

# 考虑地表边界效应的静压沉桩挤土位移解析

张亚国<sup>1</sup>, 李镜培<sup>2</sup>

(1. 长安大学 建筑工程学院, 陕西 西安 710062; 2. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

**摘要:** 在沉桩挤土位移求解过程中同时考虑了土体弹塑性本构关系以及地表边界效应的影响. 假定桩周土体屈服后服从修正剑桥模型, 基于圆孔扩张理论推导了桩体无限长时挤土位移的初始解. 在此基础上, 引入修正函数来考虑地表边界和沉桩深度对挤土位移的影响; 经与文献实测结果比较, 验证了修正后沉桩挤土位移解析方法的合理性和可靠性. 参数分析表明, 沉桩挤土位移随桩径的增加呈非线性增长, 随预钻孔孔径的增大呈非线性减小; 当超固结比增大时, 挤土位移也随之增大, 分析认为是由于重超固结土颗粒排列紧密, 受到的挤压作用明显所致.

**关键词:** 静压沉桩; 挤土位移; 边界效应; 圆孔扩张

**中图分类号:** TU443

**文献标志码:** A

## Analysis of Ground Displacement Caused by Pile Installation Considering Boundary Effects

ZHANG Yaguo<sup>1</sup>, LI Jingpei<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China; 2. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** In the analytical analysis of the lateral displacement caused by pile installation, an elastic-plastic model of soils and the effects of the ground surface boundary were synchronously considered in this study. To be specific, the modified Cam Clay constitutive model was used to capture the soil behavior after yielding. The initial solution of ground displacement induced by installation of pile with infinite was derived based on the theory of cavity expansion. The effects of boundary surface and depth of pile buried in soils were considered by introducing a modified function into the initial solution. The analytical solution was validated using the field measure data first. Then it is exploited to undertaken parameter analysis. The results show that the soil displacement caused by pile installation increases nonlinearly with the increase of pile diameter and the decrease of

preboredhole diameter. In addition, the displacement also increases with OCR, which can be attributed to the obvious squeezing effect of the heavily consolidated soils with compact structures.

**Key words:** pile installation; soil displacement; boundary effects; cavity expansion

静压桩沉桩过程中产生的挤土效应对邻近的道路管线、建筑物等产生不利影响. 然而, 由于沉桩过程涉及到土体的大应变以及非线性变形特性, 很难找到一个严格的理论方法对其进行描述. 因此, 基于一系列简化假设的半解析或经验方法被广泛地应用于工程实践中.

Baligh<sup>[1]</sup>将土体视为不可压缩的无黏性体, 将桩体的贯入过程等效为土体绕桩尖沿流线运动的定常流问题. 在不考虑土体本构关系的情况下, 沿流线对速度积分求得位移场, 进而确定应变场, 并导出了沉桩引起的土体应力和孔压的分布规律<sup>[2-3]</sup>. 该方法能够反映桩体在土中连续贯入的过程, 却无法考虑地表边界效应的影响.

Sagaseta<sup>[4]</sup>通过源(扩张球孔)-汇(收缩球孔)理论得到了地表面无约束情况下地表面的位移解. Chow等<sup>[5]</sup>用同样的方法得到了桩周土体的竖向位移场, 并用弹性理论法讨论了邻桩的上抬规律, 研究参数变化对邻桩上抬的影响. 该方法由于能够较好地考虑地表边界效应的影响, 不同工况下的沉桩挤土位移研究在此基础上展开<sup>[6-7]</sup>. 但源-汇理论是基于线弹性基本假定, 难以考虑土体应力与应变之间复杂的本构关系.

假定沉桩挤土过程类似于圆柱孔或球形孔的扩张, 圆孔扩张理论被广泛地应用到沉桩挤土效应的理论分析中<sup>[8-9]</sup>. Randolph等<sup>[10]</sup>将沉桩看作不排水

收稿日期: 2017-03-02

基金项目: 国家自然科学基金(41272288); 陕西省自然科学基金基础研究计划(2017JM5025); 中央高校基本科研业务费专项基金(310828171002, 310828163409, 310828172001)

第一作者: 张亚国(1984-), 男, 讲师, 工学博士, 主要研究方向为岩土力学和地基基础. E-mail: zhangyaguo29@163.com

条件下的圆柱孔扩张,分析了沉桩后孔隙水压力的固结消散过程;张亚国等<sup>[11]</sup>假定土体为理想弹塑性体,基于临界状态扩孔理论求解了沉桩时周围土体中任一点位移.然而上述方法均是基于平面应变假定,没有考虑桩长和地表边界对沉桩过程的影响.

综上所述,寻求一种既能考虑土体本构关系,又能考虑地表边界效应和沉桩深度影响的挤土位移求解方法是十分必要的.本文基于圆孔扩张理论,假定桩周围土体屈服后服从修正剑桥(Modified Cam Clay, MCC)模型,结合静压沉桩特点,首先推导了桩身无限长情况下的初始挤土位移解;进而将已沉入土体的桩身等效为若干个扩张球孔,引入 Chai 等<sup>[12]</sup>的修正函数来考虑地表边界和压桩深度的影响;最终得到了便于在实际工程中应用的静压桩挤土位移场理论解.

### 1 基于平面应变假定的沉桩挤土位移

首先不考虑沉桩时桩长和地表边界的影响,将沉桩过程看作圆柱孔在无限土体中的扩张,即简化为平面应变问题,如图 1 所示.当不设预钻孔时,初始半径  $a_0=0$ .受扩孔压力  $\sigma_a$  的作用,孔壁土体最先出现屈服状态;随着孔压的增大,球孔周围出现塑性区,其半径为  $r_p$ ;圆孔的最终半径为  $a_u$ (即桩半径).假设土体未发生屈服时,呈弹性状态,并服从胡克定律;土体屈服后服从修正剑桥模型.图 1 中  $u_{r,p}$  为柱周任意一点在塑性区内的位移,  $r_{p0}$  为弹性边界的初始位置,  $u_p$  为弹性边界的位移.由于压桩速度快,土中孔隙水难以排出,故可将沉桩过程视为不排水过程.

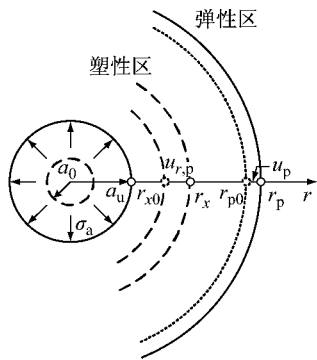


图 1 沉桩扩孔的力学模型

Fig. 1 Mechanics model of cavity expansion for pile installation

桩周土体单元的径向和切向总应力分别为  $\sigma_r$  和

$\sigma_\theta$ ,有效应力分量为  $\sigma'_r$  和  $\sigma'_\theta$ ;初始总应力为  $p_0$ ,任意一点平均总应力为  $p$ ,平均有效应力为  $p'$ ,偏应力为  $q$ ;按惯例规定压应力为正.根据弹塑性理论可知:

$$p = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}, q = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \quad (1)$$

弹性区桩周围土体中的应力和位移可表示为<sup>[9]</sup>

$$\sigma_{r,e} = p_0 + (\sigma_{rp} - p_0) \left(\frac{r_p}{r}\right)^2 \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta,e} = p_0 - (\sigma_{rp} - p_0) \left(\frac{r_p}{r}\right)^2 \quad (3)$$

$$u_{r,e} = \frac{(\sigma_{rp} - p_0)}{2G} \frac{r_p^2}{r} \quad (4)$$

式(2)~(4)中: $\sigma_{r,e}$ 、 $\sigma_{\theta,e}$ 和  $u_{r,e}$ 分别为弹性区的径向应力、切向应力和径向位移; $\sigma_{rp}$ 为弹塑性边界上的径向应力; $r_p$ 为弹塑性边界的半径; $G$ 为剪切模量.由式(4)可以看出,确定弹性区的位移,首先需要对  $\sigma_{rp}$  和  $r_p$  进行求解.

联立式(1)~(4),可得到弹塑性边界上应力和位移为

$$\sigma_{rp} = p_0 + \frac{q_p}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

$$\sigma_{\theta p} = p_0 - \frac{q_p}{\sqrt{3}} \quad (6)$$

$$u_p = \frac{\sigma_{rp} - p_0}{2G} r_p \quad (7)$$

式中: $q_p$ 为弹塑性边界上的偏应力.

对于  $r_p$  和  $q_p$ ,则需通过对塑性区的求解得到.在塑性区,土体屈服后服从修正剑桥模型,其屈服函数可以表示为<sup>[13]</sup>

$$f = q^2 - M^2 [p'(p'_c - p')] = 0 \quad (8)$$

式中: $M$ 为临界状态线斜率,等于  $6\sin \varphi' / (3 - \sin \varphi')$ ,  $\varphi'$ 为有效内摩擦角; $p'_c$ 为各向同性状态条件下的屈服应力.利用弹塑性边界处应力连续性条件可得

$$p'_p = p'_0 \quad (9)$$

式中: $p'_p$ 为弹塑性边界上的平均有效应力; $p'_0$ 为初始平均有效应力.

结合式(8)和式(9)可知,在弹塑性边界  $r_p$  处,偏应力为

$$q_p = Mp'_0 \sqrt{R-1} \quad (10)$$

式中: $R$ 为各向同性超固结比,等于  $p'_c/p'_0$ ,其与传统超固结比  $R_{oc}$ 存在较大的差异.由于实际工程中,通常采用  $R_{oc}$ 来反映土体的应力历史,因此需要将式(10)中的  $R$  转化为  $R_{oc}$ .  $R$  与  $R_{oc}$  之间的关

系为<sup>[14]</sup>

$$R = \alpha R_{OC} \quad (11)$$

式中:

$$\alpha = \frac{9(1 - k_0^*)^2 + M^2(1 + 2k_0^*)^2}{M^2(1 + 2k_0)(1 + 2k_0^*)}$$

$k_0 = k_0^* R_{OC}^{\sin \phi'}$ ,  $k_0^* = 1 - \sin \phi'$ ; 当为正常固结土时, 即  $R_{OC} = 1$  时,  $k_0 = k_0^*$ .

将式(11)代入式(10)可得

$$q_p = Mp'_0 \sqrt{\alpha R_{OC} - 1} \quad (12)$$

受扩孔压力的持续作用, 弹塑性边界的位置也在不断地发生变化; 然而, 弹塑性边界上的应力与该边界所在的位置无关<sup>[14]</sup>. 根据式(4)可知

$$r_{xp} - r_{x0} = \frac{\sigma_{rp} - p_0}{2G} r_{xp} \quad (13)$$

式中:  $r_{x0}$  为孔周某一土单元的初始径向位置;  $r_{xp}$  为该土单元刚刚进入塑性状态时的径向位置.

由于扩孔过程可看作不排水过程, 周围土体的体应变为零, 结合图 1 有

$$r_x^2 - r_{x0}^2 = a^2 - a_0^2 \quad (14)$$

式中:  $r_x$  为土单元目前的径向位置;  $a$  为任一时刻圆柱孔半径.

联立式(13)、(14), 并以最终弹塑性边界上的点为研究对象, 即令  $r_x$ 、 $r_{xp}$  均等于  $r_p$ , 可得

$$r_p = \sqrt{\frac{a^2 - a_0^2}{1 - (1 - \frac{\sigma_{rp} - p_0}{2G_0})^2}} \quad (15)$$

式中:  $G_0$  为初始剪切模量.

根据图 1 中的几何关系, 可知

$$r_x^2 - r_{x0}^2 = r_p^2 - r_{p0}^2 \quad (16)$$

将  $r_x - r_{x0} = u_{r,p}$ ,  $r_p - r_{p0} = u_p$  代入式(16), 并用  $r$  代替  $r_x$ , 则塑性区的径向位移可以表示为

$$u_{r,p} = r - \sqrt{r^2 - 2r_p u_p + u_p^2} \quad (17)$$

至此, 单桩静力压入时引起的扩孔挤土位移已求得: 其弹性区 ( $r > r_p$ ) 的表达式如式(4)所示; 塑性区 ( $a_0 \leq r \leq r_p$ ) 的表达式如式(17)所示. 然而该挤土位移没有考虑地表边界的影响, 是假设桩无限长情况下的解, 因而需要通过引入函数进行修正.

## 2 考虑地表边界效应的挤土位移

### 2.1 修正函数

确定修正函数的基本思路和步骤是: 将长为  $h$  的桩看作一系列的扩张球孔, 通过与镜像位置的虚拟扩张孔叠加得到考虑地表边界影响的弹性挤土位

移解<sup>[12]</sup>, 如图 2 所示, 该解答与无限长桩体弹性挤土位移解之间的比值即为拟确定的修正函数. 假定该函数在桩周土的塑性区仍然适用, 则其与平面应变条件下挤土位移弹塑性解的乘积即为最终考虑地表边界效应的沉桩挤土位移弹塑性解. 如此, 该解答不仅考虑了地表边界效应的影响, 还可以考虑土体特性的影响. 下面介绍具体的求解过程.

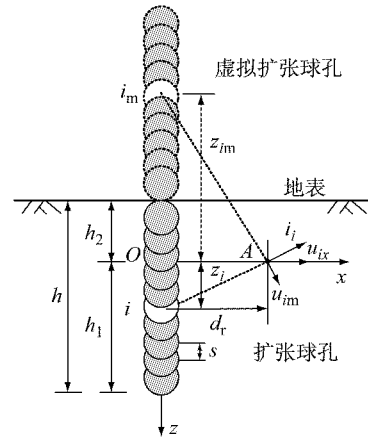


图 2 一系列球孔扩张模拟沉桩过程<sup>[12]</sup>

Fig. 2 Pile installation simulated as a series of spherical cavity expansions<sup>[12]</sup>

在 MCC 模型土中, 单个扩张球孔挤土时, 有

$$\sigma_{rps} = p_0 + \frac{q_p}{2} \quad (18)$$

$$u_{ps} = \frac{\sigma_{rps} - p_0}{4G} r_{ps} \quad (19)$$

$$u_{rs,e} = \frac{\sigma_{rps} - p_0}{4G} \left(\frac{r_{ps}}{r}\right)^3 r \quad (20)$$

式中:  $\sigma_{rps}$  和  $u_{ps}$  分别为扩张球孔周围土体弹塑性边界上的径向应力和位移;  $r_{ps}$  为弹塑性边界处的半径;  $u_{rs,e}$  为弹性区内的径向位移.

任意埋深处沉桩产生的挤土位移  $u_{Ax}$  可以通过对一系列扩张球孔及虚拟扩张球孔挤土位移叠加得到

$$u_{Ax} = \frac{d_r}{s} \int_{-h_2}^{h_1} \frac{u}{\sqrt{d_r^2 + z^2}} dz + \frac{d_r}{s} \int_{h_2}^{h_2+h} \frac{u}{\sqrt{d_r^2 + z^2}} dz \quad (21)$$

式中:  $d_r$  是点 A 到桩中心的水平距离;  $s$  为相邻两球孔球心之间的距离;  $z$  为某一球心到点 A 的竖向距离;  $u$  为某一扩张球孔在点 A 产生的径向位移;  $h_1$  和  $h_2$  分别为点 A 到桩底和桩顶的竖向距离.

当式(20)代入式(21)时, 可得到点 A 位于静压桩的弹性区内时挤土位移, 其与圆柱孔弹性挤土位移(式 4)比值可作为修正函数  $f$ , 即

$$f = \frac{1}{2} \left[ \frac{h_1}{\sqrt{d_r^2 + h_1^2}} + \frac{h_2 + h}{\sqrt{d_r^2 + (h_2 + h)^2}} \right] \quad (22)$$

需要时指出的是,在 MCC 模型土中,在假设球孔与柱孔的弹塑性边界处的半径相同( $r_{ps} = r_p$ )的情况下,推导得到的两相邻球心之间距离  $s = 2r_{ps} / \sqrt{3}$ 。

扩张球孔及其对应的镜像扩张球孔叠加后,能够满足地表剪应力为零的条件,正应力为零的条件则不能被严格满足。为此,图 3 中计算了大小为 100 kPa 的水平和竖向荷载  $p$  分别作用在地表时,1 m 远处土体水平方向应变随深度的变化。其中  $E/p = 10$ ,  $E$  为弹性模量;泊松比  $\nu$  为 0.3。

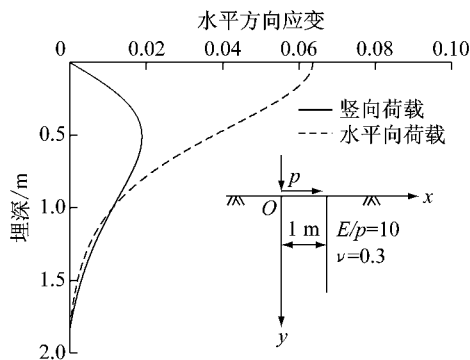


图 3 不同方向荷载在水平方向产生的应变

Fig. 3 Strain in horizontal direction caused by stresses from different directions

由图 3 可见,在埋深较浅处(0~0.5 m),水平荷载引起水平方向的应变要远远大于竖向荷载引起的竖向应变。这说明对于土体中侧向位移,地表正应力的影响要远远小于剪应力的影响。由于本文主要研究沉桩侧向挤土位移,因此不再对地表正应力条件作进一步的修正。

### 2.2 挤土位移的确定

式(21)为积分表达式,尽管式中  $u$  根据点 A 与球心之间的相对位置,可以是弹性或者是塑性位移解,然而塑性解并不满足线性叠加的条件,因此,以弹性区位移的比值  $f$  来折减平面应变条件下无限长桩弹性挤土位移(式 22)是一种近似的修正方法。修正后的单桩挤土位移可以表示为

$$u = u_1 f \quad (23)$$

式中: $u_1$  为单桩挤土初始位移,当 A 点位于弹性区时, $u_1$  可由式(4)得到;当 A 点位于塑性区时, $u_1$  可由式(17)得到。

## 3 实例验证

为了验证本文理论分析模型的可靠性,对浙江

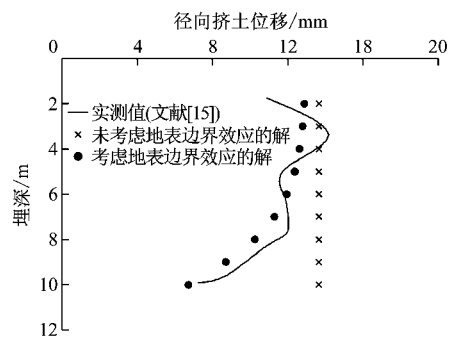
省秦山核电静压桩施工过程中的挤土位移进行了计算,并与现场试验结果<sup>[15]</sup>进行对比分析。现场采用直径为 600 mm、桩长为 35 m 的预应力管桩基础。工程场地 20 m 深度范围内的土层向下依次是杂填土、粉质黏土、黏质粉土以及淤泥质粉质黏土。假设土体超固结比  $R_{OC} = 1$ ,压缩模量  $E_s = 2$  MPa,泊松比  $\nu = 0.3$ ,其余参数见表 1。

表 1 土的物理力学参数<sup>[15]</sup>

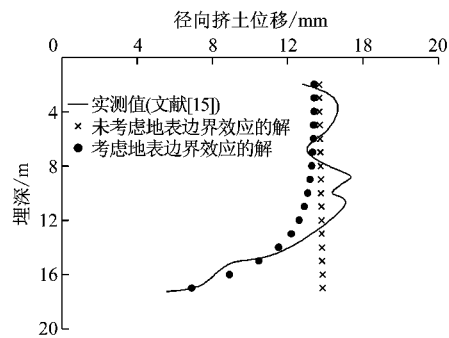
Tab. 1 Physical-mechanical parameters of soils<sup>[15]</sup>

土层	层厚/ m	含水量/ %	重度/ ( $\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$ )	孔隙比	比贯入阻 力/MPa
杂填土	2.0		19.0		1.38
粉质黏土	2.0	26.0	19.4	0.77	1.10
黏质粉土	7.0	31.1	18.8	0.89	1.37
淤泥质粉质黏土	9.0	41.6	17.5	1.20	0.66

当压桩深度为 10 m 时,距离桩中心 3 m 远处土体的径向位移沿深度变化如图 4a 所示。当基于平面应变假定,将沉桩过程简单地看作圆柱孔的扩张时,得到的挤土位移解随着埋深变化并不明显,且在埋深 6~10 m 范围内明显大于实测值。这是因为该解中假设桩身无限长,没有地表边界效应的影响,而计算过程中又对部分参数进行统一取值,因而不同深度处的挤土位移变化不大。当引入考虑压桩深度和



a 压桩深度 10 m



b 压桩深度 17 m

图 4 径向挤土位移随压桩深度的变化

Fig. 4 Radial displacements versus pile penetration depth

地表边界的修正函数(式 22)后,预测的挤土位移与实测值更为接近.图 4b 为压桩深度为 17 m 时的挤土位移,修正后的挤土位移与实测值变化趋势较为一致,但在埋深 8~12 m 处,预测值比实测值小 16% 左右.

### 4 影响因素分析

为了系统地调查静压沉桩过程中的挤土特性,分析了沉桩过程中的预钻孔孔径、桩径以及土体超固结比对距地表 2 m,距桩轴线 3 m 处的土体侧向位移的影响.图 5a 为埋深 2 m 处土体挤土位移的变化.由图 5a 可知,随着到桩中心距离的增大,挤土位移不断减小,当距桩中心距离约为 5 m 时,挤土位移接近于 0;静压桩沉桩挤土影响显著的区域主要集中在距桩 1 m 范围内.当预钻孔半径  $a_0$  依次取 0、0.1 和 0.2 m 时,挤土位移逐渐减小,且位移减小幅度随预钻孔孔径的增大而增大,如距桩中心 1 m 处,当  $a_0$  为 0.1 m 时,挤土位移较无预钻孔时减小了 11.3%,而当  $a_0$  增大到 0.2 m 时,挤土位移较  $a_0=0.1$  m 时减小了 38%.

由图 5b 可知,在距桩 3 m 远处,侧向挤土位移沿埋深的增加而减小;在埋深 6 m 以下,位移减幅增

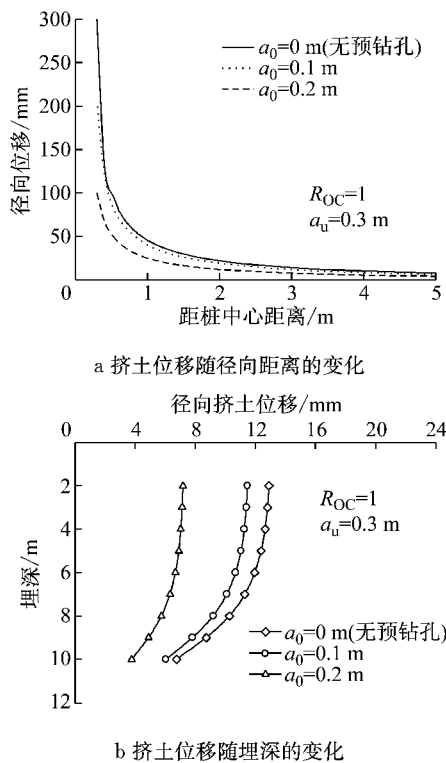


图 5 预钻孔对挤土位移的影响

Fig. 5 Influence of prebored hole on radial displacement caused by pile installation

大.预钻孔半径  $a_0$  依次取 0、0.1 和 0.2 m 时,可以看到,沉桩挤土位移随着预钻孔的增大逐渐减小,且位移减小幅度随预钻孔孔径的增大而增大.如在埋深 2 m 处,当  $a_0$  为 0.1 m 时,挤土位移较无预钻孔时减小了 10.9%;而当  $a_0$  增大到 0.2 m 时,挤土位移较  $a_0=0.1$  m 时减小了 37.4%.

土体径向位移与桩径的关系如图 6 所示.其中,图 6a 和 6b 分别反映的是固定埋深和固定径向位置处土体侧向位移随沉桩过程的变化.由图 6 可知,随着桩径  $a_u$  的增大,径向挤土位移逐渐增大.桩径等值增大时,挤土位移并非线性增大.例如,在图 5b 中,当桩径  $a_u$  从 0.2 m 增加到 0.3 m 时,埋深 2 m 处的挤土位移增加了 7.2 mm;而当  $a_u$  从 0.3 m 增加到 0.4 m 时,该处的挤土位移增加了 10.1 mm.

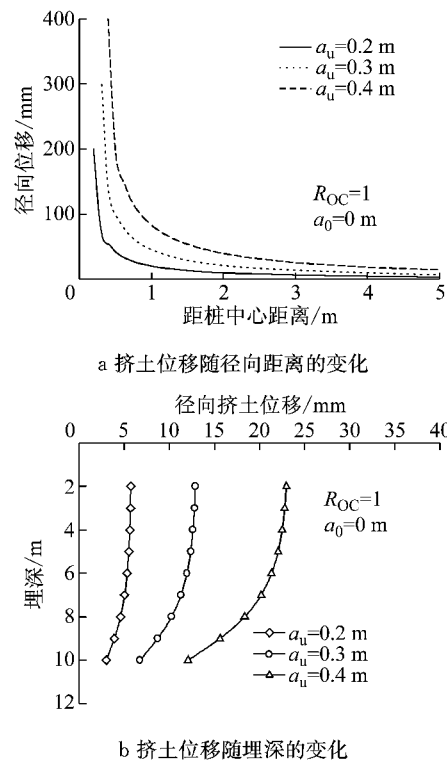


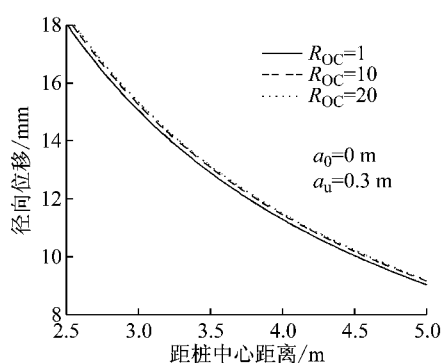
图 6 桩径对径向挤土位移的影响

Fig. 6 Influence of pile diameters on radial displacement caused by pile installation

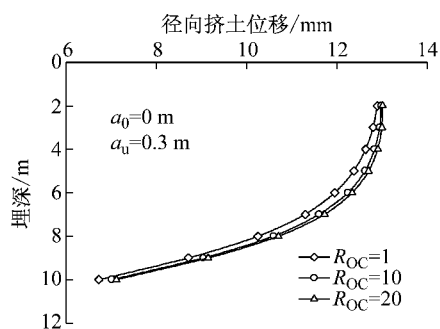
取不同  $R_{OC}$  时,沉桩径向挤土位移如图 7 所示.由图 7a 和 7b 可见,随着  $R_{OC}$  的增大,挤土位移有所增加.这是因为与正常固结土相比,超固结土的密实度高,土颗粒之间的空隙小,排列紧密;因而,对于距桩同样距离的土颗粒而言,超固结状态下,其受到的挤压作用较明显,位移也略大.

本文所提的模型由于考虑了地表边界效应的影响,较无限体假定情况下能更好地预测沉桩挤土位移.但需要指出的是,由于该模型中采用的土体本构

关系是基于重塑土提出,在分析现场沉桩问题时还存在一定的局限性.这是因为天然黏土大多具有结构性,蒋明镜等<sup>[16]</sup>研究指出天然结构性黏土具有独特的力学性质.因此,利用本文模型预测天然土中沉桩挤土位移时仍存在一定的偏差,这也一定程度上解释了图 4 中理论预测值与实测结果仍存在较大差异的原因.图 8 中将陈文等<sup>[17]</sup>的沉桩挤土(重塑黏土)离心模型试验结果与本文计算结果进行了对比,结果显示本文方法在预测重塑土中的沉桩挤土问题更为准确.



a 挤土位移随径向距离的变化



b 挤土位移随埋深的变化

图 7 超固结比对径向挤土位移的影响

Fig. 7 Influence from  $R_{OC}$  on the radial displacement caused by pile installation

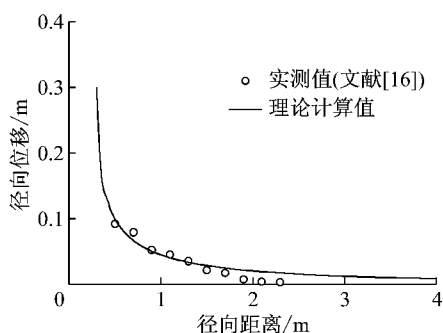


图 8 计算结果与重塑土中实测值的比较

Fig. 8 Comparison of calculated results and measured data in remoulded soils

## 5 结论

(1) 本文基于圆柱孔在修正剑桥模型土中的扩张理论推导了静压桩的初始挤土位移解,通过引入近似的修正函数来考虑地表边界效应以及沉桩深度的影响,与文献实测结果的对比较验证了本文方法的可靠性.由于该方法提出的挤土位移表述形式简洁、物理意义明确,易于在实际工程应用.

(2) 计算分析表明,随着预钻孔孔径的增大,沉桩挤土位移非线性减小;随着桩径的增大,挤土位移呈非线性增大;当土体超固结比增大时,挤土位移也略有增长,这是由于超固结土颗粒排列紧密,受到的挤压作用明显所致.

(3) 本文通过设置镜像扩张球孔来考虑地表边界的影响,适用于估算沉桩挤土引起的径向位移;对于沉桩时地表发生的竖向位移场分布,将在后续工作中进一步研究.

## 参考文献:

- [1] BALIGH M M. Strain path method[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1985, 111(9):1108.
- [2] BALIGH M M. Undrained deep penetrationshear I: stresses [J]. *Geotechnique*, 1986, 36(4): 471.
- [3] BALIGH M M. Undrained deep penetration II: pore pressures [J]. *Geotechnique*, 1986, 36(4): 486.
- [4] SAGASETA C. Analysis of undrained soil deformation due to ground loss[J]. *Geotechnique*, 1987, 37(3):301.
- [5] CHOW Y K, TEH C I. A theoretical study of pile heave[J]. *Geotechnique*, 1990, 40(1): 1.
- [6] 黄院雄,许清伙,胡中雄. 饱和土中打桩引起桩周围土体的位移[J]. *工业建筑*, 2000, 30(7):15.  
HUANG Yuanxiong, XU Qingxia, HU Zhongxiong. Soil's displacement due to driving pile in saturated clay[J]. *Industrial Construction*, 2000, 30(7):15.
- [7] 饶平平,崔纪飞,赵琳学,等. 非轴对称位移边界下球孔扩张挤土位移弹性解答[J]. *岩土力学*, 2016, 36(4): 991.  
RAO Pingping, CUI Jifei, ZHAO Linxue, et al. Elastic solution to squeezing displacement of spherical cavity expansion under nonaxisymmetric displacement boundary[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, 36(4):991.
- [8] VESIC A S. Expansion of cavities in infinite soil masses[J]. *J Soil Mech Found Div, ASCE*, 1972, 98(3):265.
- [9] YU H S. *Cavity expansion methods in geo-mechanics* [M]. London: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [10] RANDOLPH M F, CARTER J P, WROTH C P. Driven piles in clay-the effects of installation and subsequent consolidation[J]. *Geotechnique*, 1979, 29(4):361.