文章编号：0253-374X(2018)02-0260-05　　DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2018.02.018

多因子模型下担保债务凭证拉普拉斯定价方法

马卫锋，张峻嘉，孙丽华
(同济大学 经济与管理学院，上海 200092)

摘要：担保债务凭证(CDOs)的基础资产池复杂相关性通常需要多因子 Copula 模型拟合，但 Monte Carlo 模拟对于多因子模型的计算效率不高，难以准确估计大额损失事件的发生概率及预期损失. Laplace 逆变换数值方法适用于风险管理中的多因子 Copula 模型，通过逆变换数值方法计算资产条件损失的 Laplace 变换卷积，得到资产池损失分布，对任意阈值 y，该方法同时适用于估计违约概率 $P(L>y)$ 及期望值 $E[L\wedge y]$，数值实验表明该方法对小概率事件的估计效率有很大提升.

关键词：担保债务凭证；多因子 Copula 模型；Laplace 变换；数值逆变换；方差缩减

中图分类号：F830.9　　**文献标志码**：A

Collateralized Debt Obligations' Pricing Based on Laplace Transform in Multifactor Models

MA Weifeng[1]，*ZHANG Junjia*[2]，*SUN Lihua*[3]
(College of Economics & Management, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The multifactor version of Copula models is useful in fitting the complex correlation structure among the base portfolio of collateralized debt obligations (CDOs). However, plain Monte Carlo simulation is quite incapable of accurately measuring rare but significant loss events. This paper provides a fast numerical inversion of conditional Laplace transform in multifactor models. The method is capable of estimating loss probability $P(L>y)$ and expected loss $E[L\wedge y]$. Numerical examples illustrate the efficiency of the method, especially when handling rare events.

Key words: collateralized debt obligations (CDOs); multifactor Copula models; Laplace transform; numerical inversion; variance reduction

担保债务凭证(collateralized debt obligations, CDOs)是以一篮子债权标的为资产池，发行的偿付次序不同的分券. 分券依据不同优先偿付次序承担资产池的损失，附着点(attchment point)、分离点(detachment point)决定了分券发生损失的概率，以及分券所需承担的损失. 分券定价类似于计算期权损益，需要刻画计息期内的资产池损失分布，即对于任意损失临界值 y 估计损失概率 $P(L>y)$ 以及期望 $E[L\wedge y]$，意味着刻画资产间的违约相关性. Glassman[1]指出理论研究中通常以因子 Copula 模型作为度量资产池相关性的标准模型，Vasicek[2]指出该模型认为资产的相依结构由隐含变量决定，资产的价值由系统因子和特殊风险因子决定.

违约相关性导致资产池损失分布异常复杂，Glassman[3]指出大多数情况下没有解析解，所以组合风险管理中广泛运用 Monte Carlo 模拟方法. 然而，Monte Carlo 模拟的收敛速度慢、模拟误差大，特别当资产间相关性比较复杂时，或者在定价时需要准确估计损失额度大、发生概率小的事件，普通 Monte Carlo 模拟方法的计算效率尤为低. 如何提升资产池损失刻画的准确性和效率一直以来都是学界探讨的问题.

Monte Carlo 模拟的方差可以分解为两部分，如 $P(L>y)$ 估计值 $\hat{p}_x$ 的方差 $\mathrm{var}[\hat{p}_x]=E[\mathrm{var}[\hat{p}_x|Z]]+\mathrm{var}[E[\hat{p}_x|Z]]$. 为了高效评估组合风险，Glassman[3]采用两步重要性抽样的方法，首先对 Z 均值平移，然后在 Z 条件下对违约概率做测度变换，这种方法对估计小概率事件 $P(L>y)$ 有显著提升，但是对于不同的 y 都需要重新进行测度变换，导致估计效率并不高，且估计 $E[L\wedge y]$ 不适用. Glassman[1]提出 QTA 方法对多因子 Copula 模型的条件 Laplace 变换近似处理，用于估计 $E[L\wedge y]$，该方法提升了高维因子模型计算效率，但第一部分方差 $E[\mathrm{var}[\hat{p}_x|Z]]$ 依旧存在.

收稿日期：2017-05-17
第一作者：马卫锋(1975—)，男，副教授，硕士生导师，管理学博士，主要研究方向为衍生产品市场、金融创新与风险管理. E-mail：ma.wf@126.com
通讯作者：张峻嘉(1992—)，男，硕士生，主要研究方向为金融市场、衍生品. E-mail：1650418815@qq.com

根据 Anderson[4]，因子子 Copula 模型优势在于给定共同影响因子 Z，资产池中资产违约与否相互独立，资产池的损失分布可由单个资产损失的卷积得到，计算结果的方差组成第一部分 $E[\mathrm{var}[\hat{p}_x|Z]]$ 为零；同样，Gregory[5] 和 Laurent[6] 等证明资产池违约损失的 Laplace 变换也可以通过单个资产损失的 Laplace 变换卷积得到，通过 *Monte Carlo* 模拟对条件概率积分，进而得到资产池损失分布.

按照上述思路，本文在共同因子 Z 条件下，计算资产池损失的 Laplace 变换，运用 Abate & Whitt[7] 提出的 Laplace 逆变换数值方法得到条件值，进而估计无条件违约概率 $P(L>y)$，期望 $E[L\wedge y]$，这弥补了 Glasssman[3] 估计 $P(L>y)$ 时，需要对不同 y 重新进行重要性测度变换的不便，减小了 Glasssman[1] 估计 $E[L\wedge y]$ 结果的方差，Laplace 逆变换数值方法所需步数更少，意味着估计效率更高. 对任意 y，该方法同时适用于估计 $P(L>y)$ 和 $E[L\wedge y]$，较大提升了组合风险管理效率.

1　因子 Copula 模型

1.1　因子 Copula 模型

度量资产组合信用风险的关键在于刻画资产间违约相关性，理论研究中广泛运用的是 Li[8] 提出的 Copula 模型，核心思想是通过 Copula 函数连接资产池的联合违约概率分布和单个资产的边际违约概率分布. 下面简要介绍该模型.

资产池 t 时刻的损失 $L(t)$ 为

$$L(t)=\sum_{i=1}^{N}Y_jI_j \tag{1}$$

式中：N 为资产池包含的资产个数；Y_j 是 j 个资产违约产生的损失；I 为示性函数.

示性函数间的相关性决定资产的违约相关性，因子 Copula 模型中，相关性由一系列潜在变量 $\{V_1,\cdots,V_N\}$ 决定，即

$$I_j=\begin{cases}1 & V_j>v_j\\ 0 & V_j<v_j\end{cases}$$

式中：V_j 是第 j 个资产的违约临界值，由边际违约概率 P_j 决定，$v_j=\Phi^{-1}(1-P_j)$，Φ 是其累计密度函数.

在因子 Copula 模型中资产的价值 V_j 由两方面因素决定，共同影响因子和个体特殊因子，即

$$V_j=\rho_jZ+\sqrt{1-\rho_j^2}\xi_j \tag{2}$$

式中：ρ_j 代表资产 $j(j=1,2,3\cdots N)$ 受到共同影响因子的影响程度；Z 是一系列共同影响因子，代表资产价值受到市场因素的影响程度；ξ_j 是第 j 个资产的特殊因子，代表资产价值受到自身因素的影响程度. 其中，V、Z、ξ_j 的分布根据不同情况决定，如 Gregory[5] 等运用 Clayton Copula；又如 Anderson[4]，Mashal[9] 等引入 Student t Copula 模型；再如 Hull 和 White[10] 在 CDO 定价中使用了 Double t Copula 模型. Kalemanova[11] 在 CDO 定价中引入 NIG（normal inverse Gaussian）分布，实证结果显示对市场数据拟合效果类似 Double t Copula. 为了探讨金融中“厚尾”“相关性微笑”问题，Moosbrucker[12] 将 VG 分布因子 Copula 模型.

因子 Copula 模型的优势在于其条件独立性，不论因子服从何种分布，在给定共同影响因子 Z 的条件下，各个资产相互独立，资产 j 的违约概率为

$$P_j(Z)=P(I_j=1\mid Z)=P(V_j>v_j\mid Z)=\Phi\left(\frac{\rho_jZ+\Phi^{-1}(P_j)}{\sqrt{1-\rho_j^2}}\right) \tag{3}$$

1.2　Monte Carlo 模拟

Copula 方法通常需要结合 Monte Carlo 模拟来估计资产池的损失分布. 通过模拟市场情况 Z 以及每种市场状态下各个资产 ξ_i 的情况，判断资产 i 是否违约，计算资产池总损失，得到各个分券层期望损失：

（1）产生共同影响因子随机数 Z，特殊风险因子随机数 $\xi_i(i=1,2\cdots N)$，在当前市场状态 Z 下基础资产池中单个资产 i 的价值为

$$V_i^j=\rho Z_j+\sqrt{1-\rho^2}\xi_i^j$$
$$i=1,2,3\cdots N;\ j=1,2\cdots n$$

（2）比较资产 i 的价值与违约临界值的大小，找出违约资产，引入示性函数 I_i.

（3）状态 Z 下资产池的总损失，记为 L_j，即

$$L_j=\sum_{i=1}^{N}Y_iI_i$$

（4）将 L_j 分配到分券层 $[A,D]$ 中，得到第 j 次模拟中该分券层的损失 $L_j[A,D]$，即

$$L_j[A,D]=\begin{cases}0 & L_j<A\\ L_j-A & A<L_j<D\\ D-A & L_j>D\end{cases}$$

（5）重复上述步骤 k 次，得到分券层 $[A,D]$ 的期望损失 $E[L[A,D]]$，即

$$E[L[A,D]]=\sum_{j=1}^{k}\frac{L_j[A,D]}{k}$$

普通 Monte Carlo 模拟问题在于，估计的结果误差较大，计算效率并不高. 因子模型中，对于任意

$P(L>y)$估计值 $\hat{p}_x$ 的方差,可以将其分解为两部分,$\mathrm{var}[\hat{p}_x]=E[\mathrm{var}[\hat{p}_x|Z]]+\mathrm{var}[E[\hat{p}_x|Z]]$,给定共同影响因子 Z,资产间相互独立. 根据Anderson[4],资产池的损失分布可以通过单个资产损失的卷积计算得到,且计算结果不受方差组成的第一部分 $E[\mathrm{var}[\hat{p}_x|Z]]$影响. 下面介绍 Laplace 变换方法计算条件值.

2 Laplace 定价方法

对于一个实数 t,其分布函数 $f(t)$的 Laplace 变换为

$$\hat{f}(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

式中复数 $s=Re\,s+ilm\,s,i=\sqrt{-1},Re\,s>0$.

$f(t)$可以通过 $\hat{f}(s)$的 Laplace 逆变换得到,Abate 和 Whitt[7]提出一种快速的数值方法计算这一逆变换,得到 $f(t)$的近似值 $s_n(t)$,即

$$s_n(t)=\frac{e^{A/2}}{2t}Re\left(\hat{f}\left(\frac{B}{2t}\right)\right)+\frac{e^{A/2}}{t}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k(t) \tag{5}$$

式中,A 为任意正实数,则

$$a_k(t)=Re\left(\hat{f}\left(\frac{B+2k\pi i}{2t}\right)\right) \tag{6}$$

对最初 n 项之后的 m 项运用欧拉求和函数,得到 $s_n(t)$的近似值,即

$$E(m,n,t)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}2^{-m}s_{n+k}(t) \tag{7}$$

在数值试验中,取 $m=11,n=38,B=19$.

假设存在 CDO 分券层的附着点为 A,分离点为 D,付息时间点分别为 $t_0,t_1,t_2\cdots$

根据式(4)资产池损失 L 的 Laplace 变换为

$$\phi(s):=E[\mathrm{e}^{-sL}] \tag{8}$$

单个资产损失 Y_j 的 Laplace 变换为

$$\varphi_j(s):=E[\mathrm{e}^{-sY_j}]$$

因子模型中,给定共同影响因子 Z,组合的资产之间相互独立,通过对条件 Z 下的损失概率 $P(L>y|Z)$、期望 $E[L\wedge y|Z]$求期望,可以得到无条件值如下:

$$P(L>y)=E[I\{L>y\}]=$$
$$E[E[I\{L>y\}\mid Z]]=E[P(Z)] \tag{9}$$
$$E[L\wedge y]=E[E[L\wedge y\mid Z]] \tag{10}$$

式(8)的条件概率为

$$E[e^{-sL}\mid Z]=\prod_{j=1}^{N}E[\mathrm{e}^{-sY_jI_j}\mid Z]=$$
$$\prod_{j=1}^{N}(E[\mathrm{e}^{-sY_j*0}]P(I_j=0)+E[\mathrm{e}^{-sY_j*1}]P(I_j=1)=$$
$$\prod_{j=1}^{N}(\mathrm{e}^{-sY_j}P_j(Z)+1-P_j(Z)) \tag{11}$$

要得到 t_{k+1}时点分券层$[A,D]$发生损失的概率,只需要求出 $P(L>y)$,根据式(2.1),$P(L>y)$的 Laplace 转换为

$$f\hat{f}_{PL}(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sl}P(L>l)\mathrm{d}l=$$
$$\int_0^{\infty}\int_0^{y}\mathrm{e}^{-sl}P(L=y)\mathrm{d}l\mathrm{d}y=\frac{1-\phi(s)}{s} \tag{12}$$

将式(10)代入式(5)—式(7),可以计算得到不同分券着点的损失概率. $(t_k,t_{k+1}]$ 期间,分券层$[A,D]$承担的期望损失为

$$(E[D\wedge L(t_{K+1})]-E[A\wedge L(t_{K+1})]-$$
$$(E[D\wedge L(t_K)]-E[A\wedge L(t_K)] \tag{13}$$

其中,

$$y\wedge L(t_K)=\begin{cases}y & y<L(t_K)\\ L(t_K) & y>L(t_K)\end{cases}$$

如果能够计算出 CDO 存续期内每一个计息时段$(t_k,t_{k+1}]$分券层的期望损失,那么就能得到 CDO 的现金流. 所以对 CDO 定价只需要计算 t 时刻的期望$E[L\wedge y]$. 同样,根据式(4),$E[L\wedge y]$的 Laplace 转换为

$$\hat{f}_{EL}(s)=\frac{1-\phi(s)}{s^2} \tag{14}$$

将式(12)代入式(5)—式(7)可以计算得到$E[L\wedge y]$.

总结上述步骤如下:

(1)产生共同影响因子随机数 Z,计算 Z 条件下的违约概率 $P_j(Z)$;

(2)根据式(11)计算市场 Z 下资产池损失的 Laplace 转换;

(3)根据式(5)—式(7)计算 $P(L>y|Z)$和 $E[L\wedge y|Z]$;

(4)Monte Carlo 模拟计算无条件值 $P(L>y)$和$E[L\wedge y]$.

对于相关性较强的资产池而言,通过重要性抽样产生的共同影响因子 $Z\sim N(\mu,1)$,从而进一步减小得到结果的方差. 估计值为

$$1\{L>y\}\mathrm{e}^{-\mu^TZ+\mu^T\mu/2} \tag{15}$$

详见 Glassman[3].

为说明上述 Laplace 定价方法的计算结果的准确性,以及计算效率的优越性,下面与普通的 Monte Carlo 模拟方法结果进行对比.

3 数值实验

下面通过数值实验更直观反映 Laplace 方法在计算效率，尤其是对小概率事件的计算效率提升. 根据实际情况，违约相关性假设，因子服从分布会有所不同，文献中出现过 Student t Copula、Double t Copula、NIG 等多种模型评估资产池风险，本文的 Laplace 方法对于上述 Copula 模型的估计均适用. 下面以业界标准模型——因子高斯 Copula 模型为例，相关文献可参考 Lauren 和 Gregory[5-6].

参照 Glassman[1] 的数值实验参数设定，以一个基础资产池包含 $m=1\,000$ 个资产的 CDO 为例，假设资产价值由 10 因子模型决定，资产的边际违约概率和风险暴露分别为

$$p_k = 0.01 \times (1 + \sin(16\pi k/m)) \quad k = 1,\cdots m$$

$$C_k = (\lceil 5k/m \rceil)^2 \quad k = 1,\cdots m$$

边际违约概率变动范围为 0～2%，均值为 1%，风险暴露为 1、4、9、16、25 的资产各 200 个. Glassman[1] 指出与固定边际违约概率和风险暴露的模型设定相比，以上设定产生的资产池违约损失更符合现实. 此外，相关系数 a_{kj} 由区间为 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{10d}}\right)$ 的均匀分布产生，其中 d 为因子个数.

表 1 统计了 20 万次普通模拟方法和 1 万次模拟的 Laplace 方法，分别计算资产组合损失超过某一临界值 y 的概率以及方差缩减倍数. 其中，P_m 和 P_l 是普通模拟方法和 Laplace 方法计算的概率结果，V_m 和 V_l 是两种方法计算结果对应的方差，方差缩减倍数定义为普通模拟方法结果的方差与 Laplace 方法结果方差的比值.

由表 1 中结果可知，首先，Laplace 方法的能够得到稳定模拟结果所需的模拟次数远远低于普通模拟方法；其次，发生大额损失的小概率事件的计算上，与普通模拟方法结果误差较大，Laplace 方法精确度更高，这点可以从方差缩减倍数上看出，并且随着损失数值增大，方差缩减倍数逐渐放大；最后，极端事件导致资产池发生巨大损失的情况，大量的普通模拟方法无法产生符合条件的样本，而 Laplace 方法却能在精度极高的前提下估计损失概率.

表 2 统计了两种模拟方法对期望值 $E[L \wedge y]$ 的估计结果，与概率估计结果类似，Laplace 方法的期望值方差减少倍数随着损失数值的增大，方差缩减倍数逐渐增大.

表 1　损失概率数值结果

Tab.1　Numerical results of loss probability

$P(L>y)$	$y=100$	$y=150$	$y=200$	$y=250$	$y=300$	$y=350$	$y=400$
P_m	0.455 5	0.193 9	0.070 4	0.023 0	0.007 5	0.002 5	NA
V_m	0.248 0	0.156 3	0.065 4	0.022 5	0.007 4	0.002 5	NA
P_l	0.460 7	0.198 8	0.071 1	0.024 3	0.007 4	0.002 1	0.000 7
V_l	0.012 3	0.004 0	0.000 7	0.000 2	1.93×10^{-5}	5.46×10^{-6}	2.12×10^{-7}
V_m/V_l	20.2	39.4	90.6	122.2	382.7	461.3	NA

表 2　$E[L \wedge y]$ 数值结果

Tab.2　Numerical results of $E[L \wedge y]$

$E[L \wedge y]$	$y=100$	$y=150$	$y=200$	$y=250$	$y=300$	$y=350$	$y=400$
E_m	78.403 1	94.414 4	100.787 8	102.798 1	103.429 6	104.158 5	NA
E_l	79.111	96.032 2	100.737 4	102.547 0	102.258 7	103.335 4	104.880 3
V_m/V_l	1.49	3.48	7.83	19.37	82.17	301.28	NA

4 结论

CDO 是一种新型的结构化信用衍生产品，在国外被广泛运用，而在国内发行很少. 这与资产组合定价的复杂性有关，CDO 的定价涉及到资产池中资产的违约率、违约损失、以及资产间的违约相关性的刻画. 本文在 Copula 模型基础上，提出一种精确、高效的 Laplace 定价方法，并给出了 Gaussian Copula 模型的数值实验结果. 结果表明，Laplace 逆变换数值方法可以精确刻画资产池的损失分布，对于任意给定的阈值 y，可求解得到概率值 $P(L>y)$，以及期望值 $E[L \wedge y]$，相比于普通 Monte Carlo 模拟方法，Laplace 方法得到稳定结果所需模拟次数更少，精度更高；此外，Laplace 方法对资产组合发生概率小，但是损失数值大的事件的处理优势尤为明显，数值实验结果表明，Laplace 方法估计的损失事件发生概率的方差减少倍数，随着损失数值增大而增大.

（下转第 280 页）