

# 既有空间结构位形推算的随机偏差方法

罗永峰, 刘俊

(同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

**摘要:** 根据未测节点空间位置的不确定性和随机分布特性, 提出了结构位形推算的随机偏差方法. 结合空间结构特点, 给出随机偏差方法的抽样测点选取原则和最小样本容量确定方法. 基于概率论及数理统计理论, 给出随机偏差方法的偏差分布推断方法. 引入先验信息概念, 基于贝叶斯统计理论, 给出有先验信息条件下的参数推断方法. 对实际网壳结构采用该随机偏差方法推算结构实际位形, 并进行整体稳定性分析, 结果表明基于随机偏差方法的鉴定分析结果更符合实际.

**关键词:** 空间结构; 位形推算; 随机偏差; 分布推断; 先验信息

中图分类号: TU393.3

文献标志码: A

## Stochastic Deviation Method of Reckoning Geometric Shapes of Existing Spatial Structures

LUO Yongfeng, LIU Jun

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** According to the uncertainty and the inherent randomness of un-measured nodal positions, a stochastic deviation method (SDM) was proposed to reckon the geometric shapes of existing spatial structures. In a consideration of the characteristics of spatial structures, the sampling principle and the minimum sample size calculation approach in SDM were given. Based on the probability and the statistics theory, the procedure for inferring the random fields of nodal position deviations was built. In addition, the prior information concept was introduced into SDM, and approaches for inferring the stochastic parameters with prior information were put forward based on the Bayesian statistics theory. Finally, the proposed SDM was adopted to reckon the geometric shape of reticulated shell structures, and the nonlinear static stability analysis was carried out using SDM-determined structural spatial positions. It is shown that SDM can give realistic results and be used for the appraisal of

existing spatial structures.

**Key words:** spatial structures; geometric reckoning; stochastic deviation; distribution inference; prior information

对既有空间结构进行定期或适时的检测、鉴定与维护, 是保障结构安全且正常使用的前提和必要条件<sup>[1]</sup>. 国内《高耸与复杂钢结构检测与鉴定标准》(GB 51008—2016)<sup>[2]</sup>、《钢结构检测与鉴定技术规程》(DG/TJ 08—2011—2007)<sup>[3]</sup> 和国际《Bases for design of structures—assessment of existing structures》(ISO 13822—2010)<sup>[4]</sup> 均指出, 既有结构鉴定分析采用的计算模型应是根据结构实际状况建立的二维或三维模型, 并应符合结构的实际构造和实际工作状态. 然而, 对既有空间结构的几何位形进行完全测量是不经济且没有必要的, 有时甚至是不可能的, 因而实际工程结构检测通常采用抽样测量的方法. 由于抽样测量数据只能准确描述已测节点的位置, 而未测节点的位置理论上就存在着不确定性, 因此相对于整体结构而言, 抽样测量得到的数据是不完备的. 要进行既有空间结构的鉴定验算, 就必须通过抽样测量得到的不完备数据信息进行反演推算, 从而形成结构的整体位形.

目前, 由于缺乏关于既有结构整体位形反演推算的理论成果, 实际结构工程鉴定中结构整体几何位形的确定只能采用近似方法. 常用的近似方法主要有两种: 一是完全按照结构设计的几何信息确定; 二是已测节点位置采用实际信息, 未测节点位置依然采用设计信息来建立结构几何模型. 几何缺陷对网壳结构、张弦梁结构和弦支穹顶结构等类型的空间结构整体稳定性的影响至关重要. 既有结构整体位形是客观存在的, 其缺陷具有确定的大小和分布模式, 而拟建结构的整体位形是理想化的、没有缺陷

收稿日期: 2016-08-21

基金项目: 国家自然科学基金(51678431)

第一作者: 罗永峰(1957—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为钢结构理论与施工技术. E-mail: yflu093@tongji.edu.cn

的,整体稳定性分析所考虑的缺陷通过假定的虚拟模式引入,这种假定缺陷和结构的实际缺陷可能完全不同,因而采用设计信息建模的鉴定分析结果可能与结构实际状态存在很大差异.研究表明<sup>[5-7]</sup>,存在几何缺陷的此类既有空间结构鉴定计算采用不确定性模型更为恰当.然而,如何选取测点,如何根据抽样测量样本数据扩展形成结构整体模型,目前还没有相应的理论方法,也缺乏相应的研究成果.

本文针对既有空间结构位形的反演推算方法进行的研究,提出推算未测节点位置的随机偏差方法,包括抽样测点选取、偏差分布推断和先验信息引入方法,并用实际工程案例对本文新方法进行了验证.

## 1 随机偏差方法原理

既有空间结构的实际位形往往不同于设计位形,这种位形差异主要产生于结构的施工误差和使用变形.结构使用变形导致节点位置偏离设计位置,位置偏差不具有随机分布特征,此时结构位形不能依据设计位形确定,而应通过抽样测量部分节点实际位置、再采用曲面拟合的方法推算结构位形.若结构在使用期间未发生较大变形,则节点实际位置与设计位置的偏差主要由施工误差引起.由于施工误差受安装设备、安装技术、工人技术水平等因素影响,往往具有明显的随机分布特征<sup>[8]</sup>.据此,本文针对有施工误差的既有空间结构,根据节点实际位置与设计位置偏差服从的概率分布,提出一种以设计位置为中心,推算既有空间结构实际位形的新方法,称之为随机偏差方法.

随机偏差方法假定节点位置偏差服从某种概率形式分布,然后根据抽样检测数据对这一分布形式进行拟合推断并验证,进而将其作为确定未测节点位置的依据.该方法根据节点设计位置 and 实际偏差的概率分布,建立结构鉴定分析的不确定几何模型,进而进行蒙特卡罗随机有限元分析以及结构鉴定计算分析.相对于目前常用的近似方法,本文的随机偏差方法推算结果更符合实际情况,也比曲面拟合等方法所需的测点数量更少.

如何确定节点位置偏差分布的形式和参数是随机偏差方法的关键.空间结构节点数量往往较多,且结构施工误差受诸多因素影响,目前的研究认为,节点位置偏差近似服从正态分布<sup>[9]</sup>.Chen 等<sup>[10]</sup>对深圳某单层网壳结构节点位置偏差实测数据进行绘图法分析,结果表明偏差服从正态分布.唐敢等<sup>[11]</sup>对南

通体育会展中心体育馆屋盖和六个试验模型节点位置偏差的实测数据采用假设检验方法进行分析,研究表明偏差符合 2 倍标准差范围内的截断正态分布.刘学春等<sup>[12]</sup>对 2008 年奥运会羽毛球馆弦支穹顶结构节点的位置偏差测量数据采用绘图法进行分析,结果表明竖向偏差接近正态分布,水平偏差介于正态分布和均匀分布之间.目前,概率论与数理统计理论中已有较为成熟的统计推断方法,但结构节点位置偏差分布推断尚没有系统的理论与方法,相关研究也较少<sup>[13]</sup>.此外,如何进行测点选取和引入先验信息也是随机偏差方法需要解决的理论问题.

## 2 测点选取原则

既有空间结构测点的抽样选取是应用随机偏差方法的第一个理论问题.现场测量节点的抽样数量取决于结构整体成形精度和检测成本.样本容量过小,会导致参数估计精度降低,同时未测节点数量增加也会导致几何模型可靠度降低;样本量过大,则会造成检测成本过高,确定样本容量应综合考虑几何精度和检测成本.实际结构检测鉴定中,基于经济与安全因素及要求,往往需要制定在满足可靠性分析基本要求条件下抽样数量最少的测量方案.

根据中心极限定理,无论节点实际位置与设计位置的偏差  $X$  服从何种分布,节点数量  $n$  较大时,可以近似认为偏差统计量  $J$  服从标准正态分布<sup>[14]</sup>,如下所示:

$$J = \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad (1)$$

式中: $\mu$  和  $\sigma$  分别为偏差的期望和标准差; $\bar{x}$  为测点偏差的均值.因此,置信度为  $(1-\alpha)$  的  $\mu$  双侧置信区间宽度为  $2Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , 其中  $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  为标准正态分布  $(1-\frac{\alpha}{2})$  分位数.若  $n$  越小,则置信区间宽度越大,表明统计推断精度越低.为此,本文对置信区间宽度设定上限值  $2d$ ,  $d$  可根据结构跨度及建筑重要性等因素综合确定,则由此可得节点检测抽样的最小样本容量

$$n = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \frac{\sigma^2}{d^2} \quad (2)$$

其中, $\sigma$  需要进行预估计.参数推断中,若  $\sigma$  超过某个限值  $\sigma_{cr}$ ,则认为节点偏差过大,随机偏差法不适用.因此,随机偏差法应用的前提是  $\sigma$  不超过  $\sigma_{cr}$ ,以  $\sigma_{cr}$  代入式(2)计算最小样本容量既合理又偏于安全.

节点总数  $N$  较小时,应采用无放回抽样法计算样本均值的方差,故式(2)中以  $1/\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{N}\right)$  代替  $n$ . 最小样本容量  $n$  应由下式确定:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{N} + \frac{d^2}{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 \sigma^2} \quad (3)$$

在有先验信息情况下,若先验信息提供  $\kappa_0$  个样本,则样本容量可适当减少为  $(n-\kappa_0)$ .

随机抽样原则是统计推断的前提条件,随机偏差法测点位置的选取,也必须按随机抽样法确定.若根据主观判断选取测点位置,则分布推断不可靠.由于空间结构节点数量较多,随机选取测点的另一个原则应是抽样测点分布较均匀,若抽样测点分布明显不均匀,则有理由认为测点选取不符合随机抽样原则.

### 3 偏差分布推断

#### 3.1 拟合优度检验

拟合优度检验是检验数据的分布是否与某种理论分布一致的统计方法.推断既有空间结构节点位置偏差分布时,首先必须对偏差分布形式进行拟合和拟合优度检验.偏差的分布形式可先采用绘图法直观判断,再进行  $\chi^2$  拟合优度检验.

直方图是最为直观的图形形式之一.根据节点位置偏差分布直方图与分布密度函数图的对比,可以直观判断分布形式.但是,绘制直方图存在较大随意性,尤其是窗宽的取法,如果取得不合适,直方图就容易“失真”.此外,采用直方图无法进行定量分析,不具备说服力,因此必须对偏差的分布形式进行拟合优度检验.

假设节点位置偏差  $X$  的分布函数为  $F_0(x)$ ,将样本空间划分为  $k$  组,  $p_i(\theta)$  表示偏差  $X$  落入第  $i$  组的概率,则分布可写成如下形式:

$$P(a_{i-1} < X \leq a_i) = p_i(\theta), \quad 1 \leq i \leq k \quad (4)$$

式中:  $a_i$  为分组节点;  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$  为  $r$  个未知参数.用偏差的抽样测量数据  $(x_1, \dots, x_n)$  计算得到估计量  $\hat{\theta}$  代替  $\theta$ ,以  $\xi_i$  记偏差样本落入第  $i$  组的个数,则假设检验的统计量  $\chi^2$  计算式为

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{[\xi_i - np_i(\hat{\theta})]^2}{np_i(\hat{\theta})} \quad (5)$$

如果  $n$  较大,则可以认为  $\chi^2 \sim \chi^2(k-r-1)$ ,于是假设检验的拒绝域

$$W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) | \chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2(k-r-1)\} \quad (6)$$

其中,  $\chi_{1-\alpha}^2(k-r-1)$  是  $\chi^2(k-r-1)$  分布的  $(1-\alpha)$  分

位数.

若偏差的抽样测量数据  $(x_1, \dots, x_n)$  未落入拒绝域,则认为偏差符合假设的分布,否则认为不符合.

一般假设结构节点位置某方向偏差值服从正态分布,其中参数  $\mu$  和  $\sigma$  均未知,由测量样本的均值  $\bar{x}$  和样本的标准差  $s$  分别代替.将实数轴  $(-\infty, +\infty)$  分成  $k$  组  $(a_{i-1}, a_i]$  ( $i=1, \dots, k$ ;  $a_0$  取  $-\infty$ ,  $a_k$  取  $+\infty$ ),则

$$p_i = P(a_{i-1} < X \leq a_i) = \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \bar{x}}{s}\right) \quad (7)$$

其中,  $\Phi(x)$  为标准正态分布.若  $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(k-3)$ ,则认为偏差服从正态分布,否则认为不服从.

进行  $\chi^2$  拟合优度检验测点数量不宜过少,一般要求  $n \geq 50$ ,同时要求  $np_i \geq 5$ .分组对检验也有一定影响,宜采用等概率分组,即  $p_i = k^{-1}$ ,分组数量一般取  $2n^{\frac{2}{5}}$  [15].

#### 3.2 独立性检验

节点位置不同方向的偏差是否相互独立,可通过显著性检验进行判定.设同一节点两个不同方向上的偏差  $(X, Y)$  为二维随机变量,假设  $X$  和  $Y$  相互独立.在两个维度上将实数轴分别分为  $v$  组  $(a_{i-1}, a_i]$  ( $i=1, \dots, v$ ) 和  $w$  组  $(b_{j-1}, b_j]$  ( $j=1, \dots, w$ ),则二维空间分成  $v \times w$  组,以  $\xi_{ij}$  记落入各组内的测点数量.根据  $X$  和  $Y$  相互独立,有

$$p_{ij} = P(a_{i-1} < X \leq a_i, b_{j-1} < Y \leq b_j) = P(a_{i-1} < X \leq a_i)P(b_{j-1} < Y \leq b_j) \quad (8)$$

因此,检验假设的统计量  $\chi^2$  计算式为

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^w \sum_{i=1}^v \frac{(\xi_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}} \quad (9)$$

$n$  较大时,有  $\chi^2 \sim \chi^2(m)$ ,其中  $m = (v-1-r_1)(w-1-r_2)$ ,  $r_1$  和  $r_2$  分别为两个维度分布的未知参数数量.于是假设检验的拒绝域为

$$W_1 = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) | \chi^2 > \chi_{1-\alpha}^2(m)\} \quad (10)$$

若抽样测量数据计算的结果未落入拒绝域,表明两个方向偏差不独立,否则认为相互独立.

#### 3.3 参数推断

统计推断是根据样本所提供的信息对分布的某些未知值作出推断,形式有两类:估计与检验.既有空间结构节点位置偏差分布参数未知,但由于实际节点位置是以设计位置为中心形成的随机偏差,故偏差期望应为零,可由此对相关参数作出假设并进行假设检验.为使结构鉴定偏于安全,对与节点位置偏差程度有关的参数应进行保守的区间上限估计.

若节点位置偏差服从正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则偏差期望应为零, 因此假设  $\mu=0$ . 检验假设的统计量

$$J = \sqrt{n} \frac{\bar{x}}{s} \sim t(n-1) \quad (11)$$

式中:  $t(n-1)$  为自由度是  $(n-1)$  的  $t$  分布. 于是, 显著性为  $\alpha$  情况下假设的拒绝域

$$W_1 = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \sqrt{n} \frac{|\bar{x}|}{s} > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right\} \quad (12)$$

若偏差的抽样测量数据  $(x_1, \dots, x_n)$  未落入拒绝域内, 则认为  $\mu=0$ , 否则拒绝原假设.

方差估计偏小, 往往会使既有空间结构鉴定分析偏于不安全, 为避免对节点偏差程度估计偏小, 应对正态分布方差  $\sigma^2$  进行区间估计, 将单侧置信上限作为方差的估计. 区间估计的统计量

$$J = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) \quad (13)$$

其中,  $\chi^2(n-1)$  为自由度是  $(n-1)$  的  $\chi^2$  分布.

于是, 置信水平为  $(1-\alpha)$  时  $\sigma^2$  的单侧置信上限为  $\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)}$ .

拟合优度检验结果若不能拒绝不同方向上节点偏差相互独立, 则要对相关系数进行点估计. 多元正态分布相关系数  $\Sigma_{XY}$  的点估计

$$\hat{\Sigma}_{XY} = \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2 \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}} \quad (14)$$

其中,  $\bar{x}, \bar{y}$  为不同方向测点偏差的均值.

### 3.4 随机偏差方法适用性

随机偏差方法基于实际节点位置偏差随机分布, 而偏差的随机性主要是由施工误差引起的, 如果参数  $\mu=0$  的假设被否定, 则表明节点有大范围同向偏差存在, 即结构存在较明显的使用变形, 此时, 节点实际位置不再是以设计位置为中心的随机分布, 本文的随机偏差方法不再适用.

既有空间结构在投入使用前必须通过施工验收, 施工误差不能超过规范的规定, 因此方差推断结果应满足 2 倍标准差小于施工误差限值. 根据  $2\sigma$  原则, 节点实际偏差不超过限值的概率约为 95%. 考虑实际偏差并非理想的正态分布以及结构使用期间产生的变形较小, 可适当放宽标准来确定标准差临界值  $\sigma_{cr}$ . 若方差参数推断结果  $\sigma > \sigma_{cr}$ , 则随机偏差方法同样不再适用.

如果节点位置偏差数据中出现少数异常值, 则表明结构存在局部变形. 对于局部变形区域, 节点位

置应全部通过测量得到实际数据, 而其他区域依然可采用随机偏差方法推算节点位置.

## 4 先验信息引入

对于设计信息、建造条件、使用情况等均非常相似或相同的两个结构, 后检测的结构应能将先检测结构的检测结果作为参考, 从而适当减少其测量工作量, 基于此, 本文将先验信息概念引入结构检测鉴定理论研究中. 先验信息是指在抽样之前有关统计问题的一些信息, 一般来说, 先验信息主要源于经验和历史资料. 在进行一个既有空间结构检测前, 如果已有类似结构的检测经验, 或者之前由于某些原因已对该结构的部分节点位置进行了测量并取得了数据, 则这些经验或测量数据可以作为先验信息. 这样, 在根据贝叶斯统计原理进行参数推断时, 就可适当减少样本容量.

贝叶斯统计原理将未知参数视为随机变量, 同时利用总体信息、样本信息和先验信息, 分析得到参数后验分布形式, 根据后验分布进行统计推断<sup>[16]</sup>. 由先验信息确定  $\theta$  的先验分布  $\pi(\theta)$ , 将概率密度函数视为条件密度函数  $f(x|\theta)$ , 结合样本  $(x_1, \dots, x_n)$ , 可由贝叶斯公式计算  $\theta$  的后验分布, 即

$$\pi(\theta | x_1, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)}{\int \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) d\theta} \quad (15)$$

参数推断基于后验分布, 用损失函数  $L(\theta, \delta)$  来表达参数估计值  $\delta$  与实际值  $\theta$  的差距, 将损失函数对后验分布  $\pi(\theta|x)$  的期望  $R(\delta)$  作为风险来衡量决策的优越性. 通常采用的平方损失函数为

$$L(\theta, \delta) = (\theta - \delta)^2 \quad (16)$$

若节点位置偏差服从正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu$  和  $\sigma$  均为未知参数, 联合先验分布可选用共轭先验分布——正态-倒伽玛分布, 即

$$\pi(\mu, \sigma^2) \sim N - \text{IG}(\kappa_0, \mu_0, \nu_0, \sigma_0^2) \quad (17)$$

其中,  $\kappa_0, \nu_0, \mu_0$  和  $\sigma_0^2$  分别为先验分布的样本容量、自由度、均值和方差, 由先验信息确定. 由贝叶斯公式计算得到  $(\mu, \sigma^2)$  的联合后验分布参数为  $\kappa_n, \nu_n, \mu_n$  和  $\sigma_n^2$  的正态-倒伽玛分布. 此时, 参数  $\sigma^2$  的边缘后验分布为倒伽玛分布, 即

$$\pi(\sigma^2 | x) \sim \text{IG}\left(\frac{\nu_n}{2}, \frac{\nu_n \sigma_n^2}{2}\right) \quad (18)$$

参数  $\mu$  的边缘后验分布为广义  $t$  分布, 即

$$\pi(\mu | x) \sim t(\nu_n, \mu_n, \sigma_n^2) \quad (19)$$

后验分布参数满足

$$\kappa_n = \kappa_0 + n \quad (20)$$

$$\nu_n = \nu_0 + n \quad (21)$$

$$\mu_n = \frac{\kappa_0}{\kappa_0 + n} \mu_0 + \frac{n}{\kappa_0 + n} \bar{x} \quad (22)$$

$$\nu_n \sigma_n^2 = \nu_0 \sigma_0^2 + (n - 1) s^2 + \frac{n}{\kappa_0 + n} (\mu_0 - \bar{x})^2 \quad (23)$$

式中:  $\kappa_0$  表达先验信息容量, 相当于“ $\kappa_0$  个测点”; 后验样本容量  $\kappa_n$  即为先验信息和样本信息的“总测点数量”; 后验均值  $\mu_n$  为先验均值  $\mu_0$  和样本均值  $\bar{x}$  的加权平均, 权为先验信息和样本信息的测点数量; 后验自由度  $\nu_n$  是先验自由度  $\nu_0$  与样本数量  $n$  的和; 后验平方和  $\nu_n \sigma_n^2$  是由先验平方和  $\nu_0 \sigma_0^2$ 、样本平方和  $(n - 1) s^2$  与样本均值  $\bar{x}$  和先验均值  $\mu_0$  之差平方相加得到。

事实上, 贝叶斯统计原理在采用后验分布进行统计推断时, 先采用先验信息和样本信息的综合分析, 因此在有先验信息的情况下, 节点偏差分布参数推断可以适当减少测点数量。

同样, 节点位置偏差期望应为零, 即  $\mu = 0$ 。采用平方损失函数计算  $\mu$  的估计值  $\delta = 0$  的后验风险

$$R(\delta = 0 | x) = \int (\mu - \delta)^2 \pi(\mu | x) d\mu = E(\mu^2 | x) \quad (24)$$

当最小后验风险 ( $\delta$  取  $E(\mu | x)$  时的后验风险) 与  $R(\delta = 0 | x)$  的比值高于某个限值时, 则认为参数  $\mu = 0$ , 否则不认为。

方差估计同样采用区间估计法, 用单侧置信上限作为方差的估计值。置信水平为  $(1 - \alpha)$  时,  $\sigma^2$  的单侧置信上限为  $I\Gamma_{1-\alpha} \left( \frac{\nu_n}{2}, \frac{\nu_n \sigma_n^2}{2} \right)$ ,  $I\Gamma_{1-\alpha} \left( \frac{\nu_n}{2}, \frac{\nu_n \sigma_n^2}{2} \right)$  是倒伽马分布的  $(1 - \alpha)$  分位数。

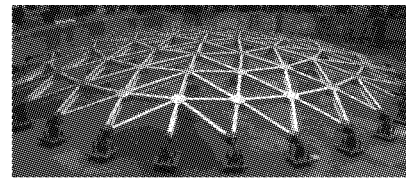
## 5 案例分析一

### 5.1 结构信息

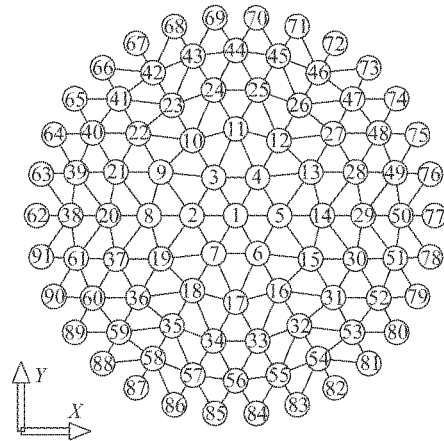
既有单层铝合金网壳模型跨度为 8 m, 矢高为 0.5 m, 体系为五环 K6 型, 共 91 个节点 (30 个支座节点), 如图 1 所示。杆件截面均为 H100 mm × 50 mm × 4 mm × 5 mm, 材料均采用 6063-T5 铝合金, 非支座节点均为板式节点, 支座为铰接支座。

### 5.2 偏差分布推断

本算例忽略测量误差, 假定不同节点同一方向上位置偏差同分布。由于模型制作误差较大, 因而标



a 实际模型



b 节点编号

图 1 单层网壳模型

Fig. 1 Single-layer lattice shell model

准差临界值  $\sigma_{cr}$  按偏差限值取跨度的 1/300, 且适当放宽为 16 mm。置信度  $(1 - \alpha)$  取 95%, 置信区间宽度限值  $d = 5$  mm, 计算得样本数为 41。

采用 Matlab 软件随机生成 41 个节点编号, 测得的实际节点坐标与设计坐标偏差见表 1。

绘制三个方向节点位置偏差频率分布直方图如图 2 所示。由图可直观判断出, 节点位置各方向偏差均服从正态分布。对分布形式进行拟合优度检验, 结果如表 2 所示。三个方向检验结果均未落入拒绝域, 因此可认为各方向偏差均服从正态分布。

参数  $\mu = 0$  的假设检验结果见表 3, 结果均未落入拒绝域, 说明各方向均可认为偏差期望为零。方差  $\sigma^2$  的推断结果见表 4, 标准差  $\sigma$  及与跨度  $L$  比值也列于表 4,  $\sigma$  均小于临界值  $\sigma_{cr}$ 。因此, 可采用随机偏差方法推算未测节点位置。对不同方向偏差独立性进行检验, 将样本空间等分成  $4 \times 4 = 16$  组, 结果见表 5, 节点各方向偏差不独立。但本案例测点数量较少, 每组理论频数  $np_{ij}$  仅为 2.56, 可靠度较低; 相关系数估计结果 (见表 5) 较小, 表明相关性较弱, 因此可忽略各方向偏差的相关性。

三个方向偏差分布分别为  $X \sim N(0, 14.96^2)$ 、 $Y \sim N(0, 13.44^2)$ 、 $Z \sim N(0, 3.81^2)$ , 不考虑各方向偏差相关性, 可以将此作为未测节点实际位置与设计位置偏差的概率分布。

表 1 节点位置各方向偏差

Tab.1 Deviations of nodal position in each direction

节点号	偏差值/mm			节点号	偏差值/mm			节点号	偏差值/mm		
	X 向	Y 向	Z 向		X 向	Y 向	Z 向		X 向	Y 向	Z 向
1	-0.10	-0.60	2.25	35	-7.33	-0.84	-2.39	72	26.10	10.35	0.55
2	-1.90	2.30	10.93	36	-6.56	-0.91	-1.79	73	19.64	9.94	1.15
4	1.95	-1.41	2.23	39	-1.10	-1.06	1.68	76	12.57	16.96	2.05
6	3.55	-1.71	5.73	43	13.54	-4.70	0.18	78	2.17	23.34	2.75
7	-1.45	-1.49	2.43	50	4.40	14.00	-1.82	79	1.08	17.03	-0.35
9	-2.55	-1.89	3.83	53	-10.86	13.34	0.98	80	-5.07	24.21	-0.85
13	-0.10	-4.38	3.86	54	-21.80	7.13	4.08	83	-22.87	12.20	2.05
15	3.90	-2.56	2.06	55	-15.14	8.30	-0.92	84	-9.15	5.14	1.95
18	2.70	0.62	4.76	57	-15.16	5.50	-1.02	85	-12.85	3.64	4.75
19	-1.50	0.28	0.86	59	-9.84	-6.96	-0.72	86	-11.13	-0.80	5.75
25	8.34	-1.30	-0.79	61	-31.10	-8.34	-7.52	88	-12.94	-9.64	2.25
26	9.03	2.34	-1.39	66	3.77	-24.56	-2.55	90	-14.78	-9.77	-0.25
28	6.49	7.99	0.61	68	16.07	-18.30	-3.35	91	-20.27	-26.16	-0.45
34	-7.44	1.10	-2.19	70	14.45	-12.14	0.15				

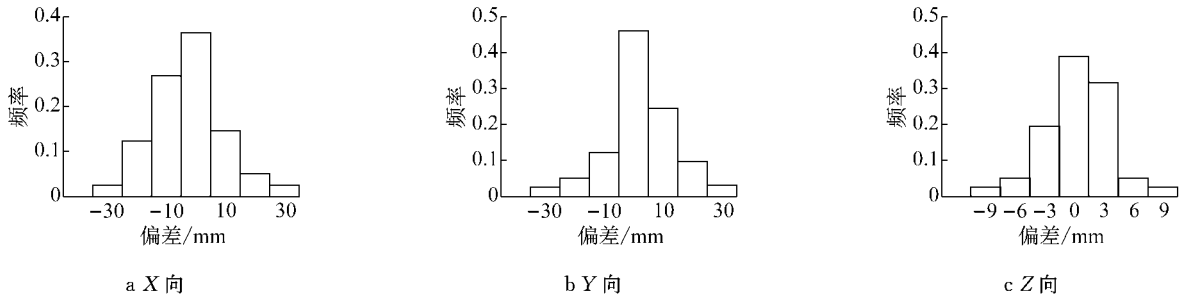


图 2 偏差分布直方图

Fig.2 Deviation distribution histograms

表 2 拟合优度检验结果

Tab.2 Results of goodness-of-fit tests

方向	$\chi^2$ 值	$\chi_{0.95}^{2(6)}$
X 向	1.366	12.592
Y 向	11.463	12.592
Z 向	8.854	12.592

表 5 独立性检验结果

Tab.5 Results of independence tests

方向	$\chi^2$ 值	$\chi_{0.95}^{2(1)}$	相关系数 $\Sigma$
X 向和 Y 向	31.976	3.841	0.089
Y 向和 Z 向	16.366	3.841	0.191
Z 向和 X 向	12.463	3.841	0.068

表 3 期望假设检验结果

Tab.3 Results of hypothesis tests of expectations

方向	J 值	$t_{0.975(40)}$
X 向	1.195	2.021
Y 向	0.659	2.021
Z 向	1.063	2.021

表 6 先验分布与后验分布参数

Tab.6 Parameters of prior distribution parameter and posterior distribution

方向	先验分布			
	$\kappa_0$	$\mu_0$	$\sigma_0^2$	$\nu_0$
X 向	10	0.37	96.73	9
Y 向	10	2.49	18.98	9
Z 向	10	1.65	14.19	9
方向	后验分布			
	$\kappa_n$	$\mu_n$	$\sigma_n^2$	$\nu_n$
X 向	41	-2.27	148.41	40
Y 向	41	1.13	119.79	40
Z 向	41	0.51	9.60	40

表 4 方差推断结果

Tab.4 Results of inference of variances

方向	方差 $\sigma^2$	标准差 $\sigma$	$\sigma/L$
X 向	223.94	14.96	1/535
Y 向	180.75	13.44	1/595
Z 向	14.48	3.81	1/2 102

5.3 先验信息引入

本例选取 10 个节点位置信息作为测量前已经得到的先验信息,另外 31 个节点位置信息作为样本信息,先验和后验分布参数见表 6.

参数  $\mu$  的估计值  $\delta=0$  时后验风险见表 7. 最小后验风险及风险比值同样列于表 7 中,风险比值均高于 95%,表明接受  $\mu=0$  风险足够小,此结果与 5.2 节假设检验结果一致. 方差推断结果见表 8,与 5.2

节结果一致.将 10 个实际节点位置数据作为先验信息时,参数推断结果一致是合理的.

表 7 后验期望假设检验结果  
Tab.7 Results of hypothesis tests of posterior expectations

方向	后验风险 $R$	最小后验风险	风险比值/%
X 向	161.39	156.22	96.8
Y 向	127.36	126.09	99.0
Z 向	10.36	10.10	97.5

表 8 后验方差推断结果

Tab.8 Results of inference of posterior variances

方向	方差 $\sigma^2$
X 向	223.94
Y 向	180.75
Z 向	14.48

### 5.4 结构鉴定分析

以结构实际整体稳定承载力为例进行鉴定分析,采用有限元软件 Ansys 进行建模计算.杆件选用 Beam188 单元模拟,材料选用铝合金非线性模型,非支座节点为刚接节点,支座为固定铰支座.荷载为满跨均布  $0.3 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$  恒载和半跨均布  $0.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$  活载,荷载组合为(1.0 恒+1.0 活).

利用 Ansys 软件概率设计(PDS)模块进行蒙特卡罗随机有限元分析,未测节点以设计节点为中心,偏差分布依据 5.2 节结果.1 000 次随机输入的概率分析计算结果如图 3 所示,具有 95%可靠度的整体稳定荷载因子为 17.73.未测节点按设计坐标输入,按设计规范进行一致缺陷模态法分析得到的荷载因子为 15.22;最大缺陷取  $L/300$  按随机缺陷模态法进行整体稳定性分析,1 000 次计算得到具有 95%可靠度的整体稳定因子为 16.04.对所有节点位置全部测量,建立完全符合实际的几何模型,计算得到整体稳定性荷载因子为 18.26.同样偏于安全的情况下,显然随机偏差方法结果更符合结构实际状态.

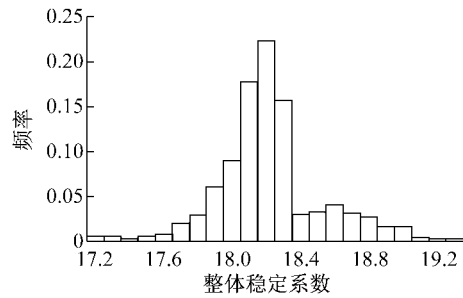


图 3 整体稳定系数频率分布直方图

Fig.3 Frequency histogram of overall stability factors

## 6 案例分析二

既有单层网壳模型跨度为 3.6 m,矢高为 0.9 m,体系为五环 K6 型,共 91 个节点(30 个支座节点),如图 4 所示.杆件截面均为  $\phi 6 \times 1$ ,焊接球半径为 70 mm,材料均为 Q235 钢,节点均为刚接节点,支座为刚接支座.

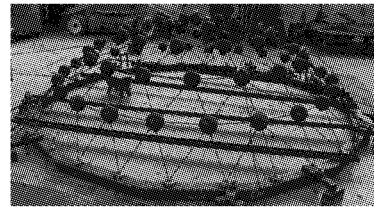


图 4 单层网壳模型(案例 2)

Fig.4 Single-layer lattice shell model(case 2)

本算例忽略测量误差,标准差临界值  $\sigma_{\alpha}$  取为 12 mm,计算得样本数量为 22.随机选取节点,由偏差分布直方图(见图 5)和拟合优度检验结果(见表 9)可以判断偏差服从正态分布.参数  $\mu=0$  的假设检验结果见表 10,方差  $\sigma^2$  的推断结果见表 11.忽略各方向偏差的相关性,得到不同方向偏差分布分别为  $X \sim N(0, 3.50^2)$ 、 $Y \sim N(0, 3.92^2)$ 、 $Z \sim N(0, 3.86^2)$ ,以此作为未测节点位置偏差的概率分布.

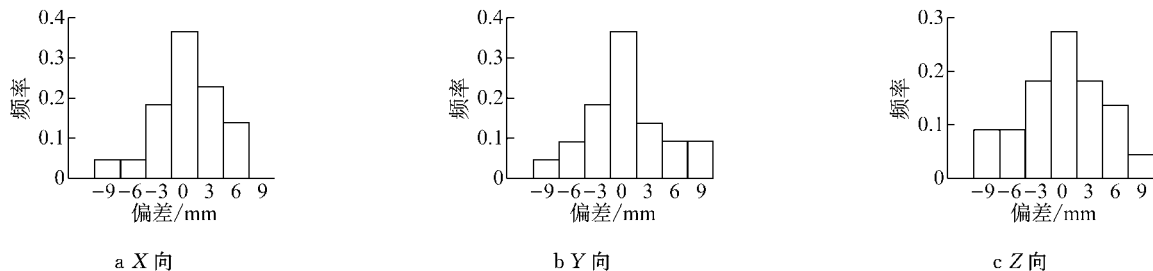


图 5 偏差分布直方图(案例 2)

Fig.5 Deviation distribution histograms(case 2)

表 9 拟合优度检验结果(案例 2)

Tab.9 Results of goodness-of-fit tests(case 2)

方向	$\chi^2$ 值	$\chi_{0.95}^2(4)$
X 向	6.001	9.488
Y 向	4.727	9.488
Z 向	1.461	9.488

表 10 期望假设检验结果(案例 2)

Tab.10 Results of hypothesis tests of expectations(case 2)

方向	J 值	$t_{0.975}(21)$
X 向	0.157	2.080
Y 向	0.667	2.080
Z 向	0.150	2.080

表 11 方差推断结果(案例 2)

Tab.11 Results of inference of variances(case 2)

方向	方差 $\sigma^2$	标准差 $\sigma$	$\sigma/L$
X 向	12.246	3.499	1/1 028
Y 向	15.387	3.923	1/918
Z 向	14.902	3.861	1/932

以结构实际整体稳定承载力为例进行鉴定分析。模型中考虑焊接球为节点刚域,荷载为满跨均布  $0.3 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$  恒载和半跨均布  $0.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-2}$  活载,荷载组合为(1.0 恒+1.0 活)。利用 Ansys 软件 PDS 模块进行蒙特卡罗随机有限元分析,1 000 次随机输入的概率分析计算结果如图 6 所示,具有 95% 可靠度的整体稳定荷载因子为 1.495。未测节点按设计坐标输入,按设计规范进行一致缺陷模态法分析得到的荷载因子为 1.303;按随机缺陷模态法进行整体稳定性分析,计算得到具有 95% 可靠度的整体稳定因子为 1.408。节点位置全部采用实测数据建立几何模型,计算得到整体稳定性荷载因子为 1.606。因此,同样偏于安全的情况下,随机偏差方法结果更符合结构实际状态。

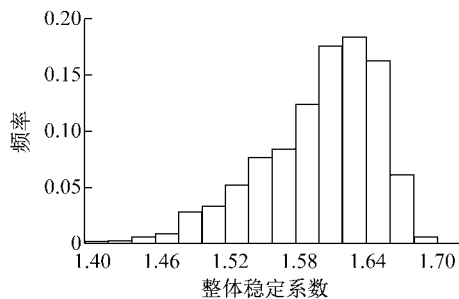


图 6 整体稳定系数频率分布直方图(案例 2)

Fig.6 Frequency histogram of overall stability factors(case 2)

## 7 结论

(1) 基于未测节点的不确定性和随机分布特

性,提出了既有空间结构实际位形反演推算的随机偏差方法,根据已测节点数据推断未测节点位置偏差分布,由此建立不确定几何模型。算例分析表明,本文基于随机偏差方法的鉴定分析结果更符合结构实际状态。

(2) 结合既有空间结构特点,给出随机偏差方法的测点选取原则和最小样本容量的确定方法。

(3) 基于概率论和数理统计理论,给出适用于既有空间结构节点位置偏差的分布推断方法,包括拟合优度检验、独立性检验和参数推断方法。对偏差分布进行期望为零的假设检验,对方差用单侧置信上限值估计,根据参数推断结果判断随机偏差方法适用性。

(4) 将先验信息概念引入既有结构鉴定分析理论中,基于贝叶斯统计理论,给出适用于节点偏差分布的参数推断方法。在具有先验信息的情况下,可适当减少测点数量。

(5) 用实际案例验证了随机偏差方法的可行性与合理性。

## 参考文献:

- [1] 罗永峰. 国家标准《高耸与复杂钢结构检测与鉴定技术标准》编制简介[J]. 钢结构, 2014, 29(4):44.  
LUO Yongfeng. Brief introduction of composition of technical standard for inspection and appraisal of high-rising and complex steel structures[J]. Steel Construction, 2014, 29(4):44.
- [2] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 高耸与复杂钢结构检测与鉴定标准:GB 51008—2016 [S]. 北京: 中国计划出版社, 2016.  
Ministry of Housing and Urban-Rural Construction of the People's Republic of China. Technical standard for inspection and appraisal of high-rising and complex steel structures; GB 51008—2016 [S]. Beijing: China Planning Press, 2016.
- [3] 上海市建设和交通委员会. 钢结构检测与鉴定技术规程:DG/TJ 08—2011—2007 [S]. 上海: 上海市建筑建材业市场管理总站, 2007.  
Shanghai Municipal Construction and Transportation Commission. Technical specification for inspection and appraisal of steel structure of Shanghai: DG/TJ 08—2011—2007 [S]. Shanghai: Shanghai Building Materials Market Management Center, 2007.
- [4] ISO Technical Committee. Bases for design of structures—assessment of existing structures: ISO 13822—2010 [S]. Geneva: International Organization for Standardization, 2010.
- [5] 罗立胜, 罗永峰, 郭小农. 考虑节点几何位置偏差的既有网壳结构稳定计算方法[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2013, 40(3):26.

(下转第 813 页)