

# 基于描述函数法的直线增程器动力学模型极限环分析

王 哲, 林炼炼, 臧鹏飞, 孙晨乐

(同济大学 新能源汽车工程中心, 上海 201804)

**摘要:** 基于一个简化的直线增程器动力学模型, 运用描述函数法在频域对直线增程器的极限环进行研究. 以描述函数表示直线增程器动力学模型的非线性部分, 利用描述函数和线性部分频率响应函数的图像对系统极限环的存在性、数量和稳定性进行了分析, 进而求出极限环的近似频率和振幅. 同时研究了直线增程器关键运行参数对极限环的频率、振幅和相对稳定性的影响. 最后, 以一样机的试验数据对分析结果进行试验验证. 研究表明, 在适当的系统参数下, 直线增程器在物理约束范围内存在唯一的稳定极限环; 喷油量和电磁力负载对极限环的频率和振幅都有影响; 极限环的幅值与其相对稳定性存在关联.

**关键词:** 直线增程器; 极限环; 描述函数; 存在性; 稳定性

**中图分类号:** TK441

**文献标志码:** A

## Analysis of Limit Cycle of Dynamic Model of Linear Range Extender Based on Describing Function Method

WANG Zhe, LIN Lianlian, ZANG Pengfei, SUN Chenle

(Clean Energy Automotive Engineering Center, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** According to a simplified dynamics model of the linear range extender, the limit cycle of linear range extender was studied in frequency domain by using the describing function method. The nonlinear part of the linear range extender dynamics model was described by using the describing function, and the existence, quantity and stability of the system limit cycle were analyzed by using the image of the describing function and the frequency response function. Then the approximate frequency and approximate amplitude of the limit cycle were obtained. This method can also explore the influence of parameters of the linear range extender on the frequency, amplitude, and relative stability of limit cycles. Finally, the analysis results were verified by the experimental data of a prototype. The results show that when the system parameters are appropriate, the linear range

extender has the only stable limit cycle in the physical constraint range, and the fuel injection quantity and the electromagnetic force load have influence on the frequency and amplitude of the limit cycle; the amplitude of the limit cycle is related to its relative stability.

**Key words:** linear range extender; limit cycle; describing function; existence; stability

近年来, 由于环保法规的日趋严苛以及化石能源危机, 直线增程器(又称自由活塞直线发电机)的高效、环保、高能量密度以及燃料适用性等优势逐渐得到众多科研机构的关注. 美国西弗吉尼亚大学、德国宇航中心、丰田汽车研发中心、纽卡斯尔大学、北京理工大学、同济大学等科研机构都对直线增程器进行了深入研究. 多数机构通过数值仿真和试验方法来验证直线增程器动力学模型极限环的存在性, 研究系统的运行状况与系统参数的关系<sup>[1-6]</sup>, 以及利用经验公式或者偏微分方程对进排气流动特性、燃烧特性、电磁特性等进行探究<sup>[7-9]</sup>. 少数机构通过能量平衡原理对直线增程器动力学模型的极限环进行分析<sup>[10]</sup>. 但是, 数值仿真方法和能量平衡原理都无法在理论上对极限环的存在性和数量进行判断<sup>[11]</sup>, 而且由于这两种方法都是时域分析方法, 对系统内部结构的分析略显不足. 此外, 能量平衡原理等解析方法具有较大局限性.

极限环为系统方程的相平面中闭合的孤立曲线, 是非线性系统的特有性态. 直线增程器的动力学方程为复杂的非线性方程, 正是由于该方程具有极限环<sup>[10]</sup>, 所以直线增程器的活塞组件能够持续振荡进而带动直线发电机发电. 复杂的非线性方程可能存在多个极限环. 极限环分为 3 类: 稳定极限环, 不稳定极限环和半稳定极限环, 其特性相当复杂<sup>[12]</sup>. 所以, 深入分析直线增程器动力学系统极限环的特

收稿日期: 2017-06-13

基金项目: 上海市科学技术委员会资助项目(15DZ1201500)

第一作者: 王 哲(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为新能源汽车动力系统. E-mail: wangzhe@tongji.edu.cn

性至关重要.然而,到目前为止,相关的研究还较少.

本文采用描述函数法<sup>[12]</sup>,在频域对系统的简化模型进行描述,并基于一试验样机参数,在复平面分析其极限环的存在性、数量以及稳定性,进而研究系统关键运行参数对极限环频率、幅值和相对稳定性的影响.分析结果能够为直线增程器的实际设计提供理论参考.

## 1 直线增程器动力学模型

直线增程器取消了曲柄连杆机构,将活塞连杆与电动机子同轴刚性固连.本文研究的直线增程器为点燃式的,其结构形式为双活塞式,如图1所示.其工作原理是通过左右两个燃烧室交替燃烧产生的高温高压气体推动活塞组件往复运动,进而带动直线发电机的定子切割磁感线输出电能.

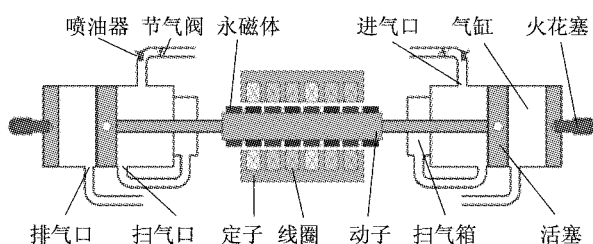


图1 直线增程器结构

Fig.1 Configuration of linear range extender

将活塞组件视为质点  $P$ ,取活塞组件在行程中点时其几何中心的位置为原点,将活塞组件的轴向视为  $x$  轴方向,令图1中的右方向为正方向,建立如图2所示的一维坐标系.质点  $P$  在  $x$  轴坐标系中的位置用坐标  $x$  表示.

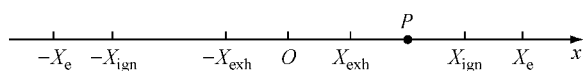


图2 直线增程器动力学模型坐标系

Fig.2 Coordinate of dynamic model of linear range extender

图2中,  $-X_e$  和  $X_e$  分别为质点在左右两端的极限位置,对应于图1中活塞组件撞击左右缸盖时的位置,因此质点的坐标满足限制条件  $-X_e < x < X_e$ ;  $-X_{ign}$  和  $X_{ign}$  分别为直线增程器左右两缸的点火位置,即当  $x = X_{ign}$  且  $\dot{x} > 0$  时,右缸点火,当  $x = -X_{ign}$  且  $\dot{x} < 0$  时,左缸点火;  $X_{exh}$  和  $-X_{exh}$  分别为直线增程器左右两缸排气口开启瞬间活塞组件在坐标轴中的位置,即当  $x < -X_{exh}$  时,右缸排气口开启,当  $x > X_{exh}$  时,左缸排气口开启.

根据直线增程器的系统结构和工作原理<sup>[1]</sup>,忽略两端扫气箱的压力差,系统处于稳态发电时的动力学微分方程为

$$-m\ddot{x} + F_s + F_c + F_p + F_m = 0 \quad (1)$$

式中:  $m$  为活塞组件质量;  $F_s$  为库伦摩擦力;  $F_c$  为黏性摩擦力;  $F_p$  为左右两端气缸压力差;  $F_m$  为电磁力负载.

### 1.1 左右两端气缸压力差

由直线增程器的结构和工作原理可知

$$F_p = S(p_l - p_r) \quad (2)$$

式中:  $p_l$  为左缸缸压;  $p_r$  为右缸缸压;  $S$  为活塞横截面积.

当直线增程器处于稳态发电状态时,左右两缸的缸压  $p_l$  和  $p_r$  的模型是分段的.为了方便分析左右两端的缸压,做如下假设:

(1)左右两侧气缸燃烧室内的工质为理想气体,在整个热力学过程中工质的比热容为常数,不随温度变化,且无工质泄漏.

(2)直线增程器的压缩及膨胀过程均忽略传热损失,且将其简化为多变指数恒定的多变过程.

(3)直线增程器的燃烧过程忽略点火延迟,由于左右两缸的可燃混合气是使用火花塞点燃的,所以将燃烧过程视为瞬时的定容加热.

(4)直线增程器的扫气和排气过程为一个理想过程,忽略发动机的扫气和排气过程能量损失,认为气缸的压力始终与扫气压力相等.

(5)考虑了热量损失后,热量转化为有效功的过程视为可逆过程.

直线增程器的热力学过程可分为扫气过程、压缩过程、燃烧过程以及膨胀过程.根据发动机的热力学原理,现对每一过程的缸压模型进行详细分析.

#### 1.1.1 压缩过程缸压模型

由热力学的多变过程方程可得压缩过程的缸压计算公式为

$$p = p_a \left( \frac{V_{sc}}{V} \right)^{\gamma_1} \quad (3)$$

式中:  $V_{sc}$  为压缩过程开始时刻气缸的容积;  $V$  为气缸的瞬时容积;  $\gamma_1$  为压缩过程的平均多变指数;  $p_a$  为扫气压力.

当  $-X_{ign} < x < X_{exh}$  且  $\dot{x} < 0$  时,左缸处于压缩过程,式中的  $V_{sc}$  和  $V$  分别表示为

$$V_{sc} = V_s + S(X_e + X_{exh}) \quad (4)$$

$$V = V_s + S(X_e + x) \quad (5)$$

式中:  $V_s$  为质点  $P$  的坐标  $x = -X_e$  时,左端活塞顶部与左缸顶部之间的间隙的体积;当  $x = X_e$  时,右端

活塞顶部与右缸顶部之间的间隙的体积也为  $V_s$ .

将式(4)和式(5)代入式(3)可得,左缸在压缩过程的缸压为

$$p_l = p_a \left( \frac{V_s + S(X_e + X_{exh})}{V_s + S(X_e + x)} \right)^{n_1} \quad (6)$$

当  $-X_{exh} < x < X_{ign}$  且  $\dot{x} > 0$  时,右缸处于压缩过程.同理可得,此时右缸的缸压为

$$p_r = p_a \left( \frac{V_s + S(X_e + X_{exh})}{V_s + S(X_e - x)} \right)^{n_1} \quad (7)$$

### 1.1.2 燃烧过程缸压模型

当  $x = -X_{ign}$  且  $\dot{x} < 0$  时,左缸瞬时燃烧,缸压发生突变,由压缩过程结束时刻的缸压  $p_{r0}$  上升到膨胀过程开始时刻的缸压  $p_{rl}$ .

由式(6)可得

$$p_{r0} = p_a \left( \frac{V_s + S(X_e + X_{exh})}{V_s + S(X_e - X_{ign})} \right)^{n_1} \quad (8)$$

由热力学相关理论,最终可以得到  $p_{rl}$  的计算公式如下<sup>[13]</sup>:

$$p_{rl} = \frac{\gamma-1}{V_i} Q_{in} + p_{r0} \quad (9)$$

式中: $\gamma$  为可燃混合气的比热容比; $V_i$  为燃烧时刻的左缸体积,可表示为

$$V_i = V_s + S(X_e - X_{ign}) \quad (10)$$

$Q_{in}$  为燃烧的燃油释放的热量,可表示为

$$Q_{in} = \xi H_{\mu} m_f \quad (11)$$

式中: $m_f$  为喷油量; $\xi$  为有效燃烧系数; $H_{\mu}$  为燃油的低热值.

当  $x = X_{ign}$  且  $\dot{x} > 0$  时,右缸瞬时燃烧,缸压发生突变,由压缩过程结束时刻的缸压  $p_{l0}$  上升到膨胀过程开始时刻的缸压  $p_{lf}$ .

由于直线增程器的结构左右对称,且左右两缸的喷油量相同,故可得

$$p_{l0} = p_{r0} \quad (12)$$

$$p_{lf} = p_{rl} \quad (13)$$

### 1.1.3 膨胀过程缸压模型

由热力学的多变过程方程可得膨胀过程缸压的计算公式为

$$p = p_{rl} \left( \frac{V_{se}}{V} \right)^{n_2} \quad (14)$$

式中: $V_{se}$  为膨胀过程开始时刻气缸的容积; $V$  为气缸的瞬时容积; $n_2$  为膨胀过程的平均多变指数.

当  $-X_{ign} < x < X_{exh}$  且  $\dot{x} > 0$ ,以及  $-X_e < x < -X_{ign}$  时,左缸处于膨胀过程,这时,式(14)中的  $V_{se}$  和  $V$  分别表示为

$$V_{se} = V_s + S(X_e - X_{ign}) \quad (15)$$

$$V = V_s + S(X_e + x) \quad (16)$$

将式(15)和式(16)代入式(14)可得,左缸处于膨胀过程的缸压为

$$p_l = p_{rl} \left( \frac{V_s + S(X_e - X_{ign})}{V_s + S(X_e + x)} \right)^{n_2} \quad (17)$$

当  $-X_{exh} < x < X_{ign}$  且  $\dot{x} < 0$ ,以及  $X_{ign} < x < X_e$  时,右缸处于膨胀过程.同理可得,此时右缸的缸压为

$$p_r = p_{rl} \left( \frac{V_s + S(X_e - X_{ign})}{V_s + S(X_e - x)} \right)^{n_2} \quad (18)$$

### 1.1.4 扫气过程缸压模型

当  $x > X_{exh}$  时,左缸排气口开启,处于扫气和排气过程,这时左缸的缸压为

$$p_l = p_a \quad (19)$$

当  $x < -X_{exh}$  时,右缸排气口开启,处于扫气和排气过程,这时右缸的缸压为

$$p_r = p_a \quad (20)$$

综上,由式(2)~(20)可知,左右两端气缸压力差的公式是分段的,其图像大致如图3所示.由图3可判断其图像是关于原点对称的,所以只需列出图3

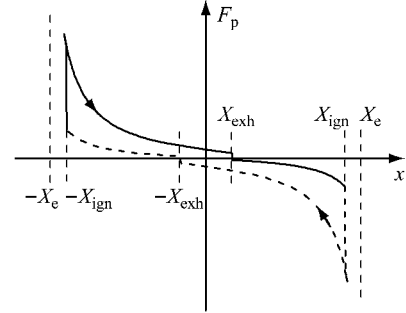


图3  $F_p$  的图像

Fig.3 Image of  $F_p$

中实线部分的公式即可表示左右两端气缸压力差的总公式.图3中实线部分的公式如下:

$$F_p(x, \dot{x}) = \begin{cases} F_{p1}(x) & (\dot{x} > 0 \wedge -X_{ign} \leq x < X_{exh}) \vee (-X_e \leq x < -X_{ign}) \\ F_{p2}(x) & \dot{x} > 0 \wedge -X_{exh} \leq x \leq X_{exh} \\ F_{p3}(x) & \dot{x} > 0 \wedge X_{exh} < x \leq X_{ign} \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$F_{p1}(x) = Sp_{rl} \left( \frac{V_s + S(X_e - X_{ign})}{V_s + S(X_e + x)} \right)^{n_2} - Sp_a \quad (22)$$

$$F_{p2}(x) = Sp_{rl} \left( \frac{V_s + S(X_e - X_{ign})}{V_s + S(X_e + x)} \right)^{n_2} - Sp_a \left( \frac{V_s + S(X_e + X_{exh})}{V_s + S(X_e - x)} \right)^{n_1} \quad (23)$$

$$F_{p3}(x) = Sp_a - Sp_a \left( \frac{V_s + S(X_e + X_{exh})}{V_s + S(X_e - x)} \right)^{n_1} \quad (24)$$

## 1.2 库伦摩擦力和黏性摩擦力

由摩擦学相关理论可知<sup>[14]</sup>,库伦摩擦力的方向与速度方向相反,大小为恒定值  $F_{s0}$ ,即

$$F_s(\dot{x}) = -F_{s0} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (25)$$

黏性摩擦力的表达式为

$$F_c(\dot{x}) = -k\dot{x} \quad (26)$$

式中: $k$  为黏性摩擦力系数.

## 1.3 电磁力负载

直线增程器的电磁力负载的可能形式有很多种,不失一般性,假设电磁力负载方向与速度相反,大小为恒定值  $F_{m0}$ <sup>[10,15]</sup>,其表达式为

$$F_m = -F_{m0} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (27)$$

## 1.4 直线增程器动力学模型的拟线性近似

由式(21)、式(25)、式(26)和式(27)可知,式(1)中的线性部分为惯性力  $-m\ddot{x}$  和黏性摩擦力  $F_c$ ,其余为非线性部分.将线性部分与非线性部分分列等式两侧可得

$$m\ddot{x} + k\dot{x} = F_s(\dot{x}) + F_p(x, \dot{x}) + F_m(\dot{x}) \quad (28)$$

根据式(28),可以用图4表示系统的动力学模型.其中  $\beta$  为非线性单元的输出,线性单元传递函数  $G(j\omega)$  的表达式为

$$G(j\omega) = \frac{1}{m(j\omega)^2 + kj\omega} \quad (29)$$

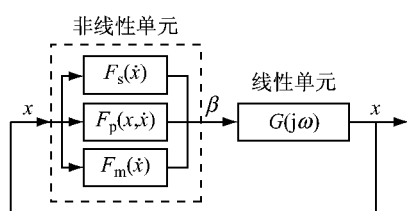


图4 动力学模型的反馈解释

Fig.4 Feedback interpretation of dynamic model

由文献[12]可知,应用描述函数方法需要满足以下4个条件:

- (1)非线性元件唯一.
- (2)非线性元件为时不变.
- (3)线性单元具有低通特性.

(4)非线性部分的输入和输出之间的函数的图像是关于原点对称的.

如图4所示,直线增程器动力学系统中虽然有多多个非线性单元,但是,它们能够集成为单个非线性函数,因此满足条件(1).由式(21)、式(25)和式(27)可知,左右两端气缸压力差、库伦摩擦力和电磁力负

载均为时不变的关于原点对称的函数,因此满足条件(2)和(4).由于实际系统中  $m > 0$  且  $k > 0$ ,这使得线性单元  $G(j\omega)$  具有低通滤波的特性,而且其频率响应函数不存在共振峰值,因此满足条件(3).

综上,可以用图5中的非线性单元的描述函数  $N(A, \omega)$  ( $A$  为幅值,  $\omega$  为角频率)来替换该非线性单元,最终可以得到直线增程器动力学系统的拟线性近似,如图5所示.

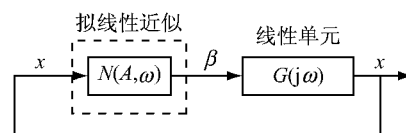


图5 动力学模型的拟线性近似

Fig.5 Quasi-linear approximation of dynamic model

## 2 系统非线性单元描述函数

由式(25)和式(27)可知,  $F_s$  和  $F_m$  结构相似,可以合并为一项

$$F_{sm}(\dot{x}) = -(F_{s0} + F_{m0}) \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (30)$$

假设图4中非线性单元输入为  $x = A \sin(\omega t)$ ,即假设活塞组件的位移是关于时间的正弦函数,  $A$  和  $\omega$  分别为活塞组件位移的幅值和频率,则  $\dot{x} = A\omega \cdot \cos(\omega t)$ ,那么非线性单元的输出  $\beta$  可表示为

$$\beta(t) = \beta_{sm}(t) + \beta_p(t) \quad (31)$$

其中

$$\beta_{sm}(t) = F_{sm}(A\omega \cos(\omega t)) \quad (32)$$

$$\beta_p(t) = F_p(A \sin(\omega t), A\omega \cos(\omega t)) \quad (33)$$

根据描述函数的定义<sup>[12]</sup>,图4中非线性单元描述函数  $N(A, \omega)$  的表达式为

$$N(A, \omega) = \frac{b_1 + ja_1}{A} \quad (34)$$

式中: $a_1$  和  $b_1$  为  $\beta(t)$  的傅里叶级数中  $\cos(\omega t)$  项和  $\sin(\omega t)$  项的系数,其表达式为

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) \cos(\omega t) d(\omega t) \quad (35)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta(t) \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (36)$$

由式(31)可知,  $a_1$  和  $b_1$  都由两个分量的和组成

$$a_1 = a_{sm1} + a_{p1} \quad (37)$$

$$b_1 = b_{sm1} + b_{p1} \quad (38)$$

其中

$$a_{sm1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta_{sm}(t) \cos(\omega t) d(\omega t) \quad (39)$$

$$b_{sm1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta_{sm}(t) \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (40)$$

$$a_{p1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta_p(t) \cos(\omega t) d(\omega t) \quad (41)$$

$$b_{p1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \beta_p(t) \sin(\omega t) d(\omega t) \quad (42)$$

由式(30)、式(32)、式(39)和式(40)可以算出,  $b_{sm1}=0$ ,  $a_{sm1}$ 的计算公式为

$$a_{sm1} = -\frac{4}{\pi} (F_{s0} + F_{m0}) \quad (43)$$

在实际系统中,若  $A \leq X_{ign}$ ,则左右两气缸中的可燃气体都无法点燃;若  $A \geq X_e$ ,则活塞将同气缸盖发生碰撞.因此,  $A \leq X_{ign}$  和  $A \geq X_e$  都会使系统无法正常运行,后面的讨论中只考虑  $X_{ign} < A < X_e$  的情况.

由式(21)和式(33)可知,左右缸压差的输入输出函数图像如图6所示,  $\beta_p(t)$ 的表达式为

$$\beta_p(t) = \begin{cases} -F_{p2}(A \sin(-\omega t)) & -\pi < \omega t \leq -\pi + \gamma_1 \\ -F_{p3}(A \sin(-\omega t)) & -\pi + \gamma_1 < \omega t \leq -\pi + \gamma_2 \\ F_{p1}(A \sin(\omega t)) & -\pi + \gamma_2 < \omega t \leq -\gamma_1 \\ F_{p2}(A \sin(\omega t)) & -\gamma_1 < \omega t \leq \gamma_1 \\ F_{p3}(A \sin(\omega t)) & \gamma_1 < \omega t \leq \gamma_2 \\ -F_{p1}(A \sin(-\omega t)) & \gamma_2 < \omega t \leq \pi - \gamma_1 \\ -F_{p2}(A \sin(-\omega t)) & \pi - \gamma_1 < \omega t \leq \pi \end{cases} \quad (44)$$

式中:  $\gamma_1 = \arcsin(X_{exh}/A)$ ;  $\gamma_2 = \arcsin(X_{ign}/A)$ .

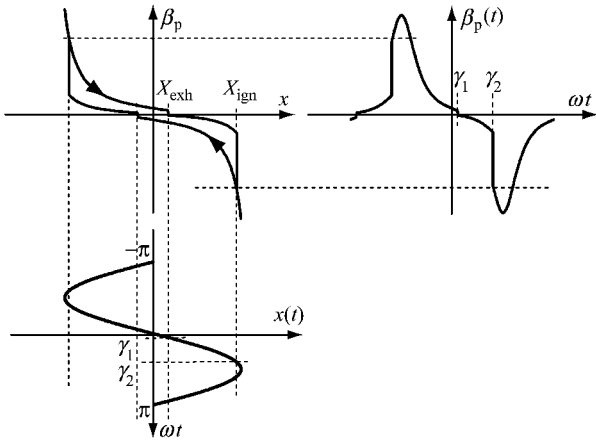


图6 左右缸压差的输入-输出函数

Fig.6 Input/output function of pressure difference between left and right cylinders

将式(44)代入式(41)和式(42)并化简,可得  $a_{p1}$  和  $b_{p1}$ 的计算公式如下:

$$a_{p1} = \frac{2}{\pi} \left[ \int_{-\pi+\gamma_1}^{-\pi+\gamma_2} -F_{p3}(A \sin(-\omega t)) \cos(\omega t) d(\omega t) + \int_{-\gamma_1}^{-\pi+\gamma_2} F_{p1}(A \sin(\omega t)) \cos(\omega t) d(\omega t) + \right.$$

$$\left. \int_{-\gamma_1}^{\gamma_1} F_{p2}(A \sin(\omega t)) \cos(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (45)$$

$$b_{p1} = \frac{2}{\pi} \left[ \int_{-\pi+\gamma_1}^{-\pi+\gamma_2} -F_{p3}(A \sin(-\omega t)) \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{-\gamma_1}^{-\pi+\gamma_2} F_{p1}(A \sin(\omega t)) \sin(\omega t) d(\omega t) + \int_{-\gamma_1}^{\gamma_1} F_{p2}(A \sin(\omega t)) \sin(\omega t) d(\omega t) \right] \quad (46)$$

由式(34)~(40)以及式(45)和式(46)可知,  $N(A, \omega)$ 的解析表达过于复杂,所以,后文将通过  $G(j\omega)$ 和  $N(A, \omega)$ 的图像对直线增程器动力学模型的极限环进行分析.此外,由式(43)、式(45)和式(46)可看出,描述函数  $N(A, \omega)$ 只是幅值  $A$  的函数,即  $N(A, \omega) = N(A)$ ,这为后面分析系统极限环带来了极大的便利.

### 3 直线增程器系统极限环分析

#### 3.1 直线增程器极限环的存在性和稳定性

假设图5所示的系统存在一个幅值为  $A$  且频率为  $\omega$  的正弦振荡,则回路中的变量必须满足以下关系

$$N(A)G(j\omega)x = x \quad (47)$$

等价于

$$G(j\omega) = \frac{1}{N(A)} \quad (48)$$

再考虑实际系统的约束  $X_{ign} < A < X_e$ ,则系统极限存在的必要条件为方程(48)在  $X_{ign} < A < X_e$  的区域内有解.

由文献[13]中的台架参数和试验结果可以得到系统各个固有参数的值如表1所示.

表1 样机参数

Tab.1 Prototype parameters	
直线增程器样机参数	数值
直线增程器气缸横截面面积 $S/\text{m}^2$	0.002
活塞组件右端极限位置 $X_e/\text{mm}$	27.4
左缸排气口开启位置 $X_{exh}/\text{mm}$	4.6
活塞组件质量 $m/\text{kg}$	3.75
压缩过程平均压缩多变指数 $n_1$	1
膨胀过程平均膨胀多变指数 $n_2$	1.23
扫气压力 $p_a/\text{Pa}$	$1.52 \times 10^5$
黏性摩擦系数 $k/(\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	100
库伦摩擦力 $F_{s0}/\text{N}$	0
有效燃烧系数 $\xi$	0.73

设定  $X_{ign} = 24.7 \text{ mm}$ ,  $m_f = 2.53 \text{ mg}$ ,  $F_{m0} = 300 \text{ N}$ .根据式(29)和式(34),利用数值计算的方法画出  $G(j\omega)$ 和  $1/N(A)$ 的图像,如图7所示.其中两个箭头分别表示  $A$  和  $\omega$  的增长方向.

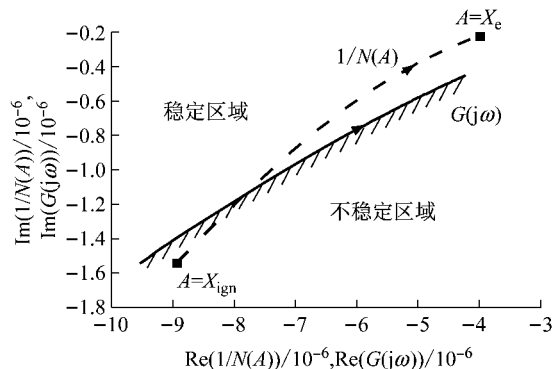
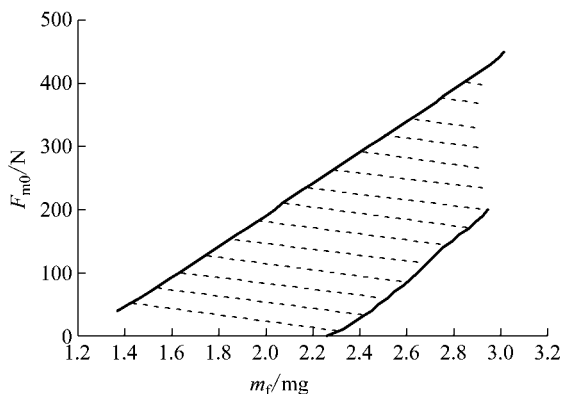


图7 极限环的判断

Fig.7 Detection of limit cycles

如图7所示, $G(j\omega)$ 和 $1/N(A)$ 的图像在 $X_{ign} < A < X_e$ 的范围内存在唯一交点,且 $1/N(A)$ 的图像沿 $A$ 增加的方向由不稳定区域进入稳定区域,所以,这个交点对应的极限环稳定<sup>[12]</sup>.这表明:系统关键运行参数选择适当的情况下,直线增程器在物理约束范围内存在唯一稳定的极限环.

由图7可知, $1/N(A)$ 的图像是一段长度有限的曲线,且 $1/N(A)$ 与 $G(j\omega)$ 的图像在交点附近的夹角比较小,一旦系统参数发生变化, $1/N(A)$ 与 $G(j\omega)$ 的图像可能不存在交点,即系统的极限环不存在.因此,需要进一步分析系统极限环存在时,喷油量 $m_f$ 和电磁力负载大小 $F_{m0}$ 需要满足的条件.设定喷油量 $m_f$ 和电磁力负载 $F_{m0}$ 分别在 $1.37 \sim 3.00$  mg和 $0 \sim 450$  N的范围内,其他参数与图7对应的参数相同,用同样的方法判断 $G(j\omega)$ 和 $1/N(A)$ 的图像是否存在交点.结果表明:喷油量与电磁力负载处于如图8所示带状阴影区域时,系统的极限环存在.

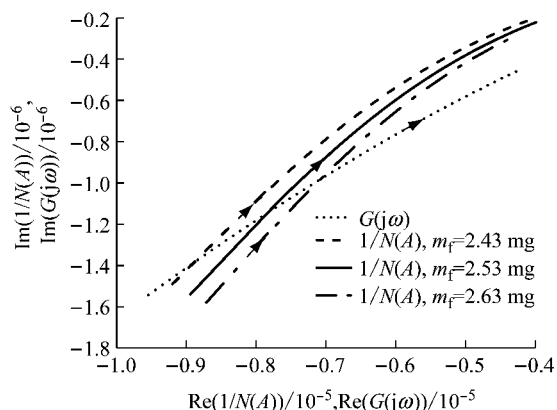
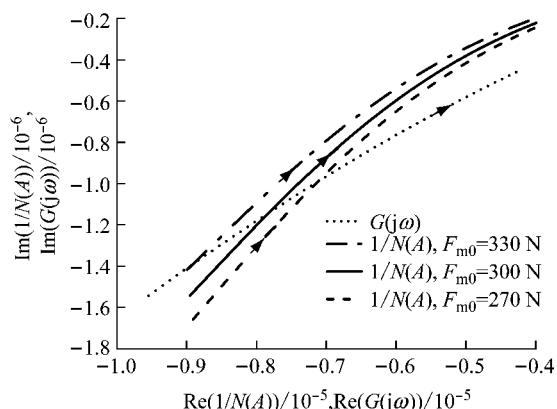
图8  $F_{m0}-m_f$  图中极限环的存在区域Fig.8 Existence region of limit cycles in  $F_{m0}-m_f$  diagram

### 3.2 喷油量和负载对极限环幅值和频率的影响

由 $G(j\omega)$ 和 $1/N(A)$ 的图像交点亦可求出极限

环的近似频率和近似振幅.极限环的近似频率为 $G(j\omega)$ 的图像上交点所对应的 $\omega$ 值,极限环的近似幅值为 $1/N(A)$ 的图像上交点所对应的 $A$ 值.因此,可以进一步研究喷油量及电磁力负载对极限环的频率和幅值的影响.

设定喷油量 $m_f$ 为2.43、2.53和2.63 mg,其他参数与图7对应的参数相同, $G(j\omega)$ 和 $1/N(A)$ 的图像如图9所示.可以看出,随着 $m_f$ 的增大, $1/N(A)$ 图像向右下方移动, $G(j\omega)$ 和 $1/N(A)$ 图像上交点所对应的 $\omega$ 增大, $A$ 增大.同时设定电磁力负载 $F_{m0}$ 为270、300和330 N,其他参数与图7对应的参数相同, $G(j\omega)$ 和 $1/N(A)$ 的图像如图10所示.可以看出,随着 $F_{m0}$ 的增大, $1/N(A)$ 图像向左上方移动, $G(j\omega)$ 和 $1/N(A)$ 图像上交点所对应的 $\omega$ 减小, $A$ 减小.

图9 喷油量 $m_f$ 对 $1/N(A)$ 影响Fig.9 Influence of fuel injection quantity  $m_f$  on  $1/N(A)$ 图10 电磁力负载 $F_{m0}$ 对 $1/N(A)$ 的影响Fig.10 Influence of electromagnetic load  $F_{m0}$  on  $1/N(A)$ 

设定喷油量 $m_f$ 和电磁力负载 $F_{m0}$ 分别在 $1.37 \sim 3.00$  mg和 $0 \sim 450$  N的范围内,其他参数与图7对应的参数相同,用数值计算的方法计算极限

环的近似幅值和近似频率,如图 11 和图 12 所示. 由图 11 和图 12 可知,喷油量  $m_f$  保持不变时,极限环的幅值和频率随着电磁力负载  $F_{m0}$  的增大而减小;电磁力负载  $F_{m0}$  保持不变时,极限环的幅值和频率随着喷油量  $m_f$  的增大而增大.

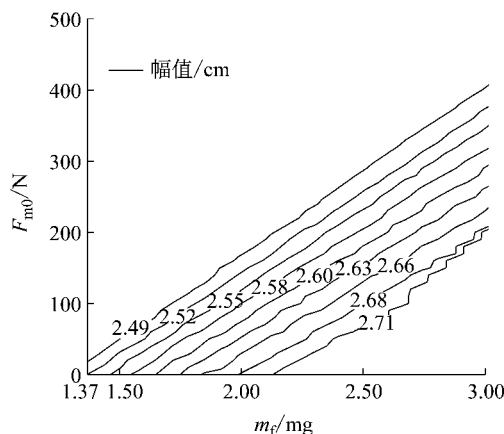


图 11  $m_f$  和  $F_{m0}$  对极限环幅值的影响

Fig. 11 Influence of  $m_f$  and  $F_{m0}$  on amplitude of limit cycle

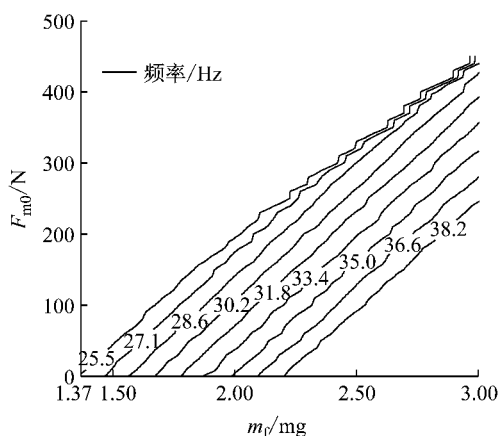


图 12  $m_f$  和  $F_{m0}$  对极限环频率的影响

Fig. 12 Influence of  $m_f$  and  $F_{m0}$  on frequency of limit cycle

综上,可以得出如下结论:在极限环存在的情况下,电磁力负载  $F_{m0}$  的大小与系统极限环的频率和振幅均成负相关,喷油量  $m_f$  与系统极限环的频率和振幅均成正相关. 这与文献[16]中的结论一致,验证了描述函数法的准确性.

### 3.3 喷油量和负载对系统极限环相对稳定性的影响

如图 13 所示,记  $1/N(A)$  的图像上  $A=X_e$  对应的点与  $G(j\omega)$  图像的最短距离为  $D_1$ ,记  $1/N(A)$  的图像上  $A=X_{ign}$  对应的点与  $G(j\omega)$  图像的最短距离为  $D_2$ .

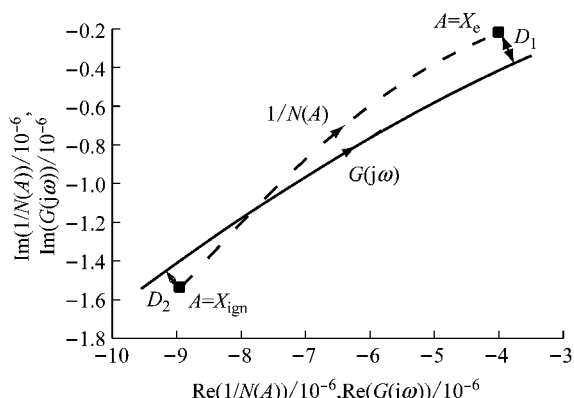


图 13 极限环的相对稳定性参数

Fig. 13 Relative stability parameters of limit cycle

由奈奎斯特准则及其扩展可推知,当系统存在稳定的极限环时,若  $D_1$  与  $D_2$  同时增大,则系统极限环的相对稳定性提高;若  $D_1$  或  $D_2$  减小,则系统极限环的相对稳定性降低.

设定喷油量  $m_f$  和电磁力负载  $F_{m0}$  分别在 1.37~3.00 mg 和 0~450 N 的范围内,其他参数与图 7 对应的参数一致,采用数值方法计算  $D_1$  与  $D_2$  的值,  $D_1$  与  $D_2$  的变化情况如图 14 和图 15 所示.

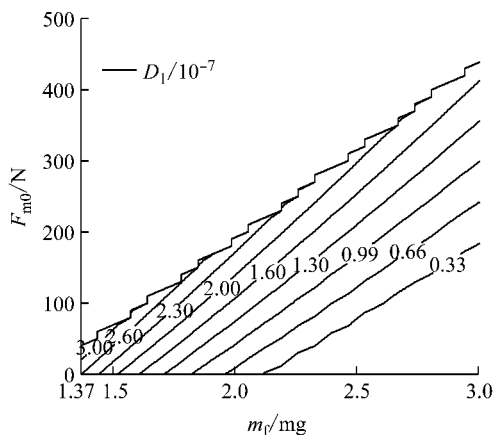


图 14  $m_f$  和  $F_{m0}$  对  $D_1$  的影响

Fig. 14 Influence of  $m_f$  and  $F_{m0}$  on  $D_1$

由图 14 和图 15 可知,若喷油量  $m_f$  增大,则  $D_1$  减小而  $D_2$  增大;若电磁力负载  $F_{m0}$  增大,则  $D_1$  增大而  $D_2$  减小,这说明  $D_1$  与  $D_2$  存在矛盾,无法同时取到最大值. 对比图 11、图 14 和图 15 可得,当幅值大致等于 25.2 mm 时,  $D_1$  与  $D_2$  的值较为接近,此时系统极限环的相对稳定性较好.

对比图 11 和图 14 可得,在极限环幅值趋近于极限位置  $X_e=27.4$  mm 时,  $D_1$  的值趋近于 0,即极限环相对稳定性变差;对比图 11 和图 15 可得,在极限环的幅值趋近于点火位置  $X_{ign}=24.7$  mm 时,  $D_2$  的值趋近于 0,极限环相对稳定性也变差. 这表明,若

极限环幅值接近  $X_c$  或者  $X_{ign}$ , 极限环的相对稳定性较差. 在实际系统中一般会对上止点进行闭环控制, 避免预定的活塞上止点接近点火位置或者气缸盖.

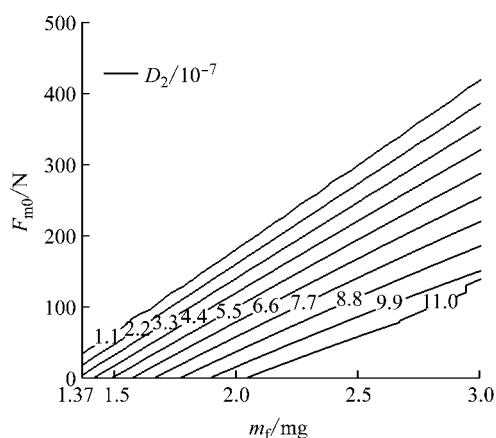


图 15  $m_f$  和  $F_{m0}$  对  $D_2$  的影响

Fig.15 Influence of  $m_f$  and  $F_{m0}$  on  $D_2$

## 4 试验验证

为了验证简化模型和描述函数法的准确性, 基于文献[15]中的直线增程器试验台架进行了系统倒拖和燃烧试验. 试验台架如图 16 所示. 倒拖和燃烧试验是将直线增程器的电机切换为电动机状态, 提供主动力拖动活塞组件运动, 在达到燃烧条件后开始交替点燃左右缸中的可燃混合气.

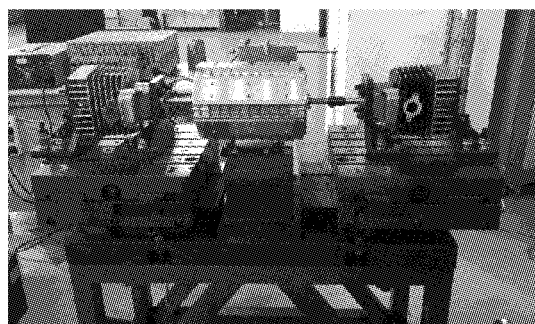


图 16 直线增程器试验台架

Fig.16 Prototype of linear range extender

### 4.1 简化模型的试验验证

倒拖和燃烧试验可以获得直线增程器的活塞组件运动轨迹, 将其与简化模型的仿真结果相对比, 以此验证简化模型的准确性.

设定直线增程器喷油量为 1.85 mg, 点火位置为极限位置前 3.5 mm, 直线电机拖动力设置为 160 N. 相应地, 令简化模型中喷油量  $m_f = 1.85$  mg,  $X_{ign} = 23.9$  mm,  $F_{m0} = -160$  N. 根据试验结果和简化模型仿真得到的数据, 绘制活塞组件位移如图 17

所示. 由图 17 可以看出, 位移曲线吻合良好, 验证了简化模型的准确性.

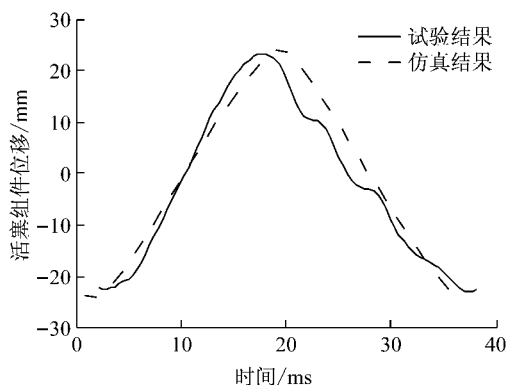


图 17 试验和仿真结果对比

Fig.17 Contrast of test and simulation results

### 4.2 描述函数法计算结果的试验验证

由试验获得的活塞组件运动轨迹可以计算实际极限环的频率和幅值. 将其与应用描述函数法计算出的结果相比较, 以此验证描述函数法的准确性.

试验中直线电机拖动力分别设置为 160、190 和 220 N; 相应地, 令简化模型中  $F_{m0}$  分别等于 -160、-190 和 -220 N. 保持其他参数与图 17 对应的参数相同. 通过试验和描述函数法得到的极限环的频率和幅值如表 2 和表 3 所示.

表 2 极限环频率的试验与计算结果对比

Tab.2 Comparison of experimental and calculated results for limit cycle frequency

$F_{m0}/N$	活塞组件运动频率/Hz		频率的相对误差/%
	试验结果	计算结果	
-160	27.72	26.11	5.81
-190	29.04	27.71	4.58
-220	30.58	29.14	4.71

表 3 极限环幅值的试验与计算结果对比

Tab.3 Comparison of experimental and calculated results for limit cycle amplitude

$F_{m0}/N$	活塞组件运动幅值/mm		幅值的相对误差/%
	试验结果	计算结果	
-160	24.56	26.00	-5.86
-190	24.53	26.50	-8.03
-220	24.54	26.90	-9.62

由表 2 可知, 试验得到的频率和描述函数法计算所得频率的相对误差在 6% 以内; 由表 3 可知, 试验得到的幅值和描述函数法计算所得幅值之间的相对误差在 10% 以内. 由于活塞运动幅值变化的量级为  $10^{-1}$  mm, 而系统的测量误差较大且描述函数法为近似方法, 所以试验结果中幅值的相对误差较大, 变化趋势和计算结果也存在一定的差别. 综上, 试验



结果进一步验证了简化动力学模型和描述函数法的准确性。

## 5 结论

基于简化的直线增程器动力学模型,用描述函数表示模型中的非线性单元,在复平面中绘制  $G(j\omega)$  和  $1/N(A)$  图像,根据该图像分析了极限环的存在性、数量和稳定性,并研究了喷油量和电磁力负载对极限环的频率、幅值以及相对稳定性的影响。最后,通过试验验证了简化动力学模型和描述函数法的准确性和可靠性。得出的结论如下:

(1)当喷油量和电磁力负载处于限制范围内时,直线增程器系统在物理约束的范围内存在唯一的极限环,并且这个极限环是稳定的。

(2)直线增程器系统极限环的频率和振幅与喷油量成正相关,与电磁力负载成负相关。

(3)在直线增程器稳态发电时,若活塞的上止点过于接近点火位置或者气缸盖,其极限环的相对稳定性变差。

## 参考文献:

- [1] 林滨滨,肖进,张磊. 基于 Simulink 和 GT-Power 的自由活塞发动机仿真[J]. 内燃机与动力装置, 2017, 34(1): 17.  
LIN Binbin, XIAO Jin, ZHANG Lei. Simulation of free piston linear generator based on Simulink and GT-power[J]. Internal Combustion Engine & Power Plant, 2017, 34(1): 17.
- [2] 邓俊,叶晓倩,尹兆雷,等. 直线发动/发电机启动性能仿真研究[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2013, 41(4): 596.  
DENG Jun, YE Xiaoqian, YIN Zhaolei, et al. Simulation on starting performance of a linear engine generator[J]. Journal of Tongji University(Natural Science), 2013, 41(4): 596.
- [3] 尹兆雷,王哲,邓俊,等. 直线发动机起动及怠速燃烧特性仿真与优化[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2012, 40(10): 1554.  
YIN Zhaolei, WANG Zhe, DENG Jun, et al. Simulation and optimization on combustion characteristics of linear-engine system in starting and idle process[J]. Journal of Tongji University(Natural Science), 2012, 40(10): 1554.
- [4] SUN C, WANG Z, YIN Z, et al. Investigation of control method for starting of linear internal combustion engine-linear generator integrated system [C] // SAE Technical Papers. Detroit: SAE International, 2015: 2015-01-1729.
- [5] GUO C, FENG H, JIA B, et al. Research on the operation characteristics of a free-piston linear generator: numerical model and experimental results [J]. Energy Conversion and Management, 2017, 131: 32.
- [6] JIA B, TIAN G, FENG H, et al. An experimental investigation into the starting process of free-piston engine generator [J]. Applied Energy, 2015, 157: 798.
- [7] YUAN C, FENG H, HE Y. An experimental research on the combustion and heat release characteristics of a free-piston diesel engine generator [J]. Fuel, 2017, 188: 390.
- [8] ZANG P, WANG Z, FU Y, et al. Investigation of scavenging process for steady-state operation of a linear internal combustion engine-linear generator integrated system [C] // SAE Technical Papers. Detroit: SAE International, 2017: 2017-01-1087.
- [9] ZANG P, WANG Z, SUN C. Investigation of combustion optimization control strategy for stable operation of linear internal combustion engine-linear generator integrated system [J]. SAE Int J Alt Power, 2016, 5(2): 382.
- [10] 肖翀,左正兴. 自由活塞发电机电动力学过程的非线性模型[J]. 北京理工大学学报, 2008, 28(11): 966.  
XIAO Chong, ZUO Zhengxing. Nonlinear model and first order approximate solution of a free piston generator [J]. Beijing Institute of Technology, 2008, 28(11): 966.
- [11] 褚亦清. 非线性振动分析 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1996.  
CHU Yiqing. Analysis of nonlinear vibrations [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996.
- [12] SLOTINE J J E, LI W. Applied nonlinear control [M]. Beijing: China Machine Press, 2004.
- [13] 顾旺旺. 直线增程器控制仿真技术研究 [D]. 上海: 同济大学, 2016.  
GU Wangwang. Study on simulation technique of linear range extender control [D]. Shanghai: Tongji University, 2016.
- [14] GOTO S, MORIYA K, KOSAKA H, et al. Development of free piston engine linear generator system part 2: investigation of control system for generator [C] // SAE Technical Papers. Detroit: SAE International, 2014: 2014-01-1193.
- [15] 孙晨乐,王哲,邓俊,等. 直线式增程器用直线 ISG 电机结构设计与优化 [J]. 汽车工程, 2014, 36(9): 1132.  
SUN Chenle, WANG Zhe, DENG Jun, et al. Structural design and optimization of linear ISG for linear range extender [J]. Automotive Engineering, 2014, 36(9): 1132.
- [16] 肖翀,左正兴. 自由活塞式内燃发电机动态仿真与特性分析 [J]. 农业机械学报, 2009, 40(2): 46.  
XIAO Chong, ZUO Zhengxing. Dynamic simulation and characteristic of free piston generator [J]. Transactions of The Chinese Society of Agricultural Machinery, 2009, 40(2): 46.