

基于轮轨非 Hertz 接触的影响系数的有限元计算方法

杨新文, 姚一鸣, 周顺华

(同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 201804)

摘要: 采用非 Hertz 接触理论求解轮轨接触问题时, 影响系数对轮轨接触应力与接触斑大小产生重要影响。由于当车轮轮缘与钢轨在轨距角处发生接触时, 非 Hertz 接触理论中基于弹性半空间条件下的影响系数已不适用, 所以利用有限元方法求解了全空间内轮轨非 Hertz 接触的影响系数, 并对 Kalker 的非 Hertz 接触理论做了修正。在保证计算效率的前提下, 以 30 t 轴重重载铁路 CHN75 钢轨和 LM 磨耗车轮踏面为例, 采用修正的非 Hertz 理论及轮轨接触分区模型 P_M (partition model) 分别计算了轮对横移量为 0~8 mm 时的轮轨接触斑面积及接触斑应力。研究结果表明, 用有限元法计算出的影响系数大于 Bossinisqe-Cerruti 公式求出的影响系数, 并且在轨距角处的影响系数大于轨顶处。修正的非 Hertz 理论计算出的法向应力和接触斑面积始终要比 P_M 模型计算出的法向应力略大一些, 且随轮对横移量的增加, 两种轮轨法向接触模型计算出的法向应力和接触斑趋势一致。当横移量为 0~4 mm 时, 最大接触斑面积可达 173.75 mm², 轮轨型面较为匹配; 当横移量持续增大时, 由于车轮与钢轨轨距角接触, 接触面积急剧降低, 同时法向应力急剧增大。

关键词: 重载铁路; 轮轨接触; Bossinisqe-Cerruti 公式; 分区模型

中图分类号: U239.4

文献标志码: A

Calculation of Influencing Number of Wheel-Rail Non-Hertz Contact Using Finite Element Method

YANG Xinwen, YAO Yiming, ZHOU Shunhua

(Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: When wheel/rail contact problems are solved using non-Hertz contact theory, the influencing numbers have more important effect on wheel/rail contact stress and contact patch. When a contact between wheel flange and rail gauge angle occurs, the influencing number of non-Hertz contact

theory based on elastic half space hypothesis is not applicable. Based on elastic full space hypothesis, a finite element method was presented to calculate wheel/rail contact influence number of non-Hertz contact theory, and the non-Hertz contact model was innovatively revised. As an example of wheel/rail contact profile of the CHN75 standard rail and LM standard wheel in China, under the calculation of high efficiency, two wheel/rail contact models (revised non-Hertz method and wheel/rail profile partition model P_M (Partition Model)) were used to calculate the wheel/rail normal contact stress and contact patch area when lateral displacement of the wheelset ranged from 0 mm to 8 mm. The results show that the influencing number calculated by finite element method is larger than that obtained by using Bossinisqe-Cerruti formula. And the result calculated by finite element method on the rail gauge corner is larger than that on the top of the rail. The normal stress calculated by revised non-Hertz theory is larger than that calculated by the P_M model, and the change of the normal contact stress and contact patch area calculated by two wheel/rail contact model is almost the same with the increase of the lateral displacement of the wheelset. When the lateral displacement of the wheelset is 0 to 4 mm, the maximum of the wheel/rail contact patch area is 173.75 mm² and the wheel/rail contact profile is best matched. With the increase of the lateral displacement of the wheelset, the contact between the wheel flange and rail gauge corner will be produced and the wheel/rail contact area decreases while the normal contact stress increases dramatically.

Key words: heavy haul railway; wheel/rail contact; Bossinisqe-Cerruti formula; partition model

轮轨滚动接触疲劳和磨损是铁路运营中不可避免的问题, 尤其在重载铁路运营中, 钢轨磨耗更为严重。而轮轨接触应力状态与钢轨磨耗程度密切相关。

关于轮轨接触理论, 国内外学者进行了大量研

收稿日期: 2017-03-16

基金项目: 国家自然科学基金(51378395); 牵引动力国家重点实验室开放基金(TPL1602)

第一作者: 杨新文(1973—), 男, 副教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为铁路噪声与振动, 轮轨关系, 列车与线路系统动力学, 铁路轨道结构与养护维修等。E-mail: yangxinwen0603@163.com

通讯作者: 周顺华(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为铁道工程与地下隧道。E-mail: zhoushh@tongji.edu.cn

究. 20 世纪 90 年代初, Kalker 等^[1]发展了三维弹性体非 Hertz 滚动接触理论及其数值方法 CONTACT, 该理论被称做轮轨滚动接触分析的完全理论; 随后又开发了简化理论及其数值方法 Fastsim. Hedrick^[2]对 V-J 非线性蠕滑定律做了改造, 形成了小自旋情形下三维非线性蠕滑率/力计算模型. Li^[3]在非 Hertz 滚动接触理论基础上, 在四分之一弹性空间内用有限元法对轮轨接触影响系数进行了修正, 针对钢轨轨距角处发生的共形接触问题进行了研究. 杨新文等^[4-6]利用切片投影法寻找接触区域, 并以分区计算模型修正 Hertz 理论求出了非椭圆斑上的法向应力. Teliskivi 等^[7]利用有限元软件 ANSYS 分析了轮轨接触应力和接触区域, 并与 Hertz 接触理论和完全接触理论进行了比较.

由于当车轮轮缘与钢轨在轨距角处发生接触时, 非 Hertz 理论中基于弹性半空间条件下的影响系数已不适用, 因此, 本文利用切片投影法找出轮轨接触点, 然后利用有限元法在全空间内对非 Hertz 理论中的影响系数进行插值计算, 在保证计算效率的前提下, 更加精确地求解轮轨法向应力, 为轮轨滚动接触疲劳和磨损问题的研究提供理论基础, 并与 P_M 模型求出的轮轨法向应力进行了对比.

1 轮轨法向接触应力计算方法

1.1 非 Hertz 接触理论

1982—1992 年, Kalker 基于弹性力学能量原理发展了三维非 Hertz 滚动接触理论 CONTACT, 在弹性半空间的假设下, 利用 Bossinisqe-Cerruti 公式及牛顿迭代法, 可以求出三维轮轨滚动接触的精确解. 图 1 为矩形区域中离散的接触斑, Δx_1 、 Δx_2 为单元网格的纵向边长和横向边长. 区域 Ω 为接触斑范围, 也即离散的区域中发生接触的部分. p_I 为单个网格内的应力.

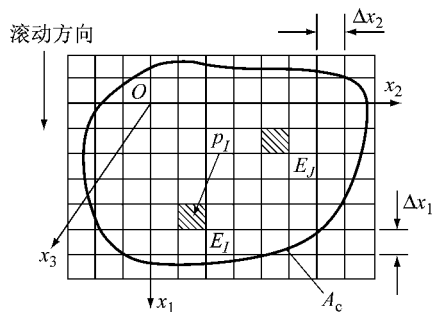


图 1 矩形网格离散接触斑
Fig. 1 Discrete mesh of contact patch

在该模型中, 基于弹性力学, 余能原理的离散形式为^[8]

$$\begin{cases} \min C = \frac{1}{2} p_{I3} A_{I3J3} p_{J3} + [(h_J - q) p_{J3} + \\ (W_{J\tau} - u'_{J\tau}) p_{J\tau}] A_0 \\ \text{s. t. } p_{J3} \geq 0 \quad |p_{J\tau}| \leq b_J \quad \forall x \in A_c \\ A_0 \sum_J^M p_{J3} = F_N \end{cases} \quad (1)$$

式中: $i, j=1, 2, 3$, 为接触斑切平面局部坐标系的坐标轴 x_1, x_2, x_3 的 3 个方向; $\tau=1, 2$, 为接触斑局部坐标系的坐标轴 x_1, x_2 的 2 个方向; I, J 为矩形单元的编号; p_{ji} 为作用在单元 J 上的应力沿 i 轴的作用力分量, 在同一个单元上, 把它看成常数; q 为轮轨在 x_3 方向的弹性压缩量; A_{I3J3} 为影响系数, 表示单元 I 上作用沿 i 轴方向的单位力引起单元 J 中心处沿 j 轴方向发生的位移; F_N 为法向轮轨力; h_J 为轮轨接触面之间的法向间隙在单元 J 中心处的分量, 通过轮轨接触几何计算确定; $W_{J\tau}$ 为轮轨间的刚性滑动量; $u_{J\tau}$ 为轮轨间的弹性位移量; A_c 为全部矩形单元; A_0 为矩形单元面积, $A_0 = \Delta x \times \Delta x = 0.5 \text{ mm} \times 0.5 \text{ mm} = 0.25 \text{ mm}^2$; b_J 为 J 单元中心处库仑极限摩擦力.

1.2 法向问题的求解

如果不考虑轮轨材料本构模型的差异, 求解法向问题时, 可把式(1)化简成下式进行计算:

$$\begin{cases} \min C = \frac{1}{2} p_{I3} A_{I3J3} p_{J3} + (h_J - q) p_{J3} A_0 \\ \text{s. t. } p_{J3} \geq 0 \quad \forall X \in A_c \\ A_0 \sum_J^M p_{J3} = F_N \end{cases} \quad (2)$$

引入 Lagrange 乘子 λ_{J3} , 法向问题的 Kuhn-Tucker 条件为

$$\begin{aligned} h_1 - q + \lambda_{13} + \sum_I A_{I313} p_{I3} &= 0 \\ h_2 - q + \lambda_{23} + \sum_I A_{I323} p_{I3} &= 0 \\ &\vdots \\ h_M - q + \lambda_{M3} + \sum_I A_{I3M3} p_{I3} &= 0 \\ \lambda_{M3} p_{13} &= 0 \\ \lambda_{M3} p_{23} &= 0 \\ &\vdots \\ \lambda_{M3} p_{M3} &= 0 \\ F_n - A_0 \sum_J p_{J3} &= 0 \\ p_{J3} \geq 0, J = 1, 2, \dots, M \\ \lambda_{J3} \geq 0, J = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (3)$$

方程(3)总共有 $2M+1$ 个独立变量,其中 p_{J3} 为 M 个, λ_{J3} 为 M 个, q 为 1 个. $p_{J3} \geq 0, \lambda_{J3} \geq 0$ 为约束条件. 针对非线性方程组(3), 利用 Newton-Raphson 法即可求得法向应力 p_{J3} .

1.3 影响系数的修正

影响系数 A_{J3J3} 是指在接触区某一点施加一个单位荷载, 从而引起的另一点的位移. 它对式(3)求解的精度和迭代过程中的数值稳定性都有重要影响. 在 CONTACT 中, 影响系数可通过 Bossinisqe-Cerruti 公式求出. 但是当车辆通过曲线段时, 钢轨轨距角和车轮轮缘经常发生接触, 轮轨接触半径和接触区尺寸接近, 半空间假设不再成立, 而有限单元法则不受半空间假设的限制, 因此可以用有限单元法来计算影响系数.

根据我国重载铁路标准 LM 型踏面和 CHN75 钢轨型面, 建立轮轨结构三维有限元模型, 如图 2 和图 3 所示. 车轮和钢轨均用实体单元 SOLID45 进行离散. 钢轨与车轮泊松比分别为 0.29 和 0.30, 弹性压缩模量分别为 214 000 MPa 和 210 000 MPa. 根据影响系数的对称性, 为了节省计算时间, 车轮有限元模型建立一半, 并在可能发生的接触范围进行网格加密, 施加对称约束.

由于网格尺寸微小, 有限元模型单元数太大, 因此计算速度会很慢. 如图 4、图 5 所示, 为了保证计算

效率, 在有限元模型中只在主轮廓线上的节点施加单位力, 并提取出整个可能出现的接触范围内的法向位移. 在求出法向间隙后, 通过三次多项式插值的方法求出法向间隙内的影响系数 A_{J3J3} .

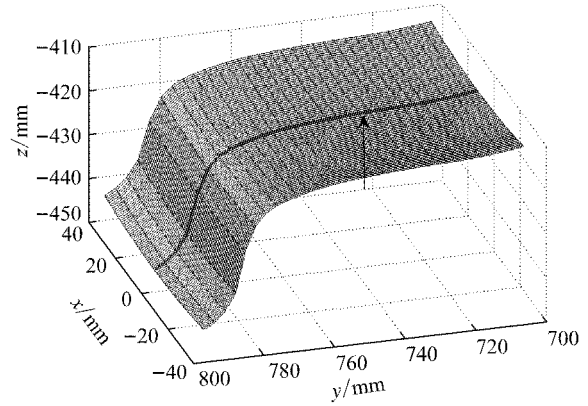


图 4 车轮影响系数取值范围及荷载施加位置
Fig. 4 Range of influencing number of the wheel and the load position applied

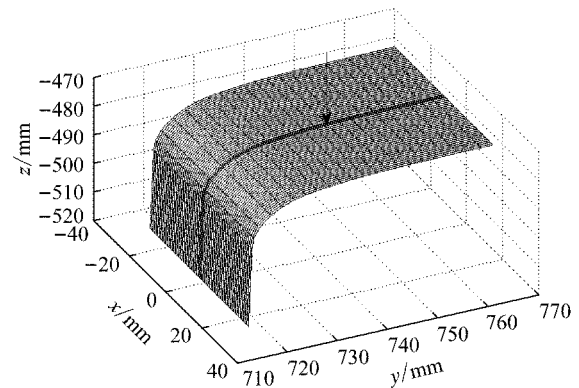


图 5 钢轨影响系数取值范围及荷载施加位置
Fig. 5 Range of influencing number of the rail and the load position applied

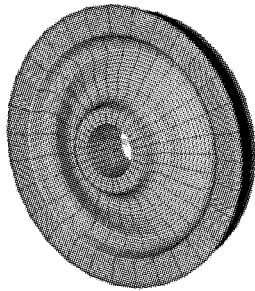


图 2 车轮有限元模型
Fig. 2 Finite element model of the wheel

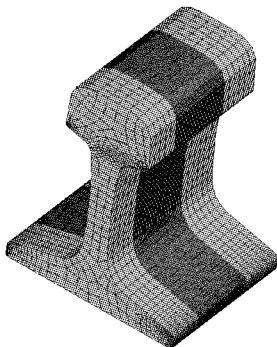


图 3 钢轨有限元模型
Fig. 3 Finite element model of the rail

具体步骤如下:

(1)有限元模型中, 车轮和钢轨分别在各自坐标系下建模, 所以首先要统一坐标系. 如图 6 所示, 在

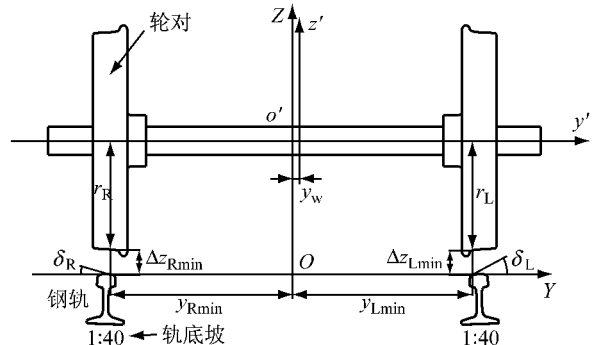


图 6 轮轨坐标系示意图
Fig. 6 Wheel/rail coordinate system

轮对坐标系 $o'z'y'$ 中,将车轮坐标 x'_i, y'_i, z'_i 按公式 (4) 转过一个侧滚角 φ_w 和一个摇头角 θ_w , 并偏移一个横移量 y_w 后,转到钢轨坐标系 OZY 中,则分别得到车轮和钢轨的所有可能发生的接触范围 Ω 。

(2) 如图 7 所示,在确定轮轨的法向间隙范围 Ω' 后,如果要求在点 A' 作用法向单位力时, Ω' 范围内其他点的法向位移,则要找到点 A' 距离范围 Ω 内的最近点 A , 并将点 A' 移动到位于主轮廓线上的,与 A 点同在一个 ZY 平面上的 B 点,同时范围 Ω' 内的其他点移动相同的距离。

$$\begin{cases} x_i = x'_i \cos \varphi_w - y'_i \cos \theta_w \sin \varphi_w + z'_i \sin \theta_w \sin \varphi_w \\ y_i = x'_i \sin \varphi_w + y'_i \cos \theta_w \cos \varphi_w - z'_i \sin \theta_w \cos \varphi_w + y_w \\ z_i = y'_i \sin \theta_w + z'_i \cos \theta_w \end{cases} \quad (4)$$

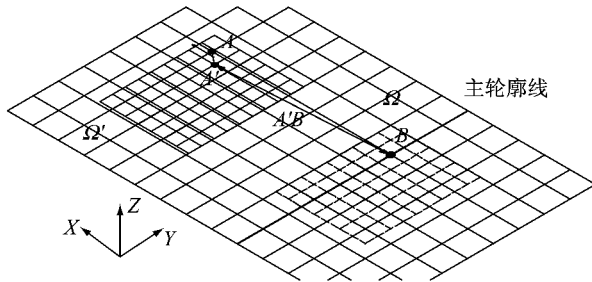


图 7 影响系数插值范围

Fig. 7 Interpolation range of influencing number

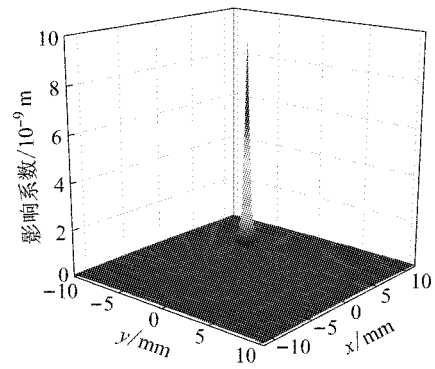
(3) 得到移动后的法向间隙范围 Ω' 内的坐标 x', y' 后,则可以通过 MATLAB 中的 griddata 函数对范围 Ω 内的坐标 x, y 及已经求得的 B 点的影响系数进行插值计算,进而可以求得 A' 点的范围 Ω' 内的影响系数. 有限元法得到钢轨的接触影响系数为 A_{I3J3} , 车轮的接触影响系数为 A_{I3J3}^w . 则最终需要代入方程 (3) 获得综合的影响系数为

$$A_{I3J3} = (A_{I3J3}^r + A_{I3J3}^w) / 2 \quad (5)$$

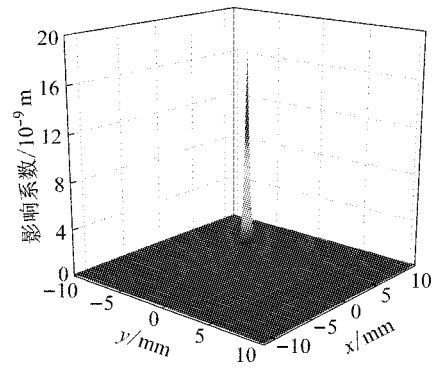
有限元法计算得到的影响系数及 Bossinisqe-Cerruti 公式求出轮轨接触的影响系数见图 8。

图 8 为在轨顶处 $45 \text{ mm} \times 43 \text{ mm}$, 边长 0.5 mm 的网格范围中心施加单位力得到的影响系数,可以看出 2 种方法得到的影响系数形式基本一致. Bossinisqe-Cerruti 公式求出的影响系数最大值为 $9.731 \times 10^{-9} \text{ m}$, 有限元法得到的钢轨影响系数最大值为 $1.61 \times 10^{-8} \text{ m}$, 车轮影响系数最大值为 $1.38 \times 10^{-8} \text{ m}$ 。

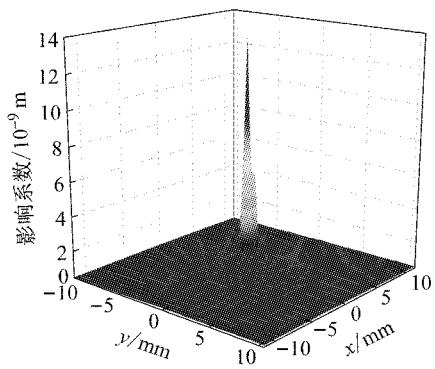
图 9 为 2 种方法在钢轨不同位置处施加单位力得到的主轮廓线上的影响系数对比. 在轨顶处, Bossinisqe-Cerruti 公式求出的影响系数最大值为



a Bossinisqe-Cerruti 公式结果



b 有限元法钢轨影响系数



c 有限元法车轮影响系数

图 8 轮轨接触影响系数

Fig. 8 Influencing number of wheel/rail contact

$9.731 \times 10^{-9} \text{ m}$, 有限元法得到的钢轨影响系数最大值为 $1.54 \times 10^{-8} \text{ m}$. 在轨距角处, Bossinisqe-Cerruti 公式求出的影响系数最大值为 $9.731 \times 10^{-9} \text{ m}$, 有限元法得到的钢轨影响系数最大值为 $1.61 \times 10^{-8} \text{ m}$. 由图 8 可知, Bossinisqe-Cerruti 公式求出的影响系数轨顶与轨距角都一样, 而利用有限元法得到的钢轨影响系数轨顶与轨距角处都不一样, 在轨距角处的影响系数大于轨顶处, 这是因为轨距角处型面变化明显, 已不再符合半空间的条件。

1.4 P_M 接触模型

P_M(partition model) 接触模型^[6] 是一种基于 Hertz 接触理论, 在车轮和钢轨接触轮廓型面不同弧

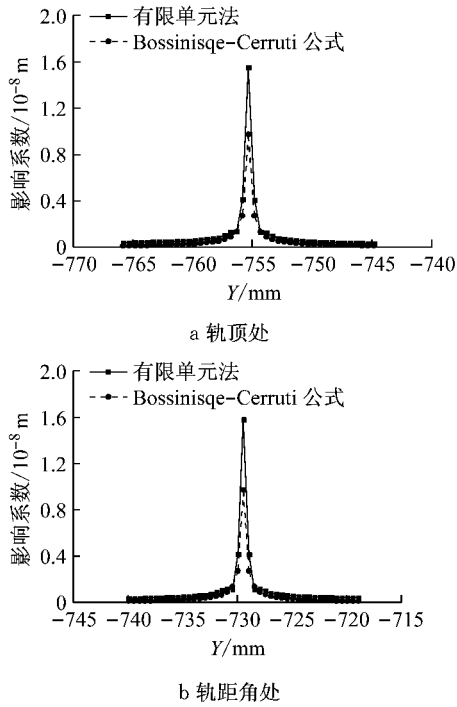


图 9 2 种方法不同部位影响系数对比

Fig. 9 Comparison of influencing number on different parts of the two methods

段进行分区后,先分开分析,然后通过连续性条件将各块接触斑连接起来,进而求出法向应力的接触模型。

对于两个椭圆弹性物体接触,Hertz 接触理论可得到应力呈椭圆形分布的接触斑.在已知法向接触力 N 的条件下,接触斑的弹性压缩量 δ 、长半轴 b 、短半轴 a 及最大应力 p_0 可由下式求出:

$$a = m \left[\frac{3G^* N}{4(A+B)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (6)$$

$$b = n \left[\frac{3G^* N}{4(A+B)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

$$\delta = \frac{K(e)}{\pi m} \left[\frac{9}{2} (A+B) G^{*2} N^2 \right]^{\frac{1}{3}} \quad (8)$$

$$p_0 = \frac{1}{\pi m n} \left[\frac{6(A+B)^2 N}{G^{*2}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

式(6)~(9)中: A 和 B 为接触参数; $K(e)$ 表示第一类椭圆积分,其他接触参数如下:

$$G^* = \frac{1-\nu_1}{2G_1} + \frac{1-\nu_2}{2G_2} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (10)$$

$$m = \left[\frac{2E(e)}{\pi(1-e^2)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (11)$$

$$n = m\sqrt{1-e^2} = \left[\frac{2E(e)}{\pi} \right]^{\frac{1}{3}} (1-e^2)^{\frac{1}{6}} \quad (12)$$

式(10)~(12)中: ν_1 和 ν_2 分别为车轮和钢轨的泊松比; G_1 和 G_2 分别为车轮和钢轨的剪切模量; E_1 和

E_2 分别为车轮和钢轨的弹性模量; $E(e)$ 表示第二类椭圆积分; e 为 $\sqrt{1-(b/a)^2}$, $b < a$.

在轮轨发生接触的区域,钢轨及车轮的曲率半径会有变化,因此若只用轮轨刚性接触点处的曲率半径去计算接触参数 A 、 B ,进而得到的接触斑和接触应力必然是不准确的. P_M 模型首先根据车轮和钢轨的曲率变化对接触区域进行分区,再根据变化后的接触形状对接触应力进行修正。

如图 10 所示,根据曲率半径的不同将接触区域分为 3 部分, Zone1、Zone2、Zone3,保持中心区域 Zone1 不变,修正其他区域,修正的原则是确保接触边界上的法向间隙相等.接触区域修正后,法向接触应力的合力也跟着发生改变,不再等于轮轨法向接触应力 N . 刚性接触点 O 处的接触应力 p_0 根据 Hertz 理论可以得到,中心接触区域的边界点 J 和 K 处的接触应力也可以得到,分别为 p_J 和 p_K ,进而可以得到 3 个接触区域各自的应力分布.通过求和即可得到新的法向力 N' ,若 N' 与 N 不满足误差要求,则根据式(12)对最大应力 p_0 进行修正,从而得到新的接触斑.重复以上步骤,直到 N' 与 N 满足误差要求为止。

$$p'_0 = p_0 \left(\frac{N'}{N} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

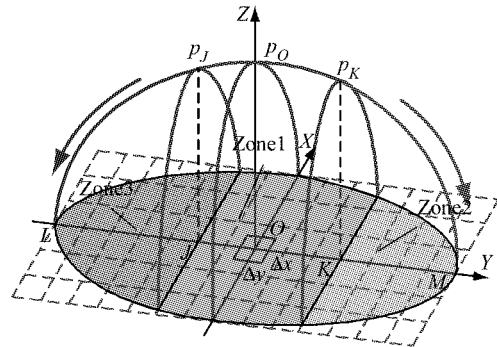


图 10 修正后应力分布

Fig. 10 Modified stress distribution

2 算例

2.1 重载铁路轮轨踏面

采用重载铁路标准 CHN75 轨型面和 LM 型车轮踏面,如图 11 和图 12 所示。

2.2 接触应力对比

30 t 轴重重载铁路轨道在摇头角等于 0° 的情况下,用修正的非 Hertz 法与 P_M 分区法得到在轮对横移量为 0、4 和 8 mm 时的法向应力 p 如图 13~15 所示。

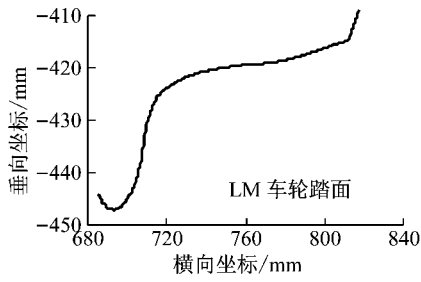


图 11 LM 车轮踏面轮廓
Fig. 11 Profile of LM wheel

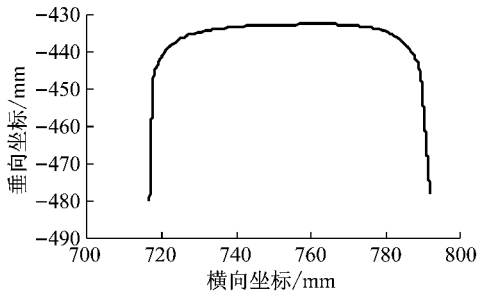


图 12 CHN75 轨型面轮廓
Fig. 12 Profile of CHN75 rail

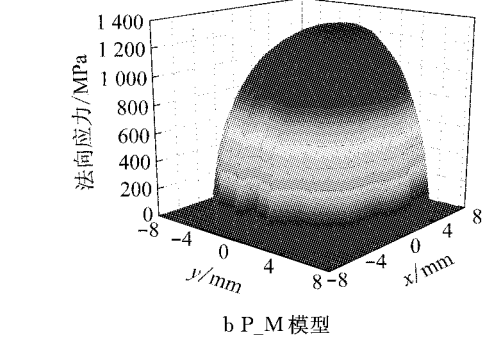
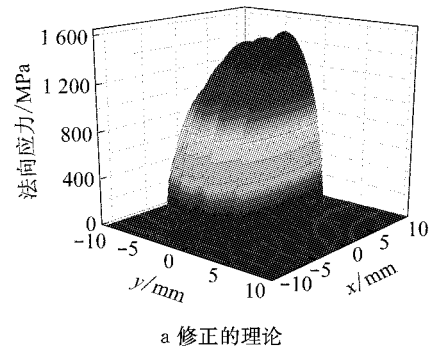


图 14 轮对横移量为 4 mm 时法向应力对比
Fig. 14 Normal stress comparison when lateral displacement of the wheelset is 4 mm

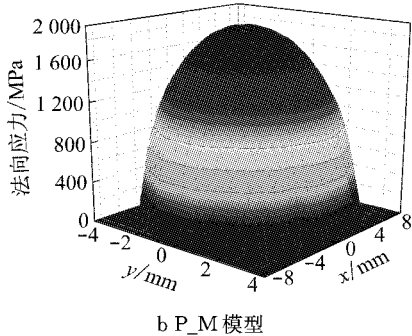
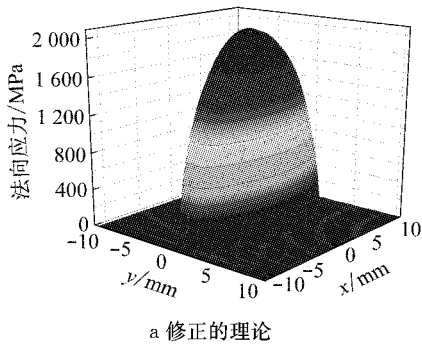


图 13 轮对横移量为 0 mm 时法向应力对比
Fig. 13 Normal stress comparison when lateral displacement of the wheelset is 0 mm

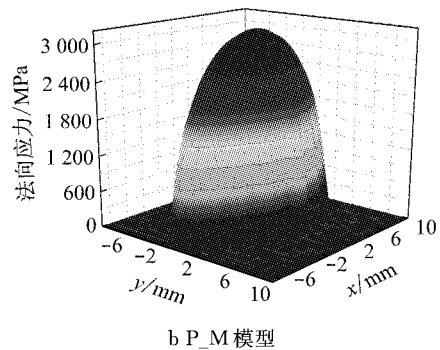
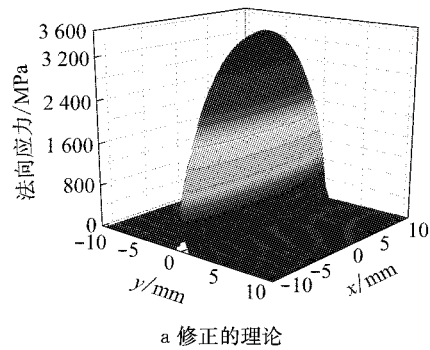


图 15 轮对横移量为 8 mm 时法向应力对比
Fig. 15 Normal stress comparison when lateral displacement of the wheelset is 8 mm

图 16 为轮轨法向接触应力最大值随轮对横移量变化曲线. 由图 16 可知,修正的理论和 P_M 模型计算得到的最大接触应力的变化趋势基本一致. 横移量为负时,两种计算方法差别较小,最大相差 8%. 横移量为正时,两种计算方法差别较大,最大相差

22%. 随横移量变化,修正的理论始终比 P_M 模型计算得到的最大接触应力要大,最大可达 3 659. 6 MPa. 当轮对横移量为 -8~0 mm 时,由于左轨左轨踏面不断贴合,最大接触应力有先增大后减小的

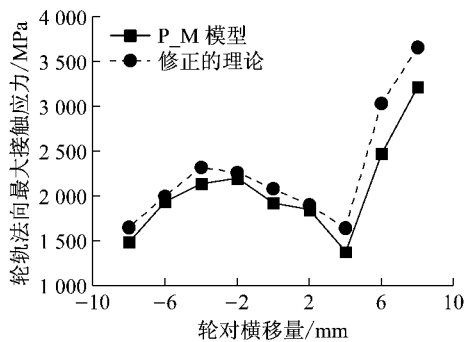


图 16 轮轨法向最大接触应力随轮对横移量的变化
Fig. 16 Maximum of wheel-rail normal stress versus lateral displacement of the wheelset

趋势,但变化幅度不大,接触应力在 1 500~2 500 MPa 之间变化;然而当横移量从 0 mm 变化为 8 mm 时,最大接触应力有先减小而后急剧增大的变化趋势,这是由于当轮对横移量为 0~4 mm 时,轮轨型面较为匹配,接触斑面积较大;当横移量持续增大时,由于车轮与钢轨轨距角接触,接触面积急剧降低,造成接触应力急剧增大。

图 17 为轮轨接触斑面积随轮对横移量变化曲线。由图 17 可知,修正的理论和 P_M 模型计算的接触斑面积的变化趋势基本一致。随横移量变化,修正的理论始终比 P_M 模型计算得到的接触斑面积要大。当轮对横移量从 0 mm 变化为 -8 mm 时,由于左轮左轨踏面不断贴合,接触斑面积有增大的趋势,最大接触斑面积可达 182.75 mm²;然而右轮右轨接触斑面积有先增大后急剧减小的变化趋势,这是由于当轮对横移量为 0~4 mm 时,轮轨型面较为匹配,最大接触斑面积可达 173.75 mm²;当横移量持续增大时,由于车轮与钢轨轨距角接触,接触面积急剧降低。

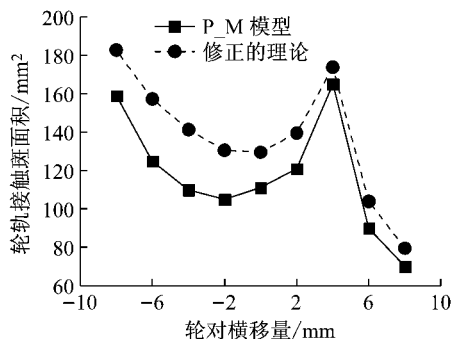


图 17 轮轨法向接触斑面积随轮对横移量的变化
Fig. 17 Maximum of wheel-rail contact patch area versus lateral displacement of the wheelset

3 结论

(1) 用有限元法计算出的影响系数大于

Bossinisq-Cerruti 公式求出的影响系数。利用有限元法得到的钢轨影响系数在轨顶与轨距角处不同,在轨距角处的影响系数大于轨顶处。这是由于钢轨轨距角型面变化已不符合半空间的假设,因此用有限元法计算的影响系数更适用于车轮与钢轨发生两点接触时的应力计算。

(2) 修正的理论和 P_M 模型计算出的法向应力,随横移量变化而变化的趋势一致,且修正的理论计算的法向接触应力始终比 P_M 模型计算的法向应力略大。

(3) 修正的理论和 P_M 模型计算出的接触斑面积,随横移量变化而变化的趋势一致,且修正的理论计算的接触斑面积始终要比 P_M 模型计算的更大。当横移量为 0~4 mm 时,轮轨型面较为匹配,最大接触斑面积可达 173.75 mm²,当横移量持续增大时,由于车轮与钢轨轨距角接触,接触面积急剧降低,同时法向接触应力急剧增大。

参考文献:

- [1] KALKER J J, JOHNSON K L. Three-dimensional elastic bodies in rolling contact [M]. Delft: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [2] HEDRICK J K. A Comparison of alternative creep force models for rail vehicle dynamic analysis[J]. Vehicle System Dynamics, 1983, 12(1/2/3):79.
- [3] LI Z. Wheel-rail rolling contact and its application to wear simulation [J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2002, 26(10):999.
- [4] 杨新文, 顾少杰, 练松良. 30 t 轴重重载列车轮轨法向接触应力分析[J]. 铁道学报, 2015, 37(6):19.
YANG Xinwen, GU Shaojie, LIAN Songliang. Normal stress of wheel/rail contact under 30 t axle's heavy haul wagon [J]. Journal of Chinese Rail Society, 2015, 37(6):19.
- [5] YANG X W, GU S J, ZHOU S H, et al. A method for improved accuracy in three dimensions for determining wheel/rail contact points [J]. Vehicle System Dynamics, 2015, 53(11):1620.
- [6] GU S J, YANG X W, ZHOU S H, et al. An innovative contact partition model for wheel/rail normal contact [J]. Wear, 2016, 366(1):38.
- [7] TELLISKIVI T, OLOFSSON U. Contact mechanics analysis of measured wheel-rail profiles using the finite element method [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part F: Journal of Rail & Rapid Transit, 2001, 215(2):65.
- [8] 金学松, 刘启跃. 轮轨摩擦学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2004.
JIN Xuesong, LIU Qiyue. Wheel/rail tribology [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2004.