

# 随机波动率模型下基于精确模拟算法的期权计算理论

马俊美<sup>1,2,3</sup>, 杨宇婷<sup>1</sup>, 顾桂定<sup>1</sup>, 徐承龙<sup>1</sup>

(1. 上海财经大学 数学学院, 上海 200433; 2. 应用数学福建省高校重点实验室(莆田学院), 福建 莆田 351100;

3. 上海市金融信息技术研究重点实验室, 上海 200433)

**摘要:** 基于两类随机波动率模型研究了欧式期权的价格和敏感性估计问题. 在 Broadie 和 Kaya 的精确模拟算法基础上, 讨论了舍取抽样技术在精确模拟算法中的有效应用. 在此基础上研究条件蒙特卡罗、对偶变量技术等方差减小技术在欧式期权定价和敏感性 Greeks 计算中的加速问题. 数值结果表明, 相比欧拉离散和原始的蒙特卡罗模拟算法, 基于精确模拟算法的条件蒙特卡罗加速技术能得到无偏且方差更小的估计值, 具有较好的误差减小效果. 该算法可以很方便地解决其他更加复杂的金融产品的计算问题, 如障碍期权的定价和敏感性估计问题、篮子期权的计算问题等.

**关键词:** 随机波动率; 精确模拟; 加速; 条件蒙特卡罗; Greeks

**中图分类号:** F830.9; O211.5

**文献标志码:** A

## Calculation of Options Using Stochastic Volatility Models Based on Exact Simulation

MA Junmei<sup>1,2,3</sup>, YANG Yuting<sup>1</sup>, GU Guiding<sup>1</sup>, XU Chenglong<sup>1</sup>

(1. Mathematical School, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China; 2. Key Laboratory of Applied Mathematics (Putian University), Fujian Province University, Putian 351100, China; 3. Shanghai Key Laboratory of Financial Information Technology, Shanghai 200433, China)

**Abstract:** This paper researched the estimation of price and Greeks of European options on the two kinds of stochastic volatility models. Rejection sampling technique was discussed in detail to improve the sampling efficiency based on the exact simulation algorithm of stochastic volatility models of Broadie and Kaya. Then conditional Monte Carlo and antithetic variable techniques were used to reduce the variance of Monte Carlo simulation. The numerical results show that the combination of exact simulation and conditional Monte Carlo method can get unbiased estimation and smaller variance,

compared with the crude Monte Carlo and Euler discretization. The algorithm proposed in this paper can also be used to solve the calculation problems of other more sophisticated products, such as the estimation of the price and Greeks for barrier options and basket options.

**Key words:** stochastic volatility; exact simulation; acceleration; conditional Monte Carlo; Greeks

自 1973 年 Black 和 Scholes 给出了著名的期权定价公式, 金融衍生品的定价问题就成为金融数学的核心研究内容. Black-Scholes (BS) 模型将衍生证券的价格表示为标的资产价格的函数. BS 模型简单且易于计算, 但股价波动率为常数的假设, 与实际市场不一致, 波动率的微笑曲线验证了这一点. 因此, 很多学者致力于改进 BS 模型, 随机波动率模型 (SV) 就是其中一类, 即将股价波动率设为另一个随机过程. 随机波动率的概念最先由 Hull 等<sup>[1]</sup>提出, 之后由 Stein 等<sup>[2]</sup>以及 Heston<sup>[3]</sup>对其研究工作做了进一步拓展, 提出了不同的随机波动率模型.

期权是金融市场中常见的衍生产品, 它是一类金融合同, 给予了投资者在未来某一时间以约定好的价格买进或者卖出某一标的资产的权利.

随着金融衍生品市场的发展, 金融产品种类越来越多样化, 结构越来越复杂. 随机波动率模型下, 大部分金融产品的价格解析解无法求解, 需要借助数值方法来求解. 在众多的金融衍生品种, 期权的计算理论更为基础和根本, 很多金融产品的计算研究都以欧式期权为参考<sup>[4]</sup>. 本文主要研究两类随机波动率模型下, 基于精确模拟的抽样算法的期权定价及敏感性估计的加速模拟理论. 本文以欧式期权的计算为例, 文中算法理论可以进一步应用到其他更为复杂的金融产品的计算研究中.

收稿日期: 2017-02-21

基金项目: 国家自然科学基金(11271243, 11371105, 11671246); 上海市优秀青年基金(ZZCD12007); 应用数学福建省高校重点实验室(莆田学院)开放课题(SX201704)

第一作者: 马俊美(1983—), 女, 讲师, 理学博士, 主要研究方向为金融数学与计算. E-mail: ma.junmei@mail.shufe.edu.cn

## 1 蒙特卡罗模拟方法

蒙特卡罗方法以概率论和统计理论为基础,利用随机数来解决实际问题.蒙特卡罗方法在解决实际问题时,先建立一个随机模型,使模型的变量等于所求问题的解,然后通过对变量进行模拟以计算模拟变量的统计特征,最后给出模型的近似解,也就得到了原问题的近似解,其模拟精度可以用估计值的标准误差来衡量.大数定律保证了随着模拟次数的增加,估计值将趋近于正确的值.中心极限定理提供了对于有限次数模拟的误差界限的估计.

设随机变量  $X$ , 其函数  $g(X)$  的数学期望为

$$G = E(g) = \int g(x) dF(x) \quad (1)$$

式中:  $F(x)$  为随机变量的分布函数. 根据随机变量  $X$  的分布对其进行抽样模拟, 产生  $X$  的简单子样, 用相应统计量  $g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_n)$  的算术平均值

$$G_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(x_i) \quad (2)$$

作为  $G$  的近似估计值.  $G_n$  依概率收敛于所要求的值  $G$ , 即对  $\forall \epsilon > 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|G_n - G| < \epsilon) = 1 \quad (3)$$

且有如下近似等式:

$$P\left(|G_n - G| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \lambda_\alpha\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha \quad (4)$$

式中:  $\sigma$  称为模拟量  $G$  的标准差;  $\alpha$  称为显著水平;  $\lambda_\alpha$  是与显著水平  $\alpha$  对应的正态差.

不等式

$$|G_n - G| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \lambda_\alpha \quad (5)$$

近似地以概率  $1 - \alpha$  成立.

如果  $\sigma \geq 0$ , 则 Monte Carlo 方法的误差  $\epsilon$  为

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \lambda_\alpha \quad (6)$$

由式(6)可以看出,  $\sigma$  和  $n$  决定了蒙特卡罗方法的误差  $\epsilon$ . 该误差形式  $\sigma/\sqrt{n}$  是蒙特卡罗方法的主要特点. 在不改变  $\sigma$  的情况下, 要想提高一位数字的精确度, 必须要将  $n$  提高 100 倍, 极大地增加了计算工作量. 然而从另一角度来看, 如果使  $\sigma$  减小 10 倍, 就可以减少 100 倍的工作量.

为提高蒙特卡罗方法的模拟效率, 很多学者提出了各种不同的方差减小技术<sup>[5]</sup>, 如控制变量技术<sup>[6]</sup>、重要抽样技术、条件蒙特卡罗、分层抽样算法等, 本文主要采用条件蒙特卡罗加速技术的思想.

条件蒙特卡罗主要原理是条件方差公式. 计算随机变量  $V$  的期望, 对一个任意的随机变量  $H$ ,  $E[V|H]$  表示在给定条件  $H$  下  $V$  的条件期望, 这是一个关于  $H$  的随机变量, 双期望公式为

$$E[V] = E[E[V|H]] \quad (7)$$

条件方差公式

$$\text{var}(V) = \text{var}(E[V|H]) + E[\text{var}(V|H)] \quad (8)$$

因为  $E[\text{var}(V|H)] \geq 0$ , 有

$$\text{var}(V) \geq \text{var}(E[V|H]) \quad (9)$$

可见随机变量  $E[V|H]$  的方差比原来随机变量  $V$  的方差小, 从而在已知精确值  $E[V|H]$  的情形下达到了方差减小的目的.

使用条件蒙特卡罗方法可以提高在随机波动率模型下的模拟效率. 以波动率为条件对价格进行模拟, 使得问题的维度降低, 从而提高精度. 该方法能很好地适用于对于确定波动率下有解析解的路径依赖的期权的计算.

## 2 随机波动率模型及精确模拟算法

本节讨论两类随机波动率模型, 分别是无跳的随机波动率模型(SV)和带跳的随机波动率模型(SVCJ)及其精确模拟算法. SV模型描述的是连续时间下标的资产价格与瞬时方差率的动态变化过程, 但计算机无法直接模拟出连续时间的动态变化, 需要先将连续时间离散化为离散时间. 欧拉离散方法是普遍使用的离散方法, 它可以近似估计出离散时间点股价和方差过程的路径, 但欧拉离散常会带来偏差(bias), 有时候达到不能忽略的程度<sup>[5,7]</sup>. 所以, 在研究蒙特卡罗的加速模拟技术的同时, 需要研究标的过程的精确模拟算法.

为进一步提高精确抽样的效率, 本文在 Broadie 和 Kaya<sup>[7-8]</sup>的精确模拟方法的基础上, 研究了舍取抽样技术<sup>[9]</sup>及其参数的确定问题, 讨论了无跳 SV 和双跳 SVCJ 两类随机波动率模型的精确模拟算法, 考察了几种方差减小技术在欧式期权定价中的应用.

### 2.1 SV 模型下期权的加速模拟算法

#### 2.1.1 SV 模型介绍

Heston Model 是由 Steven Heston 于 1993 年

提出的描述随机波动率下标的资产动态过程的数学模型<sup>[3]</sup>. 在风险中性测度下,它假设标的资产  $S_t$  与瞬时方差率  $V_t$  满足以下随机微分方程模型:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t [\rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{(2)}] \quad (1)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} \quad (2)$$

方程(1)刻画了标的资产的动态变化,其中  $S_t$  表示  $t$  时刻的标的资产价格; $r$  表示风险中性漂移率; $\sqrt{V_t}$  表示波动率;方程(2)刻画了瞬时方差率  $V_t$  的动态变化,其中  $\theta$  表示长期均方差; $\kappa$  表示方差回归速度; $\sigma_v$  是这个方差过程对应的波动率; $W_t^{(1)}$  与  $W_t^{(2)}$  是两个独立的布朗运动; $\rho$  表示回报过程与波动率过程间的相关系数.

当时间  $u < s < t$ , 标的资产价格  $S_u$  与瞬时方差率  $V_u$  已知时, 方程(1)、(2)可采用下列欧拉形式离散:

$$S_t = S_u \exp \left[ r(t-u) - \frac{1}{2} \int_u^t V_s ds + \rho \int_u^t \sqrt{V_s} dW_s^{(1)} \right] \cdot \exp \left[ \sqrt{1-\rho^2} \int_u^t \sqrt{V_s} dW_s^{(2)} \right] \quad (3)$$

$$V_t = V_u + \kappa\theta(t-u) - \kappa \int_u^t V_s ds + \sigma_v \int_u^t \sqrt{V_s} dW_s^{(1)} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Phi(a) = E \left[ \exp \left( ia \int_{t_i}^{t_j} V_s ds \right) \mid V_{t_i}, V_{t_j} \right] &= \frac{\gamma(a) \exp \left( -0.5(\gamma(a) - \kappa)(t_j - t_i) \right) (1 - \exp \left( -\kappa(t_j - t_i) \right))}{\kappa(1 - \exp \left( -\gamma(a)(t_j - t_i) \right))} \cdot \\ &\exp \left\{ \frac{V_{t_i} + V_{t_j}}{\sigma_v^2} \left[ \frac{\kappa(1 + \exp \left( -\kappa(t_j - t_i) \right))}{1 - \exp \left( -\kappa(t_j - t_i) \right)} - \frac{\gamma(a)(1 + \exp \left( -\gamma(a)(t_j - t_i) \right))}{1 - \exp \left( -\gamma(a)(t_j - t_i) \right)} \right] \right\} \cdot \\ &\frac{I_{0.5d-1} \left[ \sqrt{V_{t_i} V_{t_j}} \frac{4\gamma(a) \exp \left( -0.5\gamma(a)(t_j - t_i) \right)}{\sigma_v^2 (1 - \exp \left( -\gamma(a)(t_j - t_i) \right))} \right]}{I_{0.5d-1} \left[ \sqrt{V_u V_t} \frac{4\kappa \exp \left( -0.5\kappa(t-u) \right)}{\sigma_v^2 (1 - \exp \left( -\kappa(t-u) \right))} \right]} \end{aligned}$$

其中  $\gamma(a) = \sqrt{\kappa^2 - 2\sigma_v ia}$ ,  $I_\nu(x)$  是第一类修正贝塞尔函数.

假设在已知  $V_{t_i}$  和  $V_{t_j}$  的情况下, 随机变量  $V(t_i, t_j)$  和  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  同分布, 那么利用傅里叶展开可以由条件特征函数  $\Phi(a)$  求解出  $V(t_i, t_j)$  的累积分布函数  $F(x)$  和密度函数  $f(x)$ <sup>[7]</sup>.

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv P(V(u, t) \leq x) = \\ &\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{u} \operatorname{Re}[\Phi(a)] da \\ f(x) &\equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(ux) \operatorname{Re}[\Phi(a)] da \end{aligned}$$

分布函数  $F(x)$  和密度函数  $f(x)$  形式复杂, 采取直接抽样技术不容易操作, 本文讨论舍取抽样技术<sup>[9]</sup> 及该技术中参数的选取问题, 以提高抽样效率.

注意密度函数  $f(x)$  是关于 0 到无穷区域的积

### 2.1.2 SV 模型与精确模拟算法

Broadie 和 Kaya 提出的精确模拟法<sup>[7-8]</sup> 是一种无偏差方法, 旨在将原随机过程根据它的精确分布模拟抽样, 以消除将连续时间离散化带来的偏差. 划分时间  $0 = t_0 < \dots < t_m = T, 0 \leq i < j \leq m$ , 考虑时间区间  $[t_i, t_j]$ . SV 模型下精确模拟的具体步骤为:

步骤 1 根据  $V_{t_i}$ , 从  $V_{t_j}$  的分布中生成抽样.

1985 年 Cox 提出, 当  $V_{t_i} (t_i < t_j)$  已知时,  $V_{t_j}$  符合非中心卡方分布, 可表示为

$$V_{t_j} = \frac{\sigma_v^2 (1 - \exp \left( -\kappa(t_j - t_i) \right))}{4\kappa} \cdot \chi_d^2 \left( \frac{4\kappa \exp \left( -\kappa(t_j - t_i) \right)}{\sigma_v^2 (1 - \exp \left( -\kappa(t_j - t_i) \right))} V_u \right) \quad (5)$$

其中  $\chi_d^2(\lambda)$  表示自由度为  $d$ , 非中心参数为  $\lambda$  的非中心卡方分布随机变量, 其抽样过程可参考文献 [1-8].

步骤 2 根据  $V_{t_i}$  和  $V_{t_j}$ , 从  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  分布中抽样.

当抽样出  $V_{t_j}$  后, 可以根据  $V_{t_i}$  和  $V_{t_j}$  抽样出  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$ , Broadie 和 Kaya 通过拉普拉斯变换得到  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  的条件特征函数  $\Phi(a)$ <sup>[7]</sup>.

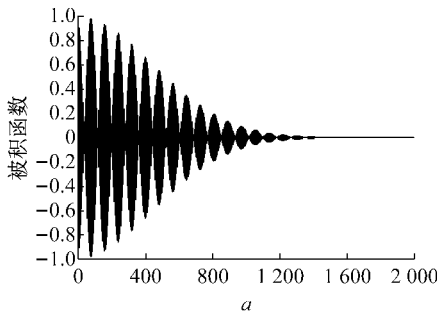
分, 在 Matlab 中, 它无法直接求解, 可以利用梯形公式化为有限区间上的积分. 为了有效使用梯形公式, 先使用 Matlab 绘制出被积函数  $p(x) \equiv \frac{2}{\pi} \cdot \cos(ux) \operatorname{Re}[\Phi(a)]$  与变量  $a$  的图像, 其中  $S_0 = 100$ ;  $r = 0.05$ ;  $V_0 = 0.015$ ;  $\kappa = 2$ ;  $\theta = 0.01$ ;  $\sigma = 0.05$ ;  $\rho = -0.75$ , 见图 1.

由图 1 可以看出, 选取的积分区间与  $T$  有关. 此外  $\kappa, V_0$  等初始量也会影响积分区间的选择. 因此对于不同的初始值要考虑选取合适的积分区域. 在计算机模拟时, 可以利用梯形公式计算有限区间上这个积分的值近似得到密度函数, 但需要特别注意对积分区间的划分.

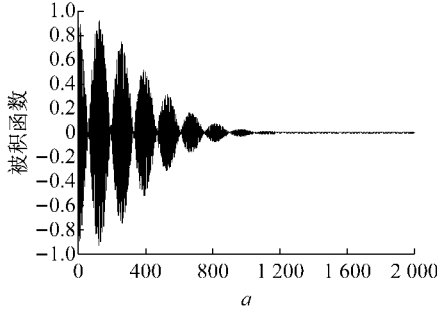
由梯形公式得到  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  的密度函数  $f(x)$  后,

使用舍取抽样技术抽取符合  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  分布的样本点, 步骤如下:

- (1) 选择合适的密度函数  $g(x)$ , 使对于所有常数  $c > 1, f(x) < cg(x)$  成立.
- (2) 从  $g(x)$  中抽样出  $x$ , 并从均匀分布  $U \sim (0, 1)$  中抽样出  $u$ .
- (3) 检查  $u < \frac{f(x)}{cg(x)}$  是否成立. 如果不等式成立, 接受  $x$  作为  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  的抽样; 如果不等式不成立, 拒绝  $x$  并重复以上过程.



a  $T=0.25$



b  $T=2.00$

图 1 被积函数  $p(x)$  与变量  $a$  的关系  
Fig. 1 Integrand  $p(x)$  versus variable  $a$

为选取合适的  $g(x)$ , 先绘制出  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  密度函数图像, 见图 2, 其中  $S_0 = 100; T = 1.00; r = 0.05; V_0 = 0.015; \kappa = 2; \theta = 0.01; \sigma = 0.05; \rho = -0.75$ .

由图 2 可知,  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  的密度函数  $f(x)$  的图像接近 Gamma 分布, 因此可以考虑选取  $g(x)$  是符合 Gamma 分布的密度函数<sup>[9]</sup>, 对应参数可以由  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  的特征函数  $\Phi(a)$  求解, 即为提高舍取抽样效率, 匹配  $f(x)$  与  $g(x)$  的一阶矩与二阶矩得到 Gamma 分布的参数如下:

$$g(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x),$$

$$E[X] = \frac{\Phi'(0)}{i},$$

$$E[X^2] = -\Phi''(0),$$

$$\alpha = -\frac{[\Phi'(0)]^2}{[\Phi'(0)]^2 - \Phi''(0)},$$

$$\beta = \frac{\Phi'(0)}{[[\Phi'(0)]^2 - \Phi''(0)]i}$$

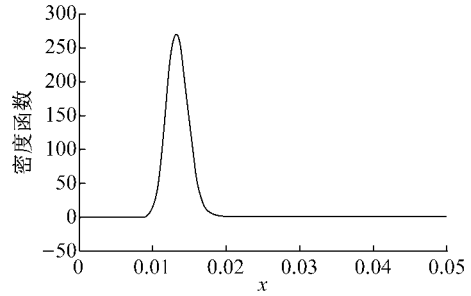


图 2 密度函数  $f(x)$  的图像  
Fig. 2 Density function  $f(x)$

选取  $c = 1.1$  时,  $f(x), cg(x)$  的图像见图 3, 其中  $S_0 = 100; T = 1.00; r = 0.05; V_0 = 0.015; \kappa = 2; \theta = 0.01; \sigma = 0.05; \rho = -0.75$ .

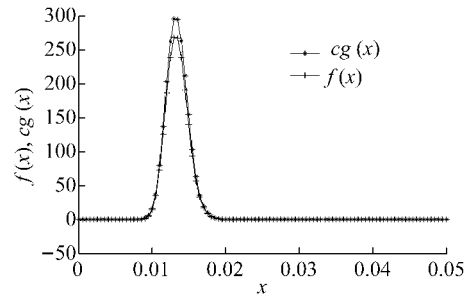


图 3 舍取抽样密度函数  $cg(x)$  与原密度  $f(x)$  的图像  
Fig. 3 Rejection sample density  $cg(x)$  and original density  $f(x)$

所以  $c = 1.1$  满足舍取抽样法的条件, 可以用它抽样出对应的  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  的样本点.

步骤 3 根据  $V_{t_i}, V_{t_j}, \int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  计算  $\int_{t_i}^{t_j} \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}$  的值.

当有  $V_{t_i}, V_{t_j}$  和  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  的样本后, 可以从以下等式抽样出  $\int_{t_i}^{t_j} \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}$ :

$$\int_{t_i}^{t_j} \sqrt{V_s} dW_s^{(1)} = \frac{1}{\sigma_v} (V_{t_j} - V_{t_i} - \kappa\theta(t_j - t_i) + \kappa \int_{t_i}^{t_j} V_s ds)$$

步骤 4 以  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds, \int_{t_i}^{t_j} \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}$  为条件求出  $S_{t_i}$ .

定义  $[t_i, t_j]$  间的平均方差为

$$\bar{\sigma}_j^2 = \frac{(1-\rho^2) \int_{t_i}^{t_j} V_s ds}{t_j - t_i}$$

定义辅助变量

$$\xi_j = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2} \int_{t_i}^{t_j} V_s ds + \rho \int_{t_i}^{t_j} \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}\right)$$

已知方差路径与  $t_i$  时标的资产价格  $S_{t_i}$ , 可以得到这时  $S_{t_j}$  的表达式为

$$S_{t_j} = S_{t_i} \xi_j \exp\left[\left(r - \frac{\bar{\sigma}_j^2}{2}\right)(t_j - t_i) + \bar{\sigma}_j \sqrt{t_j - t_i} Z\right]$$

由此就可以模拟出 SV 模型下标的资产过程.

### 2.1.3 SV 模型下欧式期权定价的条件蒙特卡罗算法

考虑同样到期日为  $T$ , 执行价格为  $K$ , 初始标的资产价格为  $S_0$ , 波动率为常数  $\sigma$  的欧式看涨期权, 它的价格可以用 Black-Scholes 公式表示, 记为  $B_S(S_0, \sigma)$ .

在 SV 模型精确模拟方法的前 3 步可以抽样出  $\int_0^T V_s ds, \int_0^T \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}$ , Wiillard<sup>[10]</sup> 提出以它们为条件时,  $S_T$  符合对数正态分布.

定义  $[0, T]$  间的平均波动率为

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{(1-\rho^2) \int_0^T V_s ds}{T}}$$

定义辅助变量

$$\xi = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2} \int_0^T V_s ds + \rho \int_0^T \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}\right)$$

这时  $S_T$  满足

$$S_T = S_0 \xi \exp\left[\left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T + \bar{\sigma} \sqrt{T} Z\right]$$

那么在  $\int_0^T V_s ds$  和  $\int_0^T \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}$  为条件时, 看涨期权价格可以写为  $B_S(S_0 \xi, \bar{\sigma})$ .

利用条件蒙特卡罗可知 SV 模型下欧式期权的价格为

$$\begin{aligned} C &= E[\exp(-rT)(S(T)-K)^+] = \\ &E\left[E\left[\exp(-rT)(S(T)-K)^+ \mid \int_0^T V_s ds, \int_0^T \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}\right]\right] = \\ &E[S_0 \xi N(d_1) - \exp(-rT)KN(d_2); \bar{\sigma}] = \\ &E[B_S(S_0 \xi, \bar{\sigma}); \bar{\sigma}] \end{aligned}$$

其中:  $S(T)$  表示  $T$  时刻股价;  $K$  表示敲定价;

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{S_0 \xi}{K} + \left(r \pm \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2\right)T}{\bar{\sigma} \sqrt{T}}$$

## 2.2 SVCJ 模型下期权的加速模拟算法

### 2.2.1 SVCJ 模型的精确模拟算法

SVCJ 模型是在 Heston SV 模型的基础上增加了方差的跳跃过程. 它假设标的资产  $S_t$  与瞬时方差率  $V_t$  满足以下动态随机模型:

$$dS_t = (r - \lambda \bar{\mu}) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t [\rho dW_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^{(2)}] + S_t (J_s - 1) dN_t \quad (6)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma_v \sqrt{V_t} dW_t^{(1)} + J_v dN_t \quad (7)$$

方程(6)刻画了标的资产的动态变化, 其中  $S_t$  表示  $t$  时刻的标的资产价格;  $r$  表示风险中性漂移率;  $\sqrt{V_t}$  表示波动率; 方程(7)刻画了瞬时方差率  $V_t$  的动态变化, 其中  $\theta$  表示长期均方差,  $\kappa$  表示方差回归速度;  $\sigma_v$  是这个方差过程对应的波动率;  $W_t^{(1)}$  与  $W_t^{(2)}$  是两个独立的布朗运动过程;  $\rho$  表示回报过程与波动率过程间的相关系数;  $N_t$  是参数为  $\lambda_j$  的泊松过程, 它与布朗运动独立;  $J_s$  表示标的资产价格相对跳跃幅度;  $J_v$  表示方差的跳跃幅度. 特别地, 标的资产价格与方差的跳跃是相关的, 即它们是同时发生跳跃的, 如果在时刻  $t$  发生跳跃, 那么  $S_{t+} = S_t - J_s, V_{t+} = V_t + J_v$ , 它们之间有相关系数  $\rho_j$ . 跳跃幅度  $J_v$  符合期望为  $\mu_v$  的指数分布. 当  $J_v$  已知时,  $J_s$  符合对数正态分布,  $\ln J_s \sim N(\mu_s + \rho_j J_v, \sigma_s^2)$ , 且参数  $\mu_s$  和  $\bar{\mu}$  相关, 满足表达式

$$\mu_s = \ln[(1 + \bar{\mu})(1 - \rho_j \mu_v)] - \frac{1}{2} \sigma_s^2$$

划分时间  $0 = t_0 < \dots < t_m = T, 0 \leq i < j \leq m$ , 考虑时间区间  $[t_i, t_j]$ , 具体步骤如下:

步骤 1 模拟出区间  $[t_i, t_j]$  间的方差跳跃步数  $n_j$ , 更新时间为  $t_i < t_{\text{jump}_1} < \dots < t_{\text{jump}_{n_j}} < t_j$ .

步骤 2 根据  $V_{t_i}$ , 从  $V_{t_i}$  的分布中生成样本  $V_{t_{\text{jump}_1}}, \dots, V_{t_{\text{jump}_{n_j}}}, V_{t_j}$ .

步骤 3 根据  $V_{t_i}$  和  $V_{t_{\text{jump}_1}}, \dots, V_{t_{\text{jump}_{n_j}}}, V_{t_j}$ , 生成  $\int_{t_i}^{t_{\text{jump}_1}} V_s ds, \int_{t_{\text{jump}_1}}^{t_{\text{jump}_2}} V_s ds, \dots, \int_{t_{\text{jump}_{n_j}}}^{t_j} V_s ds$ .

步骤 4 模拟出每次跳跃大小  $J_{v, \text{jump}_1}, \dots, J_{v, \text{jump}_{n_j}}$ , 更新  $\hat{V}_{t_{\text{jump}_i}} = V_{t_{\text{jump}_i}} + J_{v, t_{\text{jump}_i}}, 1 \leq i \leq n_j$ .

步骤 5 根据  $V_{t_i}, V_{t_j}, \int_{t_i}^{t_j} V_s ds$  计算  $\int_{t_i}^{t_j} \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}$  的值.

步骤 6 以  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds, \int_{t_i}^{t_j} \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}$ , 跳跃步数

$n_j$ , 跳跃大小  $J_{v, \text{jump}_{-1}}, \dots, J_{v, \text{jump}_{-n_j}}$  为条件求出  $S_{t_i}$ .

前 5 步模拟和 SV 模型基本相同, 下面详细解释第 6 步.

已知区间  $[t_i, t_j]$  的  $\int_{t_i}^{t_j} V_s ds, \int_{t_i}^{t_j} \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}$ , 方差跳跃步数  $n_j$ , 对应跳跃大小  $J_{v, \text{jump}_{-1}}, \dots, J_{v, \text{jump}_{-n_j}}$  后, 可抽样出  $S_{t_j}$ .

定义  $[t_i, t_j]$  间的平均方差为

$$\bar{\sigma}_j^2 = \frac{n_j \sigma_s^2 + (1 - \rho^2) \int_{t_i}^{t_j} V_s ds}{t_j - t_i}$$

定义辅助变量

$$\xi_j = \exp\left(\sum_{k=1}^{n_j} \left(\mu_s + J_{v, k} \rho_J + \frac{\sigma_s^2}{2}\right) - \lambda \bar{\mu} (t_j - t_i) - \frac{\rho^2}{2} \int_{t_i}^{t_j} V_s ds + \rho \int_{t_i}^{t_j} \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}\right)$$

已知方差路径与  $t_i$  时刻标的资产价格  $S_{t_i}$ , 可以得到  $t_j$  时刻标的资产价格  $S_{t_j}$  的表达式

$$S_{t_j} = S_{t_i} \xi_j \exp\left[\left(r - \frac{\bar{\sigma}_j^2}{2}\right)(t_j - t_i) + \bar{\sigma}_j \sqrt{t_j - t_i} Z\right]$$

由此就可以模拟出 SVCJ 模型的标的资产价格路径.

### 2.2.2 SVCJ 模型下期权定价的条件蒙特卡罗算法

在 SVCJ 模型精确模拟方法中可以抽样出  $\int_0^T V_s ds, \int_0^T \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}$ , 同 SV 中的推导, 利用条件蒙特卡罗可知 SVCJ 模型下期权价格为

$$C = E[\exp(-rT)(S(T) - K)^+] = E\left[E\left[\exp(-rT)(S(T) - K)^+ \middle| \int_0^T V_s ds, \int_0^T \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}\right]\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda'_j T)^n}{n!} \exp(-\lambda'_j T) \left[S_0 \xi N(d_{n_1}) - K \exp(-rT) N(d_{n_2})\right]; \bar{\sigma}\right] = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda'_j T)^n}{n!} \exp(-\lambda'_j T) B_S(S_0 \xi, \sigma_n, r_n); \bar{\sigma}\right]$$

其中:

$$d_{n_1, n_2} = \frac{\ln \frac{S_0 \xi}{K} + \left(r_n \pm \frac{1}{2} \sigma_n^2\right) T}{\sigma_n \sqrt{T}},$$

$$\sigma_n^2 = \bar{\sigma}^2 + \frac{n \sigma_s^2}{T},$$

$$\lambda'_j = \lambda_j (1 + \bar{\mu}),$$

$$r_n = r - \lambda_j \bar{\mu} + \frac{n}{T} \left(\mu_s + J_{v, k} \rho_J + \frac{\sigma_s^2}{2}\right)$$

此时定义  $[0, T]$  间的平均波动率为

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{(1 - \rho^2) \int_0^T V_s ds}{T}}$$

定义辅助变量

$$\xi = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2} \int_0^T V_s ds + \rho \int_0^T \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}\right)$$

## 3 期权定价的数值模拟结果

下面将分别在精确模拟算法基础上考察原始蒙特卡罗法、对偶变量法和条件蒙特卡罗方法对欧式看涨期权的价格估计的加速效果. 同时, SV、SVCJ 模型中涉及到初始参数有  $K, T, r, V_0, \kappa, \sigma, \theta, \rho, \sigma_s, \bar{\mu}, \lambda_j, \mu_v, \rho_J$ , 不同的参数也会影响蒙特卡罗法下期权估计值和误差, 以下也将参数对期权价格估计和误差估计的影响做出分析.

表 1 为 SV 模型下不同模拟路径数  $m$  对蒙特卡罗法、对偶变量法和条件蒙特卡罗中欧式看涨期权价格误差估计效果. 其中,  $S_0 = 100, K = 100, T = 1.00, r = 0.05, V_0 = 0.015, \sigma = 0.15, \theta = 0.02, \kappa = 4, \rho = -0.25$ .

表 1 SV 模型下模拟路径数  $m$  对期权价格的影响

Tab. 1 Relation between number of simulation paths and price

$m$	蒙特卡罗法		对偶变量法		条件蒙特卡罗法	
	价格	标准差	价格	标准差	价格	标准差
1 000	7.98	0.29	7.84	0.13	8.15	0.05
2 000	8.50	0.23	8.10	0.10	8.17	0.03
3 000	8.09	0.18	8.31	0.08	8.14	0.03
5 000	8.16	0.14	8.14	0.06	8.14	0.02
10 000	8.09	0.09	8.07	0.04	8.12	0.01
15 000	8.15	0.08	8.13	0.03	8.10	0.01
30 000	8.16	0.08	8.13	0.03	8.11	0.01
50 000	8.11	0.05	8.13	0.02	8.14	0.01

由表 1 可知, 随着模拟路径数  $m$  的增加, 3 种方法的价格估计值都将趋于收敛; 条件蒙特卡罗方法较其他两种方法有方差减小的效果.

本文继续考察了误差减小效果随相关系数  $\rho$ , 波动率  $\sigma$ , 方差回归速度  $\kappa$ , 长期均方差  $\theta$  和执行时间  $T$  等参数变化的影响, 见表 2~4, 表中 R1 表示对偶变量法相对原始蒙特卡罗法误差减小倍数; R2 表示条件蒙特卡罗相对原始蒙特卡罗法误差减小倍数; R3 表示条件蒙特卡罗法相对对偶变量法误差减小倍数.

表 2 中,  $S_0 = 100, K = 100, T = 1.00, r = 0.05, V_0 = 0.015, \kappa = 4, \sigma = 0.15, \theta = 0.02, m = 10,000$ . 由表 2 可知, 随着相关系数的增加, 3 种方法的价格估

计值逐渐减小;条件蒙特卡罗法较其他两种方法具有较小的方差,达到了方差减小的效果,特别当相关系数趋于 0 时,条件蒙特卡罗法的方差减小的效果非常明显.

表 3 中,  $S_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 0.05, V_0 = 0.015, \kappa = 4, \theta = 0.02, \rho = -0.25, m = 10\ 000$ . 由表 3 可知,随着波动率的增加,蒙特卡罗法,对偶变量法,条件蒙特卡罗的价格估计值逐渐增加,对应方差呈逐渐减小趋势;条件蒙特卡罗的方差减小倍

数逐渐增加,较其他两种方法具有较小的方差,有更好的方差减小效果.

表 4 中,  $S_0 = 100, K = 100, T = 1.00, r = 0.05, V_0 = 0.015, \sigma = 0.15, \theta = 0.02, \rho = -0.25, m = 10\ 000$ . 由表 4 可知,随着方差回归速度的增加,3 种方法的价格估计值逐渐增加,对应方差也呈逐渐增加趋势;条件蒙特卡罗法的方差减小倍数逐渐减少,其方差始终低于其他两种方法,说明较其他两种方法,条件蒙特卡罗法具有更好的方差减小效果.

表 2 SV 模型下相关系数  $\rho$  对期权价格的影响  
Tab. 2 Relation between coefficient  $\rho$  and price

$\rho$	蒙特卡罗法		对偶变量法		条件蒙特卡罗法		R1	R2	R3
	价格	标准差	价格	标准差	价格	标准差			
-0.50	8.16	0.10	8.12	0.05	8.15	0.04	3.37	5.73	1.70
-0.25	8.09	0.10	8.07	0.04	8.13	0.02	4.63	31.09	6.72
0	8.05	0.10	8.01	0.05	8.09	0.01	4.91	367.30	74.87
0.25	8.00	0.10	8.00	0.05	8.07	0.03	4.06	12.51	3.07
0.50	8.08	0.11	8.02	0.06	8.04	0.05	2.83	4.02	1.41

表 3 SV 模型下波动率  $\sigma$  对期权价格的影响  
Tab. 3 Relation between volatility  $\sigma$  and price

$\sigma$	蒙特卡罗法		对偶变量法		条件蒙特卡罗法		R1	R2	R3
	价格	标准差	价格	标准差	价格	标准差			
0.02	8.08	0.10	8.06	0.04	8.11	0.02	4.37	20.12	4.60
0.05	8.10	0.10	8.07	0.04	8.12	0.02	4.44	21.76	4.89
0.10	8.17	0.09	8.08	0.04	8.12	0.01	4.55	25.83	5.67
0.15	8.09	0.09	8.07	0.04	8.12	0.01	4.62	31.09	6.72
0.20	8.09	0.09	8.06	0.04	8.11	0.01	4.69	36.75	7.82
0.25	8.06	0.09	8.06	0.04	8.09	0.01	4.69	45.26	9.63
0.50	7.92	0.09	7.93	0.04	8.00	0	4.73	131.70	27.90

表 4 SV 模型下方差回归速度  $\kappa$  对期权价格影响  
Tab. 4 Relation between reversion speed  $\kappa$  and price

$\kappa$	蒙特卡罗法		对偶变量法		条件蒙特卡罗法		R1	R2	R3
	价格	标准差	价格	标准差	价格	标准差			
1.0	7.79	0.09	7.80	0.04	7.86	0.01	4.83	53.02	10.96
2.0	7.93	0.09	7.94	0.04	7.98	0.01	4.72	40.70	8.65
3.0	8.04	0.09	8.03	0.04	8.07	0.01	4.68	34.72	7.41
4.0	8.09	0.09	8.07	0.04	8.12	0.01	4.62	31.09	6.72
5.0	8.15	0.09	8.13	0.04	8.15	0.01	4.65	29.05	6.24

### 4 期权敏感度分析

期权敏感性指期权价格相对于定价参数变动的敏感程度,敏感性分析可以帮助投资者选取适当的期权组合,减小风险.蒙特卡罗法中求解 Greeks 的方法可总结为 3 类:有限差分近似、顺向微分估计(pathwise method, PW)和似然比估计(likelihood ration method, LR).其中有限差分近似虽然容易操作,但它会为估计值带来偏差<sup>[5]</sup>,本文将使用 PW 方法和 LR 方法,考察欧式期权价格随参数变化的影

响. PW 是基于对收益函数的微分, LR 则是基于对标的资产价格密度函数的微分,它们都能求解出 Greeks 的无偏估计量, LR 的应用性更广泛, PW 的结果更精确.下面讨论用 LR 与 PW 方法计算  $\Delta, \gamma$  和  $\rho$ .  $\Delta$  是期权价格关于标的资产初始价格  $S_0$  的导数,它表示期权价格与标的资产初始价格之间的关系;  $\gamma$  是期权价格关于标的资产初始价格  $S_0$  的二阶导数,它表示  $\Delta$  与标的资产初始价格之间的变化关系;  $\rho$  是期权价格关于无风险利率  $r$  的导数,它表示期权价格与无风险利率之间的变化关系.

考虑执行价格  $K$ , 到期日  $T$  的欧式看涨期权,它

的价格应为

$$C = E[\exp(-rT)(S_T - K)^+], \text{记}$$

$$C_i = \exp(-rT)(S_T - K)^+$$

在精确模拟方法中抽样出  $\int_0^T V_s ds, \int_0^T \sqrt{V_s} dW_s^{(1)}$  的条件下, 标的资产价格可以视为常数波动率下动态过程, 可表示为如下形式:

$$S_T = S_0 \xi \exp\left[\left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T + \bar{\sigma} \sqrt{T}Z\right], Z \sim N(0, 1)$$

$\bar{\sigma}, \xi$  的具体表达式可参考第 3 节, 与  $S_0, r$  无关.

#### 4.1 PW 方法

PW 方法假设微分与期望具有可交换性, 在此条件下可以推导出欧式看涨期权 Greeks( $\Delta, \rho$ ) 的解析解.

##### 4.1.1 $\Delta$

已知  $\Delta$  是期权价格关于标的资产初始价格  $S_0$  的导数, 利用链式法则将导数写为

$$\frac{dC_i}{dS_0} = \frac{dC_i}{dS_T} \frac{dS_T}{dS_0}$$

其中:

$$\frac{dC_i}{dS_T} = \begin{cases} \exp(-rT), & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases}$$

$$\frac{dS_T}{dS_0} = \xi \exp\left[\left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T + \bar{\sigma} \sqrt{T}Z\right] = \frac{S_T}{S_0} \Rightarrow$$

$$\Delta: \frac{dC}{dS_0} = E\left[\frac{dC_i}{dS_0}\right] = E\left[\exp(-rT) \{S_T > K\} \frac{S_T}{S_0}\right]$$

##### 4.1.2 $\rho$

$\rho$  是期权价格关于无风险利率  $r$  的导数, 它表示期权价格与无风险利率之间的变化关系, 可写为

$$\frac{dC_i}{dr} = \begin{cases} \frac{d[\exp(-rT)(S_T - K)]}{dr}, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases}$$

其中:

$$\frac{d[\exp(-rT)(S_T - K)]}{dr} = -T \exp(-rT) S_T + \exp(-rT) \frac{dS_T}{dr} + K T \exp(-rT)$$

$$\frac{dS_T}{dr} = T S_0 \xi \exp\left[\left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T + \bar{\sigma} \sqrt{T}Z\right] = T S_T \Rightarrow$$

$$\rho: \frac{dC}{dr} = E\left[\frac{dC_i}{dr}\right] = E[\exp(-rT) \{S_T > K\} K T]$$

故使用 PW 方法得一条模拟路径中欧式看涨期权 Greeks 的估计值为

$$\Delta: \exp(-rT) [S_T \geq K] \frac{S_T}{S_0}$$

$$\rho: \exp(-rT) [S_T \geq K] K T$$

#### 4.2 LR 方法

LR 方法是基于条件密度函数得到 Greeks 的估

计值, 假设  $S_T$  的条件密度函数为  $g_\theta(x)$ , 其中  $\theta$  为概率密度函数的参数, 那么欧式看涨期权价格  $C = E[\exp(-rT)(S_T - K)^+]$  可以写为

$$C = \int \exp(-rT)(x - K)^+ g_\theta(x) dx$$

如果微分与积分可交换次序, 那么期权价格  $C$  关于参数  $\theta$  的导数可以表示为

$$\frac{dC}{d\theta} = \int \exp(-rT)(x - K)^+ \frac{dg_\theta(x)}{d\theta} dx =$$

$$\int \exp(-rT)(x - K)^+ \frac{g'_\theta(x)}{g_\theta(x)} g_\theta(x) dx =$$

$$E\left[\exp(-rT)(S_T - K)^+ \frac{g'_\theta(S_T)}{g_\theta(S_T)}\right]$$

其中  $\exp(-rT)(S_T - K)^+ \frac{g'_\theta(S_T)}{g_\theta(S_T)}$  是  $\frac{dC}{d\theta}$  的无偏估计量, 称  $\frac{g'_\theta(S_T)}{g_\theta(S_T)}$  为评分函数(score function), 它独立于收益函数  $\exp(-rT)(S_T - K)^+$ .

在精确模拟方法中抽样出  $\int_0^T V_s ds, \int_0^T \sqrt{V_s} \cdot dW_s^{(1)}$  后, 标的资产价格可以视为常数波动率下动态过程, 可表示为如下形式:

$$S_T = S_0 \xi \exp\left[\left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T + \bar{\sigma} \sqrt{T}Z\right], Z \sim N(0, 1)$$

此时  $S_T$  符合对数正态分布, 它的累积分布函数可以写为

$$P(S_T \leq x) = P\left(S_0 \xi \exp\left[\left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T + \bar{\sigma} \sqrt{T}Z\right] \leq x\right) =$$

$$P\left(\left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T + \bar{\sigma} \sqrt{T}Z \leq \ln\left(\frac{x}{S_0 \xi}\right)\right) =$$

$$P\left[Z \leq \frac{\ln\left(\frac{x}{S_0 \xi}\right) - \left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T}{\bar{\sigma} \sqrt{T}}\right] =$$

$$\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{x}{S_0 \xi}\right) - \left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T}{\bar{\sigma} \sqrt{T}}\right]$$

对应密度函数为

$$\frac{1}{x \bar{\sigma} \sqrt{T}} \varphi\left[\frac{\ln\left(\frac{x}{S_0 \xi}\right) - \left(r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2}\right)T}{\bar{\sigma} \sqrt{T}}\right]$$

该密度函数可以简写为  $g(x) = \frac{1}{x \bar{\sigma} \sqrt{T}} \cdot$

$\varphi(d(x)), \varphi(\cdot)$  是标准正态密度函数,  $d(x)$  的表达式为

$$d(x) = \frac{\ln(x/(S_0 \xi)) - \left(r - \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2\right)T}{\bar{\sigma} \sqrt{T}}$$

在不同参数下, 密度函数的微分化简计算出的



评分函数为

$$\frac{\frac{\partial g(x)}{\partial S_0}}{g(x)} = \frac{\varphi'(d(x)) \frac{\partial d(x)}{\partial S_0}}{\varphi(d(x))} = \frac{d(x)}{S_0 \bar{\sigma} \sqrt{T}}$$

$$\frac{\frac{\partial^2 g(x)}{\partial S_0^2}}{g(x)} = \frac{\frac{\partial \left[ \frac{\varphi(d(x)) \frac{d(x)}{S_0} \right]}{\partial S_0}}{\varphi(d(x))}}{S_0 \bar{\sigma}^2 T} = \frac{d^2 - d \bar{\sigma} \sqrt{T} - 1}{S_0 \bar{\sigma}^2 T}$$

$$\frac{\frac{\partial g(x)}{\partial r}}{g(x)} = \frac{\varphi'(d(x)) \frac{\partial d(x)}{\partial r}}{\varphi(d(x))} = -\frac{d(x) T}{\bar{\sigma} \sqrt{T}}$$

对应敏感性指数 LR 估计值为

$$\Delta: \exp(-rT) (S_T - K)^+ \left( \frac{d}{S_0 \bar{\sigma} \sqrt{T}} \right)$$

$$\Gamma: \exp(-rT) (S_T - K)^+ \left( \frac{d^2 - d \bar{\sigma} \sqrt{T} - 1}{S_0 \bar{\sigma}^2 T} \right)$$

$$\rho: \exp(-rT) (S_T - K)^+ \left( -T + \frac{d \sqrt{T}}{\bar{\sigma}} \right)$$

PW 方法无法直接计算出 Gamma 的值,可以结合 LR 方法求出欧式看涨期权 Gamma 的混合估计值,LR-PW 表示先使用 PW 方法估计一阶导数,再使用 LR 方法估计二阶导数,PW-LR 意义类似。

LR-PW

$$\Gamma: \exp(-rT) [S_T \geq K] K \left( \frac{d}{S_0^2 \bar{\sigma} \sqrt{T}} \right)$$

PW-LR

$$\Gamma: \exp(-rT) [S_T \geq K] \frac{S_T}{S_0} \left( \frac{d}{\bar{\sigma} \sqrt{T}} - 1 \right)$$

## 5 条件蒙特卡罗方法计算 Greeks

本节使用蒙特卡罗加速技术来计算 Greeks 的

值。在 SV 模型下根据条件蒙特卡罗的思想,欧式看涨期权的解析解为

$$C = E[B_S(S_0 \xi, \bar{\sigma}); \bar{\sigma}] = E \left[ S_0 \xi N(d_1) - \exp(-rT) K N(d_2); \bar{\sigma} \right]$$

其中:

$$d_{1,2} = -\frac{\ln \frac{S_0 \xi}{K} + \left( r \pm \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2 \right) T}{\bar{\sigma} \sqrt{T}},$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{(1 - \rho^2) \int_0^T V_s ds}{T}},$$

$$\xi = \exp \left( -\frac{\rho^2}{2} \int_0^T V_s ds + \rho \int_0^T \sqrt{V_s} dW_s^{(1)} \right)$$

它的敏感性参数可以直接求解微分得到,即

$$\Delta: \frac{\partial C}{\partial S_0} = E \left[ \frac{\partial B_S(S_0 \xi, \bar{\sigma})}{\partial S_0}; \bar{\sigma} \right] = E[\xi N(d_1); \bar{\sigma}]$$

$$\Gamma: \frac{\partial^2 C}{\partial S_0^2} = E \left[ \frac{\partial^2 B_S(S_0 \xi, \bar{\sigma})}{\partial S_0^2}; \bar{\sigma} \right] = E \left[ \xi N'(d_1) \frac{1}{S_0 \bar{\sigma} \sqrt{T}}; \bar{\sigma} \right]$$

$$\rho: \frac{\partial C}{\partial r} = E \left[ \frac{\partial B_S(S_0 \xi, \bar{\sigma})}{\partial r}; \bar{\sigma} \right] = E[KT \exp(-rT) N(d_2); \bar{\sigma}]$$

表 5 所示为 3 种方法中期权价格估计与 Greeks 分析。

由表 5 可知,在 SV 和 SVCJ 模型下,蒙特卡罗法、对偶变量法和条件蒙特卡罗法对期权价格估计方差和 Greeks 方差中,条件蒙特卡罗法始终有较小方差,较其他两种方法,条件蒙特卡罗法有方差减小效果。

表 5 3 种方法中期权价格估计与 Greeks 分析

Tab. 5 Price and Greeks of European options of three methods

方法	模型	期权价格	标准差	PW		LR			LR-PW			PW-LR		PW		LR	
				$\Delta$	标准差	$\Delta$	标准差	$\gamma$	标准差	$\gamma$	标准差	$\gamma$	标准差	$\rho$	标准差	$\rho$	标准差
蒙特卡罗	SV 模型	7.219	0.079	0.713	0.005	0.688	0.019	0.024	0.005	0.030	0.001	0.030	0.001	64.046	0.446	61.540	1.818
	SVCJ 模型	7.381	0.082	0.701	0.005	0.684	0.019	0.023	0.005	0.028	0.001	0.028	0.001	62.753	0.451	61.074	1.856
对偶变量	SV 模型	7.392	0.058	0.710	0.005	0.697	0.019	0.026	0.005	0.030	0.001	0.030	0.001	63.775	0.447	62.528	1.834
	SVCJ 模型	7.222	0.062	0.703	0.005	0.697	0.020	0.028	0.005	0.028	0.001	0.028	0.001	62.857	0.450	62.314	1.910
条件蒙特卡罗	SV 模型	7.414	0.056	0.687	0.003			0.032	0					63.739	0.278		
	SVCJ 模型	7.217	0.059	0.679	0.003			0.030	0					62.993	0.289		

## 6 结论

本文在 SV 和 SVCJ 两种随机波动率模型下,基于标的资产过程精确模拟算法,考察了欧式看涨期权定价和敏感性 Greeks 的加速模拟理论计算问题,讨论了不同情形下条件蒙特卡罗法和对偶变量法两种方差减小技术的加速效果。

从模拟结果看,不同起始参数对条件蒙特卡罗的方差减小效果有一定影响,但条件蒙特卡罗法对期权价格估计和 Greeks 估计的方差始终小于其他两种方法的方差,说明精确模拟方法和条件蒙特卡罗法结合对期权的定价估计和 Greeks 估计有很好的结果。相比常用的欧拉离散与蒙特卡罗法,它能够得到无偏且更小方差的估计值。

本文算法可以很方便地解决其他更加复杂的产品计算问题,如障碍期权的定价和敏感性估计问题、篮子期权的计算问题等。

### 参考文献:

- [1] HULL J, WHITE A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities [J]. *Journal of Finance*, 1987, 42(2): 281.
- [2] STEIN E M, STEIN J C. Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach [J]. *Review of Financial Studies*, 1991, 4(4): 727.
- [3] HESTON S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options [J]. *Review of Financial Studies*, 1993, 6(2): 327.
- [4] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法 [M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004.  
JIANG Lishang. The mathematical modeling and method for option pricing [M]. 2nd ed. Beijing: High Education Press, 2004.
- [5] GLASSERMAN P. Monte Carlo methods in financial engineering [M]. New York: Springer Science & Business Media, 2003.
- [6] MA Junmei, XU Chenglong. An efficient control variate method for pricing variance derivatives [J]. *J Comput Appl Math*, 2010, 235(1): 108.
- [7] BROADIE M, KAYA Ö. Exact simulation of stochastic volatility and other affine jump diffusion processes [J]. *Operations Research*, 2006, 54(2): 217.
- [8] BROADIE M, KAYA Ö. Exact simulation of option Greeks under stochastic volatility and jump diffusion models [C] // *Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference*. Washington D C: [s. n.], 2004: 1607-1615.
- [9] DIPPOLITI F, MORETTO E, PASQUALI S, et al. Exact pricing with stochastic volatility and jumps [J]. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2010, 13(6): 901.
- [10] WILLARD G A. Calculating prices and sensitivities for path-independent derivatives securities in multifactor models [J]. *The Journal of Derivatives*, 1997, 5(1): 45.
- [24] 王长势, 朱伟林, 陈春峰, 等. 东海丽水-椒江新生代凹陷基底的岩性及分布 [J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2014, 42(4): 636.  
WANG Zhangshi, ZHU Weilin, CHEN Chunfeng, et al. Basement lithology and distribution of Lishui - Jiaojiang Cenozoic sag in East China Sea [J]. *Journal of Tongji University(Natural Science)*, 2014, 42(4): 636.
- [25] LEE J K W, WILLIAMS I S, ELLIS D J. Pb, U and Th diffusion in natural zircon [J]. *Nature*, 1997, 390(6656): 159.
- [26] 倪涛, 陈道公, 靳平. 大别山变质岩锆石微区稀土元素和 Th, U 特征 [J]. *高校地质学报*, 2006, 12(2): 249.  
NI Tao, CHEN Daogong, JIN Ping. Zircon REE and Th, U characteristics of metamorphic rocks from the Dabie Mountains [J]. *Geological Journal of China universities*, 2006, 12(2): 249.
- [27] WANG X, WILLIAMS L G, CHEN J, et al. U and Th contents and Th/U ratios of zircon in felsic and mafic magmatic rocks: improved zircon-melt distribution coefficients [J]. *Acat Geologica*, 2011, 85(1): 164.
- [28] 徐长贵. 东海盆地丽水-椒江凹陷层序地层沉积体系分析与储层评价 [R]. 上海: 中国海洋石油(中国)有限公司上海分公司, 2004.  
XU Changgui. Analysis on sequence and sedimentary deposition system and study on reservoir in Lishui-Jiaojiang sag, East China Sea Basin [R]. Shanghai: China National Offshore Oil Corporation Shanghai Branch, 2004.
- [29] 陈春峰, 徐春明, 周瑞华, 等. 东海陆架盆地丽水凹陷岩性油气藏发育特征与成藏条件 [J]. *中国海上油气*, 2013, 25(2): 30.  
CHEN Chunfeng, XU Chunming, ZHOU Ruihua, et al. Development characteristics and accumulation conditions of lithologic reservoirs in Lishui sag, East China Sea shelf basin [J]. *China Offshore Oil and Gas*, 2013, 25(2): 30.
- [30] 谭洪旗, 刘玉平, 徐伟, 等. 中-浅变质岩锆石 SHRIMP 法与 TIMS 法测年结果不一致性处理 [J]. *矿物学报*, 2011, 31(1): 62.  
TAN Hongqi, LIU Yuping, XU Wei, et al. A study on SHRIMS and TIMS zircons dating on low to medium grade ortho-metamorphic rocks [J]. *Acta Mineralogica Sinica*, 2011, 31(1): 62.

(上接第 1530 页)