非线性互补问题，理论分析给出了当系数矩阵为正定矩阵或 H_+-矩阵时迭代法的收敛性质和两步模系超松弛迭代法的参数选取范围. 数值实验表明，两步模系矩阵分裂算法是行之有效的，并在迭代步数和迭代时间上均优于模系矩阵分裂算法.

关键词：矩阵分裂；两步模系算法；弱非线性互补问题

中图分类号：O241.8 **文献标志码**：A

Two-step Modulus-based Matrix Splitting Algorithms for Weakly Nonlinear Complementarity Problems

LI Rui[1,2], *YIN Junfeng*[1]

(1. School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Mathematics Physics and Information Engineering, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China)

Abstract: Two-step modulus-based matrix splitting algorithms are proposed to solve weakly nonlinear complementarity problems. Convergence theory is established when the system matrix is either positive definite or an H_+-matrix. Moreover, the choice of the parameters for two-step modulus-based successive overrelaxation methods is also discussed. Numerical experiments show that the proposed methods are efficient and better than the modulus-based matrix splitting methods in aspects of iteration steps and CPU time.

Key words: matrix splitting; two-step modulus-based algorithms; weakly nonlinear complementarity problems

1 引言

给定大型稀疏矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$和 n 维向量 $\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n$，考虑如下一类互补问题：求向量 $\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^n$ 满足

$$\boldsymbol{z}\geqslant\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{w}:=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z})\geqslant\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}=0,\tag{1}$$

其中不等号是分量意义下的不等号，$\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}$ 表示向量 $\boldsymbol{z}$ 的转置，$\boldsymbol{\Phi}:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$ 为给定的n 元向量值函数. 特别地，当函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 为线性函数时，问题(1)化为线性互补问题；当函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 为李普希兹连续函数时，该问题被称为弱非线性互补问题[1].

互补问题在科学计算和工程应用中具有极其广泛的应用，如变分不等式、弹性接触问题、大坝渗流和期权定价等自由边界问题均可化为互补问题，详见文献[2]. 一直以来，互补问题的数值求解都是众多学者们研究的热点. 最近，白中治提出的求解线性互补问题的模系矩阵分裂算法[3]，由于迭代格式简单，收敛速度快，吸引了众多学者的关注，并得到了逐步完善和发展. 在模系矩阵分裂迭代法的基础上，学者们先后提出了两步模系矩阵分裂迭代法[4]、广义的模系矩阵分裂迭代法[5]、修正的模系矩阵分裂迭代法[6]和加速的模系矩阵分裂迭代法[7-8]等. 为了更快速有效地求解大型稀疏线性互补问题，白中治和张丽丽引入了并行计算技术，提出了模系并行多分裂迭代法并分析了迭代法的收敛条件[9]. 关于模系矩阵分裂迭代法的应用及文献综述，读者可参考文献[10-11].

在非线性互补问题(1)中，由于 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z})$仍然保留了线性部分，当函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 对角可微时，夏泽晨和李郴良[12]将求解线性互补问题的模系矩阵分裂迭代法推广至该非线性互补问题，构造了相应的模系矩阵分裂迭代法，建立了当 $\boldsymbol{A}$ 为正定或H_+-矩阵时的收敛理论. 随后，谢水莲等人采用两步模系矩阵分裂迭代法对该非线性互补问题进行求解，分析了当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定时的收敛性[13]. 随着模系矩阵分裂迭代法的不断发展，当函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 李普希兹连续

收稿日期：2016-06-14
基金项目：国家自然科学基金(No:11271289)
第一作者：李 蕊(1982—)，女，讲师，博士生，主要研究方向为数值代数. E-mail: lirui@tongji.edu.cn
通信作者：殷俊锋(1979—)，男，理学博士，教授，博士生导师，主要研究方向为数值分析与科学计算. E-mail: yinjf@tongji.edu.cn

时，黄娜和马昌凤[1]采用模系矩阵分裂迭代法对此类弱非线性互补问题进行了数值求解，分析了迭代法在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定时的收敛条件. 本文将构造两步模系矩阵分裂迭代法求解该弱非线性互补问题，并讨论该迭代法在 $\boldsymbol{A}$ 为正定或 H_+-矩阵时的收敛条件. 数值实验表明，对于大型稀疏弱非线性互补问题，两步模系矩阵分裂迭代法不仅是有效的，而且收敛效果优于文献[1]中的模系矩阵分裂迭代法.

2　两步模系矩阵分裂迭代法

设 $\boldsymbol{\Omega}$ 为正对角矩阵，γ 为正常数，通过变量替换 $\boldsymbol{z}=\frac{1}{\gamma}(|\boldsymbol{x}|+\boldsymbol{x}),\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\gamma}(|\boldsymbol{x}|-\boldsymbol{x})$ 和矩阵分裂 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$，文献[1]将弱非线性互补问题(1)转化为如下隐式不动点方程：

$$(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})|\boldsymbol{x}|-\gamma\left(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}\left(\frac{1}{\gamma}(|\boldsymbol{x}|+\boldsymbol{x})\right)\right),$$

并得到了模系矩阵分裂迭代法：

算法 1　给定初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbf{R}^n$，对于 $k=0,1,2,\cdots$，从下列方程组中解出 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$，

$$(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^{(k)}+(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})|\boldsymbol{x}^{(k)}|-\gamma(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}^{(k)})),$$

直至 $\{\boldsymbol{z}^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛，其中 $\boldsymbol{z}^{(k)}=\frac{1}{\gamma}(|\boldsymbol{x}^{(k)}|+\boldsymbol{x}^{(k)})$.

特别地，当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$，其中 $\boldsymbol{D},-\boldsymbol{L},-\boldsymbol{U}$ 分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角部分、严格下三角部分和严格上三角部分，取 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L},\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}$，则得模系高斯-赛德尔迭代法(MGS)；取 $\boldsymbol{M}=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L},\boldsymbol{N}=\frac{1}{\omega}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}]$，则得模系逐步超松弛迭代法(MSOR)，其中 $\omega>0$ 为松弛因子；取 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{N}=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$，则得模系正定反对称分裂迭代法(MPS).

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵时，文献[1]讨论了算法 1 的收敛性.

为了提高计算效率，取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{N}_2$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个分裂，得到下列两步不动点方程组如下：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})|\boldsymbol{x}|-\\ \qquad\gamma\left(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}\left(\dfrac{|\boldsymbol{x}|+\boldsymbol{x}}{\gamma}\right)\right),\\ (\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})|\boldsymbol{x}|-\\ \qquad\gamma\left(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}\left(\dfrac{|\boldsymbol{x}|+\boldsymbol{x}}{\gamma}\right)\right),\end{cases}\tag{2}$$

构造了如下求解弱非线性互补问题(1)的两步模系矩阵分裂迭代法.

算法 2　设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{N}_2$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个分裂.

(1) 选取初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}\in\mathbf{R}^n$，令 $k=0,\boldsymbol{z}^{(0)}=\frac{1}{\gamma}(|\boldsymbol{x}^{(0)}|+\boldsymbol{x}^{(0)})$；

(2) 从下列方程组中求出 $\boldsymbol{x}^{(k+1)}\in\mathbf{R}^n$，

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}=\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{x}^{(k)}+(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})|\boldsymbol{x}^{(k)}|-\\ \qquad\gamma\left(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}\left(\dfrac{|\boldsymbol{x}^{(k)}|+\boldsymbol{x}^{(k)}}{\gamma}\right)\right),\\ (\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}+(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})|\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}|-\\ \qquad\gamma\left(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}\left(\dfrac{|\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}|+\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}}{\gamma}\right)\right),\end{cases}\tag{3}$$

令 $\boldsymbol{z}^{(k+1)}=\frac{1}{\gamma}(|\boldsymbol{x}^{(k+1)}|+\boldsymbol{x}^{(k+1)})$；

(3) 如果 $\boldsymbol{z}^{(k+1)}$ 满足停止准则，迭代结束；否则，令 $k:=k+1$，返回第 2 步.

算法 2 建立了求解一类弱非线性互补问题(1)的两步模系矩阵分裂迭代法的一般框架. 特别地，当函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 为线性函数时，该算法即为求解线性互补问题的两步模系矩阵分裂迭代法[4]. 通过选择不同的矩阵分裂，将得到不同的两步模系矩阵分裂迭代格式. 例如，选择矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三角分裂 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$，当：

$$\boldsymbol{M}_1=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L},\boldsymbol{N}_1=\frac{1}{\omega}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{U}],$$

$$\boldsymbol{M}_2=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{D}-\boldsymbol{U},\boldsymbol{N}_2=\frac{1}{\omega}[(1-\omega)\boldsymbol{D}+\omega\boldsymbol{L}],$$

则有两步模系逐步超松弛迭代格式(TMSOR)；特别地，$\omega=1$ 时即为两步模系高斯-赛德尔迭代格式(TMGS)；当：

$$\boldsymbol{M}_1=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{M}_2=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{U}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$$

时，迭代格式为模系正定反对称分裂迭代格式(TMPS).

3　收敛性分析

本节将分别讨论算法 2 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵或 H_+-矩阵时的收敛性. 首先，先介绍一些基本的记号和概念.

给定两个实矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),\boldsymbol{B}=(b_{ij})\in\mathbf{R}^{m\times n}$，如果对任意的 $1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$ 都有 $a_{ij}\geqslant b_{ij}$ ($a_{ij}>b_{ij}$)，则记 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{A}>\boldsymbol{B}$). 用记号 $|\boldsymbol{A}|=(|a_{ij}|)$ 表示

$\boldsymbol{A}$ 的绝对值. 特别地，对于向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，有 $|\boldsymbol{x}|=(|x_1|,\cdots,|x_n|)^{\mathrm{T}}$.

一个方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 如果满足对任意的非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{x}>0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵；若对任意 $i\neq j$，有 $a_{ij}\leqslant 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 Z-矩阵；若 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异的 Z-矩阵且 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{O}$ 为零矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 M-矩阵. 设 $\boldsymbol{A}$ 的比较矩阵 $\langle\boldsymbol{A}\rangle=(\langle a_{ij}\rangle)$ 定义为，当 $i=j$ 时，$\langle a_{ij}\rangle=|a_{ij}|$，当 $i\neq j$ 时，$\langle a_{ij}\rangle=-|a_{ij}|$. 如果 $\langle\boldsymbol{A}\rangle$ 为 M-矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 H-矩阵. 对于 H-矩阵 $\boldsymbol{A}$，有 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，且 $|\boldsymbol{A}^{-1}|\leqslant\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}$. 特别地，对角元为正的 H-矩阵称为 H_+-矩阵. 对角元为正的对角矩阵称为正对角矩阵.

给定 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$，如果 $\boldsymbol{M}$ 非奇异，则称 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个分裂；如果 $\langle\boldsymbol{A}\rangle=\langle\boldsymbol{M}\rangle-|\boldsymbol{N}|$，则称 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 H-相容分裂.

下面，考虑算法 2 的收敛性. 假设 $\boldsymbol{x}_*$ 为方程组(2)的精确解，即

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)\boldsymbol{x}_*=\boldsymbol{N}_1\boldsymbol{x}_*+(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})|\boldsymbol{x}_*|-\\ \qquad\gamma(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_*)),\\ (\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)\boldsymbol{x}_*=\boldsymbol{N}_2\boldsymbol{x}_*+(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})|\boldsymbol{x}_*|-\\ \qquad\gamma(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_*)),\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{z}_*=\dfrac{|\boldsymbol{x}_*|+\boldsymbol{x}_*}{\gamma}$. 将式(3)减去式(4)得：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)(\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{x}_*)=\boldsymbol{N}_1(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*)+\\ \qquad(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})(|\boldsymbol{x}^{(k)}|-|\boldsymbol{x}_*|)-\\ \qquad\gamma(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}^{(k)})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_*)), \qquad\qquad (5\mathrm{a})\\ (\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)(\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}_*)=\boldsymbol{N}_2(\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{x}_*)+\\ \qquad(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})(|\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}|-|\boldsymbol{x}_*|)-\\ \qquad\gamma(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}^{(k+\frac{1}{2})})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_*)), \qquad\qquad (5\mathrm{b})\end{cases}$$

基于式(5)，可建立算法 2 的收敛性定理.

3.1 A 为正定矩阵

定理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为正定矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{N}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个分裂，且 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$ 为正定矩阵. 假设 $\boldsymbol{\Omega}$ 为正对角矩阵，$\gamma>0$ 为常数，$\boldsymbol{\Phi}:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$ 为李普希兹连续函数，即存在常数 $l>0$，使得对任意 $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2\in\mathbf{R}^n$ 有 $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_1)-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_2)\|\leqslant l\|\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2\|$. 这里，$\|\cdot\|$ 为向量的任意范数. 记

$$\mu_1(\boldsymbol{\Omega})=\|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{M}_1)\|,$$
$$\eta_1(\boldsymbol{\Omega})=\|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}\boldsymbol{N}_1\|+\|l(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}\|,$$
$$\mu_2(\boldsymbol{\Omega})=\|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)^{-1}(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{M}_2)\|,$$
$$\eta_2(\boldsymbol{\Omega})=\|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)^{-1}\boldsymbol{N}_2\|+\|l(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)^{-1}\|,$$

$\tau(\boldsymbol{\Omega})=(\mu_1(\boldsymbol{\Omega})+2\eta_1(\boldsymbol{\Omega}))(\mu_2(\boldsymbol{\Omega})+2\eta_2(\boldsymbol{\Omega}))$. 如果 $\tau(\boldsymbol{\Omega})<1$，则对于任意初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，由算法 2 产生的迭代序列 $\{\boldsymbol{z}^{(k+1)}\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛于弱非线性互补问题(1)的一个解.

证明： 由于 $\boldsymbol{z}^{(k+1)}=\dfrac{|\boldsymbol{x}^{(k+1)}|+\boldsymbol{x}^{(k+1)}}{\gamma}$，只需证明由算法 2 产生的迭代序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k+1)}\}_{k=0}^{+\infty}$ 收敛即可.

由题设，$\boldsymbol{\Omega}$ 为正对角矩阵，$\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 为正定矩阵，则 $\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2$ 均为非奇异正定矩阵. 从而式(5)变为

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{x}_*=(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}\boldsymbol{N}_1(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*)+\\ \qquad(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})(|\boldsymbol{x}^{(k)}|-|\boldsymbol{x}_*|)-\\ \gamma(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}^{(k)})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_*)), \qquad\qquad (6\mathrm{a})\\ \boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}_*=(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)^{-1}\boldsymbol{N}_2(\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{x}_*)+\\ \qquad(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)^{-1}(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})(|\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}|-|\boldsymbol{x}_*|)-\\ \gamma(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)^{-1}(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}^{(k+\frac{1}{2})})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_*)), \qquad\qquad (6\mathrm{b})\end{cases}$$

在式(6a)的两边同时取任意向量范数可得：

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{x}_*\|\leqslant(\|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{M}_1)\|+\\ &2\|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}\boldsymbol{N}_1\|)\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*\|+\\ &\gamma\|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}^{(k)})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_*)\|\leqslant\\ &[\|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{M}_1)\|+2(\|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}\boldsymbol{N}_1\|\\ &+l\|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}\|)]\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*\|=\\ &(\mu_1(\boldsymbol{\Omega})+2\eta_1(\boldsymbol{\Omega}))\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*\|.\end{aligned}$$

类似地，在式(6b)两边同时取任意向量范数可得：

$$\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}_*\|\leqslant(\mu_2(\boldsymbol{\Omega})+2\eta_2(\boldsymbol{\Omega}))\|\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{x}_*\|.$$

从而

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}_*\|\leqslant(\mu_1(\boldsymbol{\Omega})+2\eta_1(\boldsymbol{\Omega}))(\mu_2(\boldsymbol{\Omega})+\\ &2\eta_2(\boldsymbol{\Omega}))\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*\|=\tau(\boldsymbol{\Omega})\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*\|.\end{aligned}$$

故当 $\tau(\boldsymbol{\Omega})<1$ 时，定理结论成立.

3.2 A 为 H_+-矩阵

假设式(1)中的向量值函数 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z})$ 满足李普希兹条件，即存在正常数 l，使得对任意的 $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2\in\mathbf{R}^n$ 有：

$$|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_1)-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_2)|\leqslant l|\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2|\tag{7}$$

成立.

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为 H_+-矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{N}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个 H-相容分裂，即

$$\langle\boldsymbol{A}\rangle=\langle\boldsymbol{M}_1\rangle-|\boldsymbol{N}_1|=\langle\boldsymbol{M}_2\rangle-|\boldsymbol{N}_2|.$$

显然，$\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$ 是 H_+-矩阵. 又 $\boldsymbol{\Omega}$ 为正对角矩阵，故 $\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2$ 亦为 H_+-矩阵，且

$$|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}|\leqslant(\boldsymbol{\Omega}+\langle\boldsymbol{M}_1\rangle)^{-1},$$
$$|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_2)^{-1}|\leqslant(\boldsymbol{\Omega}+\langle\boldsymbol{M}_2\rangle)^{-1}.$$

直接计算式(5a)可得

$$\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{x}_*=(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}[\boldsymbol{N}_1(\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*)+$$

$(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A})(|\boldsymbol{x}^{(k)}|-|\boldsymbol{x}_*|)-\gamma(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}^{(k)})-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}_*))]$.

因为 $\boldsymbol{\Phi}(z)$满足条件(7)，进而有

$$|\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{x}_*|\leqslant|(\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{M}_1)^{-1}|(|\boldsymbol{N}_1|+|\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{A}|+2l\boldsymbol{I})|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*|\leqslant(\boldsymbol{\Omega}+\langle\boldsymbol{M}_1\rangle)^{-1}(2|\boldsymbol{N}_1|+|\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{M}_1|+2l\boldsymbol{I})|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*|=\boldsymbol{T}_1|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*|,$$

其中 $\boldsymbol{T}_1:=(\boldsymbol{\Omega}+\langle\boldsymbol{M}_1\rangle)^{-1}(2|\boldsymbol{N}_1|+|\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{M}_1|+2l\boldsymbol{I})$，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵. 对式(5b)进行类似处理可得：

$$|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}_*|\leqslant(\boldsymbol{\Omega}+\langle\boldsymbol{M}_2\rangle)^{-1}(2|\boldsymbol{N}_2|+|\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{M}_2|+2l\boldsymbol{I}|)|\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{x}_*|=\boldsymbol{T}_2|\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}-\boldsymbol{x}_*|,$$

其中 $\boldsymbol{T}_2:=(\boldsymbol{\Omega}+\langle\boldsymbol{M}_2\rangle)^{-1}(2|\boldsymbol{N}_2|+|\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{M}_2|+2l\boldsymbol{I})$. 进而$|\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{x}_*|\leqslant\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}_*|$.

如果 $\rho(\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1)<1$，则算法 2 收敛. 注意到，对于某个非奇异矩阵 $\boldsymbol{V}$，有：

$$\rho(\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1)=\rho(\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{V})\leqslant\|\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{V}\|\leqslant\|\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{V}\|\cdot\|\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{V}\|.$$

采用与文献[4]类似的推导，有下列收敛定理成立.

定理 2　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$为 H_+-矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{N}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的两个 H-相容分裂. 非线性函数 $\boldsymbol{\Phi}:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$ 满足条件式(7). 假设 $\gamma>0$ 为常数，$\boldsymbol{\Omega}$ 为正对角矩阵，且

$$\boldsymbol{\Omega}\geqslant\max\{\mathrm{diag}(\boldsymbol{M}_1),\mathrm{diag}(\boldsymbol{M}_2)\}+l\boldsymbol{I},$$

其中 max 为分量取较大者，$\mathrm{diag}(\boldsymbol{M}_1)$为矩阵 $\boldsymbol{M}_1$ 的对角矩阵，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵. 则对于任意初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，由算法 2 产生的迭代序列$\{\boldsymbol{z}^{(k+1)}\}_{k=0}^{+\infty}$收敛于弱非线性互补问题(1)的一个解.

特别地，两步模系逐步超松弛迭代法的收敛结果如下：

定理 3　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$为 H_+-矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}$. 非线性函数 $\boldsymbol{\Phi}(z)$满足式(7). 假设 $\gamma>0$ 为常数，$\boldsymbol{\Omega}$ 为正对角矩阵，且 $\boldsymbol{\Omega}\geqslant\frac{1}{\omega}\boldsymbol{D}+l\boldsymbol{I}$. 则对于任意初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}$，当迭代参数 ω 满足 $0<\omega<\dfrac{2}{1+\rho(\boldsymbol{D}^{-1}|\boldsymbol{B}|)}$时，两步模系逐步超松弛迭代法产生的序列$\{\boldsymbol{z}^{(k+1)}\}_{k=0}^{+\infty}$收敛于弱非线性互补问题(1)的一个解.

注 1　由于 $\boldsymbol{A}$ 为 H_+-矩阵，有 $\rho(\boldsymbol{D}^{-1}|\boldsymbol{B}|)<1$，从而定理 3 中 ω 的上界比 1 大. 进而可知，定理 2 中的 H-相容分裂条件只是充分条件，并非必要条件. 特别地，当 $\omega=1$ 时，两步模系高斯-赛德尔迭代法也收敛.

4　数值实验

本节通过数值实验考察两步模系矩阵分裂迭代法求解一类弱非线性互补问题(1)的有效性和收敛性.

在数值实验中，初始向量取为 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，$\gamma=1$. 在 MPS 和 TMPS 迭代格式中，取$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{D}$，其他迭代格式中取 $\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{\omega}\boldsymbol{D}$，其中 ω 为松弛参数. 在松弛迭代法中，最优松弛参数取为使得迭代步数最少的值. 定义残差向量的范数(RES,记为 R_{ES})为

$$\mathrm{RES}(\boldsymbol{z}^{(k)}):=\|\min(\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}^{(k)}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{z}^{(k)}),\boldsymbol{z}^{(k)})\|_2.$$

当 $R_{\mathrm{ES}}\leqslant10^{-5}$或 k 达到最大迭代步数(取为 1 000)时，迭代终止. 所有计算均在一台 CPU 为 2.40 GHz 和内存为 4.00 GB 的机器上运行，编程语言为 Matlab.

例 1　设 m 为给定的正整数，$n=m^2$. 在式(1)中取：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S} & -\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{S} & -\boldsymbol{I} & \ddots & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{I} & \ddots & \boldsymbol{S} & \ddots & -\boldsymbol{I}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I} & -\boldsymbol{I} & \boldsymbol{S}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times n}$$

为块上三对角矩阵，其中 $\boldsymbol{S}=\mathrm{tridiag}(-1,4,-1)\in\mathbf{R}^{m\times m}$为三对角矩阵,$\boldsymbol{I}$ 为 m 阶单位矩阵,$\boldsymbol{q}=(1,-1,\cdots,(-1)^{n-1})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\Phi}(z)=(\mathrm{arc\ cot}(z_1+1),\cdots,\mathrm{arc\ cot}(z_n+1))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$.

表 1 分别列出了当 $m=512$，松弛参数 ω 在 0.7～1.4 之间变化时两种迭代法的迭代步数(IT)和迭代时间(CPU). 从表 1 中可以看出，模系松弛迭代法和两步模系松弛迭代法的最优参数(加注"＊"号)均为 1.1.

表 2 列出了 6 种迭代法的数值结果. 从表 2 中发现，两步模系矩阵分裂迭代法的迭代步数均小于模系矩阵分裂迭代法迭代步数的一半，且用时更少. 尤其是两步模系正定反对称迭代法的迭代步数远远小于模系正定反对称分裂迭代法. 另外，随着矩阵维数的增加，各迭代法的迭代步数和迭代时间均相应增加.

例 2　设 m 为给定正整数，$n=m^2$. 在式(1)中取 $\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{A}}+4\boldsymbol{I}_n$，其中 $\hat{\boldsymbol{A}}$ 的定义与例 1 中的 $\boldsymbol{A}$ 相同，$\boldsymbol{I}_n$ 为 n 阶单位矩阵. $\boldsymbol{q}=(1,-1,\cdots,(-1)^{n-1})^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Phi}(z)=(\phi(z_1),\cdots,\phi(z_n))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，其中 $\phi(z)=\begin{cases}z+1, & z\geqslant 1\\ 2z, & z\leqslant 1\end{cases}$. 易见，函数 ϕ 在 $z=1$ 处不可微，但为李普希兹连续函数.

表3分别列出了当 $m=512$ 时，两种松弛迭代法随松弛参数 ω 在 0.5～1.2 之间变化时的迭代步数和迭代时间. 数据表明，模系松弛迭代法和两步模系松弛迭代法的最优参数均为 0.8.

表1 例1的两种迭代格式的迭代步数和迭代时间随参数 ω 的变化

Tab.1 IT and CPU for two methods with the change of ω for example 1

		ω							
		0.7	0.8	0.9	1.0	1.1*	1.2	1.3	1.4
MSOR	IT	49	41	35	30	26*	39	34	44
	CPU	2.438	2.135	1.719	1.422	1.281*	1.547	1.751	2.187
TMSOR	IT	22	18	14	12	10*	10	11	12
	CPU	2.125	1.703	1.328	1.063	0.953*	0.954	1.047	1.141

表2 例1的6种迭代法的数值结果

Tab.2 Numerical results for six iteration methods for example 1

m		MPS	TMPS	MGS	TMGS	MSOR	TMSOR
512	IT	86	15	30	12	26	10
	CPU	4.344	1.428	1.422	1.063	1.281	0.953
	$R_{\mathrm{ES}}/10^{-6}$	8.93	4.64	5.84	4.07	7.25	5.16
1 024	IT	88	15	31	12	27	10
	CPU	17.565	5.610	6.350	4.654	5.724	4.030
	$R_{\mathrm{ES}}/10^{-6}$	9.38	6.66	6.71	7.17	6.47	7.44
2 048	IT	90	15	32	13	28	11
	CPU	79.973	23.237	29.308	21.048	26.472	19.533
	$R_{\mathrm{ES}}/10^{-6}$	9.93	9.49	7.65	3.24	5.84	2.76

表3 例2的两种迭代法的迭代步数和迭代时间随参数 ω 的变化

Tab.3 IT and CPU for two iteration methods with the change of ω for example 2

		ω							
		0.5	0.6	0.7	0.8*	0.9	1.0	1.1	1.2
MSOR	IT	25	19	14	10*	10	13	19	29
	CPU	1.047	0.859	0.594	0.421*	0.453	0.531	0.797	1.235
TMSOR	IT	12	9	7	4*	5	6	8	12
	CPU	0.938	0.750	0.563	0.313*	0.391	0.484	0.641	0.983

表4列出了6种迭代法的数值结果. 从表4中可以发现，两步模系矩阵分裂迭代法在迭代步数和迭代时间上均少于模系矩阵分裂迭代法，且两步模系矩阵分裂迭代法的迭代步数均少于模系矩阵分裂迭代法迭代步数的一半. 另外，随着矩阵维数的增加，各迭代法的迭代步数和迭代时间均相应增加.

表4 例2的6种迭代法的数值结果

Tab.4 Numerical results for six iteration methods for example 2

m		MPS	TMPS	MGS	TMGS	MSOR	TMSOR
512	IT	16	7	13	6	10	4
	CPU	0.625	0.516	0.509	0.449	0.414	0.312
	$R_{\mathrm{ES}}/10^{-6}$	5.31	1.34	8.84	4.48	6.27	8..89
1 024	IT	16	7	14	6	11	5
	CPU	2.687	2.235	2.154	1.770	1.861	1.623
	$R_{\mathrm{ES}}/10^{-6}$	7.51	1.89	4.48	6.32	1.98	0.279
2 048	IT	17	7	14	6	11	5
	CPU	14.142	10.923	10.781	8.892	9.551	8.735
	$R_{\mathrm{ES}}/10^{-6}$	4.49	2.69	6.33	3.24	3.88	0.416

5 结论

本文构造了求解一类弱非线性互补问题的两步模系矩阵分裂迭代法，理论上分析了当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定或 H_+-矩阵时的收敛性. 数值实验进一步验证了两步模系矩阵分裂迭代法的有效性. 数值结果表明两步模系矩阵分裂迭代法是行之有效的，且无论在迭代步数还是迭代时间上均优于模系矩阵分裂迭代法.

参考文献:

[1] Huang N, Ma C F. The modulus-based matrix splitting algorithms for a class of weakly nonlinear complementarity problems [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2016, 23(3): 558.

[2] Ferris M C, Pang J S. Engineering and economic applications of complementarity problems [J]. SIAM Review, 1997, 39(4):669.

[3] Bai Z Z. Modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2010,17(6): 917.

[4] Zhang L L. Two-step modulus-based matrix splitting iteration method for linear complementarity problems [J]. Numerical Algorithms, 2011, 57(1): 83.

[5] Li W. A general modulus-based matrix splitting method for linear complementarity problems of H-matrices [J]. Applied Mathematics Letters, 2013, 26(12): 1159.

[6] Xu W W. Modified modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2015,22(4): 748.

[7] Zheng N, Yin J F. Accelerated modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems [J]. Numerical Algorithms, 2013, 64(2): 245.

[8] Zheng N, Yin J F. Convergence of accelerated modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problem with an H_+-matrix [J]. Journal of Computational and Appllied Mathematics, 2014, 260: 281.

[9] Bai Z Z, Zhang L L. Modulus-based synchronous multisplitting iteration methods for linear complementarity problems [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2013, 20(3): 425.

[10] 甘小艇,殷俊锋,李蕊. 有限体积法定价跳扩散期权模型 [J]. 同济大学学报:自然科学版, 2016, 44(9): 1458.
GAN Xiaoting, YIN Junfeng, LI Rui. Finite volume methods for pricing jump-diffusion options model [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2016, 44(9): 1458.

[11] 张丽丽. 关于线性互补问题的模系矩阵分裂迭代方法 [J]. 计算数学, 2012, 34(4): 373.
ZHANG Lili. On modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems [J]. Mathematic Numerica Sinica, 2012, 34(4): 373.

[12] Xia Z C, Li C L. Modulus-based matrix splitting iteration methods for a class of nonlinear complementarity problem [J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 271(1): 34.

[13] Xie S L, Xu X R, Zeng J P. Two-step modulus-based matrix splitting iteration method for a class of nonlinear complementarity problems [J]. Linear Algebra and its Applications, 2016, 494(1): 1.