

考虑土体非均质性的三维土坡稳定性上限分析

李镜培^{1,2}, 龚卫兵^{1,2}, 李 林^{1,2}, 操小兵^{1,2}

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 基于极限分析上限法, 构建了三维土质边坡牛角状对数螺旋锥体破坏机制. 通过与经典文献解答的对比分析, 验证了方法的可靠性. 探讨了忽略土体体积压缩耗能对三维土坡稳定性系数的影响, 并分析了不同坡角、不同内摩擦角和不同宽高比三维土坡稳定性随土体非均质性变化的规律. 计算分析结果表明, 在内摩擦角较大而坡角和宽高比均较小的情况下, 土体体积压缩耗能需要考虑; 而在内摩擦角和坡角均较大或仅内摩擦角较小的情况下, 土体体积压缩耗能可以被忽略. 三维土坡稳定性随非均质性的增强而下降, 当坡角越小或内摩擦角越大时, 边坡稳定性受土体非均质性的影响越大; 边坡宽高比反映边坡的三维效应, 三维效应强的边坡的稳定性受土体非均质性的影响越大, 其稳定性系数在土体非均质性很强时小于三维效应较弱的边坡.

关键词: 对数螺旋锥体; 上限法; 非均质性; 稳定性系数; 三维效应

中图分类号: U416.1⁺4

文献标志码: A

Upper-Bound Limit Analysis on Stability of Three-Dimensional Slopes Considering Soil Nonhomogeneity

LI Jingpei^{1,2}, GONG Weibing^{1,2}, LI Lin^{1,2}, CAO Xiaobing^{1,2}

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The log-spiral cone failure mechanism of three-dimensional slopes was built based on the upper-bound limit analysis method. The present method was verified by comparing the results with the published data of the classical literature. The energy dissipation due to soil volume compression was neglected and the corresponding influence on the stability of three-dimensional slopes was investigated. Then, the effects of soil nonhomogeneity on the stability of

three-dimensional slopes with different inclination angles, internal friction angles and ratios of width to height were explored. The results show that the influence of the energy dissipation due to soil volume compression should be considered when the internal friction angle is large but the inclination angle and the ratio of width to height is small. However, when both the internal friction angle and the inclination angle are large or just the internal friction angle is small, the energy dissipation due to soil volume compression could be neglected. The stability of three-dimensional slopes decreases with the increase of nonhomogeneity and the decrease magnitude becomes larger when the slopes have smaller inclination angles or larger internal friction angles. In addition, the three-dimensional effects of slopes are reflected by ratios of width to height. Slopes with stronger three-dimensional effects are greatly affected by nonhomogeneity. When the nonhomogeneity is very strong, the stability factors of slopes with stronger three-dimensional effects are smaller than those of slopes with weaker three-dimensional effects.

Key words: log-spiral cone; upper-bound limit analysis method; nonhomogeneity; stability factor; three-dimensional effect

边坡稳定性分析是岩土工程研究中的经典问题. 目前, 关于边坡稳定性研究的方法主要有极限平衡法^[1-5]、有限元分析法^[6-9]和极限分析法^[10-13]. 极限平衡法作为较早分析边坡稳定性的方法, 因其力学概念明确、计算简单等特点一度成为分析边坡稳定性的主要方法^[14]. 但该方法在假设条块间作用力时, 往往存在假设过于简单的情况, 得到的解答既不是真实解的上限也不是下限, 对三维极限平衡法更是如此. 随着计算机运算能力和商用有限元分析软件功能的提升, 有限元分析法已成为分析边坡稳定性较为全面的一种方法. 该方法不仅可以考虑复杂

收稿日期: 2017-09-30

基金项目: 国家自然科学基金(41272288)

第一作者: 李镜培(1963—), 男, 教授, 工学博士, 主要研究方向为岩土力学、边坡及桩基工程等. E-mail: lij2773@tongji.edu.cn

通信作者: 龚卫兵(1992—), 男, 工程硕士, 主要研究方向为边坡稳定性和桩基工程. E-mail: weibingthomas@163.com

$$A = \frac{\sin(\theta_h - \theta_0)}{\sin \theta_h} - \frac{e^{<\theta_h - \theta_0> \tan \varphi} \sin \theta_h - \sin \theta_0}{\sin \theta_h \sin \beta} \sin(\theta_h + \beta) \quad (9)$$

当三维土质边坡纵向长度趋于一个较大值时, 三维边坡稳定性即可视作二维平面问题. 基于此, 将上述模型沿对称面切开, 插入宽度为 b 的二维边坡破坏模式. 当插入宽度 b 足够大时, 三维破坏模式即可转化为二维破坏模式, 该拓展的示意图可参见图 2. 图中, B 为滑动体的最大宽度, H 为边坡的高度.

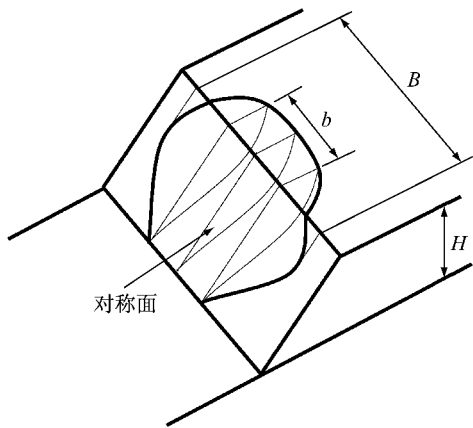


图 2 插入平面的破坏模式示意^[15]

Fig. 2 Schematic of failure mechanism with plane insert^[15]

1.2 重力做功计算

如图 1 所示, 重力对三维土块 ABC 所做的功可表示为

$$W_\gamma = 2\omega\gamma \left[\int_{\theta_0}^{\theta_B} \int_0^{X_1} \int_a^Y (r_m + y)^2 \cos\theta dx dy d\theta + \int_{\theta_B}^{\theta_h} \int_0^{X_2} \int_d^Y (r_m + y)^2 \cos\theta dx dy d\theta \right] \quad (10)$$

式中: γ 为土体的容重.

重力对图 2 中宽度为 b 的插入体所做的功为

$$W_{\gamma,P} = b\gamma\omega \left[\int_{\theta_0}^{\theta_B} \int_a^R (r_m + y)^2 \cos\theta dy d\theta + \int_{\theta_B}^{\theta_h} \int_d^R (r_m + y)^2 \cos\theta dy d\theta \right] \quad (11)$$

由式(10)和式(11)可将重力对滑动土体做的总功表示为

$$W = W_\gamma + W_{\gamma,P} \quad (12)$$

1.3 考虑非均质性的能量耗散计算

根据 Michalowski 和 Drescher 的研究可知三维土质边坡在失稳破坏时的内能耗散包括两部分, 一部分是土体沿破裂面滑动的摩擦耗能损失, 另一部分是土体体积压缩耗能损失^[15]. 为考虑土体在自然沉积过程中形成的非均质性, 依据 Chen^[10]、Nian

等^[12]和 Yang 等^[20]关于土体非均质性假设的模型, 采用黏聚力沿深度直线变化的模式来表示土体的非均质性(见图 3), 因此黏聚力大小可表示为

$$c(z) = \left[n_0 + \frac{z}{H} (1 - n_0) \right] c \quad (13)$$

式中: c 为土体黏聚力; n_0 为非均质系数, 取值范围为 $0 \sim 1$. n_0 越小, 土体的非均质性越强. 当 $n_0 = 1$ 时, 土体是均质的.

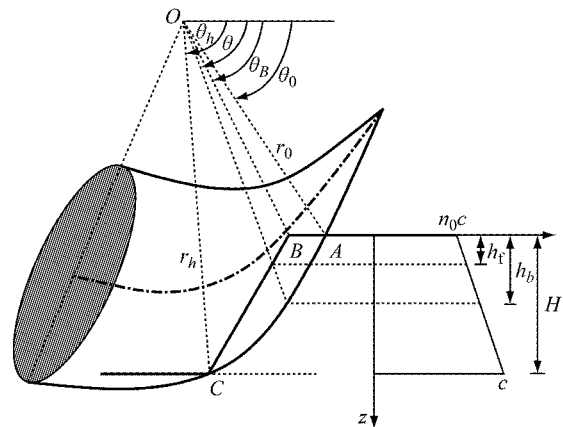


图 3 线性增大的土体非均质性

Fig. 3 Soil nonhomogeneity increasing linearly with depth

在考虑土体非均质性条件下, 土体体积压缩耗能计算将过于复杂而难以得到相应解答. 因此, 假设滑动土体不可压缩, 内能耗散仅发生在滑动面上, 那么土体沿三维滑动面(图 1)产生的摩擦耗能可表示为

$$D_{3D} = 2\omega \left[\int_{\theta_0}^{\theta_B} \int_a^R \frac{(r_m + y)^2}{\sqrt{R^2 - y^2}} c R dy d\theta + \int_{\theta_B}^{\theta_h} \int_d^R \frac{(r_m + y)^2}{\sqrt{R^2 - y^2}} c R dy d\theta \right] \quad (14)$$

图 2 中宽度为 b 的插入体滑动面产生的摩擦耗能可计算为

$$D_P = b\omega \int_{\theta_0}^{\theta_h} c (r_m + R)^2 d\theta \quad (15)$$

在土体非均质性条件下, 黏聚力是沿深度变化的. 因此, 根据图 3 中的几何关系可将坡面黏聚力表示为

$$c_f = c \left[n_0 + \frac{h_f}{H} (1 - n_0) \right] \quad (16)$$

式中: H 和 h_f 的表达式为

$$H = r_h \sin \theta_h - r_0 \sin \theta_0 \quad (17)$$

$$h_f = r_f \sin \theta - r_0 \sin \theta_0 \quad (18)$$

式中: r_f 为坡面到旋转中心的距离. 图 3 中对应滑裂面上的黏聚力可表示为

$$c_b = c \left[n_0 + \frac{h_b}{H} (1 - n_0) \right] \quad (19)$$

式中: h_b 的表达式为

$$h_b = r \sin \theta - r_0 \sin \theta_0 \quad (20)$$

根据三维边坡破坏模式的几何关系,可得 θ_0 至 θ_B 段以及 θ_B 至 θ_h 段的黏聚力分别为

$$c = \frac{y-a}{R-a}c_b + \frac{R-y}{R-a}n_0c, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_B \quad (21)$$

$$c = \frac{y-d}{R-d}c_b + \frac{R-y}{R-d}c_f, \theta_B \leq \theta \leq \theta_h \quad (22)$$

将式(21)和式(22)代入式(14),并将式(13)代入式(15),即可计算出考虑土体非均质性的内能耗散.

基于上限分析原理,三维土质边坡处于临界状态时重力所做的功与内能耗散相等,即

$$W = D_{3D} + D_P \quad (23)$$

将式(12)、式(14)和式(15)代入式(23)可得

$$\frac{\gamma H}{c} = F\left(\theta_0, \theta_h, \frac{r'_0}{r_0}\right) \quad (24)$$

式(24)的最小值可被定义为三维土质边坡的稳定性系数 N_s ^[10,15],即

$$N_s = \min F\left(\theta_0, \theta_h, \frac{r'_0}{r_0}\right) \quad (25)$$

当土体的内摩擦角 φ 、三维土质边坡坡角 β 、宽高比 B/H 给定时,即可编制相应的迭代程序计算确定三维土质边坡的稳定性系数.值得指出的是三维土质边坡的宽高比越小,对应边坡的三维效应就越明显.

2 验证

为了验证本文解答的准确性,将得出的稳定性系数结果与文献[15]不考虑土体体积压缩耗能即内摩擦角 $\varphi=0^\circ$ 的稳定性系数结果进行对比.与文献[15]相同,本文采用迭代计算的方法搜寻式(25)的最小值,但有区别的是本文首先假定一个较大的增量步,找出最小值可能存在的区间,然后缩小增量步从而在上述确定的区间搜寻最终的最小值,这样本文算法比文献[15]算法效率相对更高.

由于本文算法不同于文献[15]算法,因此计算得出的稳定性系数可能与文献[15]的结果存在差异.从图 4 的对比结果可以看出,当宽高比较小时 ($B/H < 2$),本文计算结果与文献[15]计算结果存在些许误差,但最大误差仅为 5%,且这个误差仅在 $B/H=1, \beta=45^\circ$ 时存在.另外,当宽高比较大时 ($B/H > 2$),本文计算结果与文献[15]的计算结果基本重合.因此,根据计算结果的比较,本文计算得出的

稳定性系数是合理的,解答具有准确性.

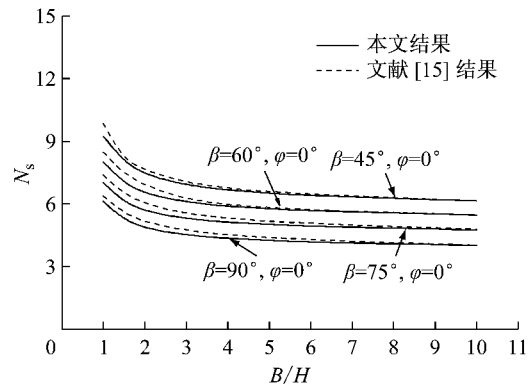


图 4 本文与文献[15]的稳定性系数对比

Fig. 4 Comparison between stability factors of present study and the literature [15]

3 非均质性的影响

3.1 不考虑体积压缩耗能对稳定性系数的影响

如前文所述,本文因考虑土体非均质性对三维土质边坡稳定性影响而无法考虑土体体积压缩产生的能量耗散,所以需要先分析忽略此部分耗能对稳定性系数的影响.图 5 和图 6 给出了本文只考虑摩擦耗能计算出的稳定性系数与文献[15]不仅考虑摩擦耗能且考虑土体体积压缩耗能的稳定性系数计算结果的对比.由图 5 可以看出,当土体内摩擦角 $\varphi=30^\circ$ 和三维土质边坡坡角 $\beta=45^\circ$ 时,本文不考虑土体体积压缩耗能的稳定性系数与文献[15]考虑土体体积压缩耗能稳定性系数存在一定误差.当宽高比较小时 ($B/H < 2$),两者误差较大;当宽高比较大时 ($B/H > 2$),两者的计算结果几乎重合.当三维边坡

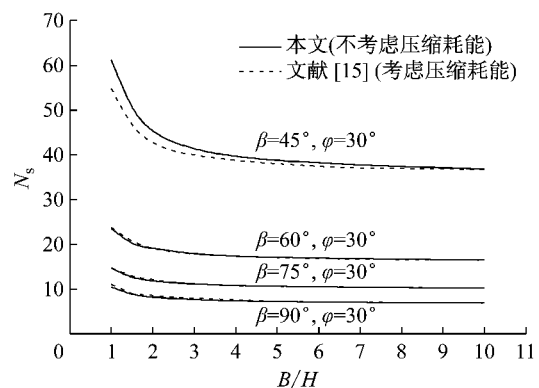


图 5 土体内摩擦角为 30° 时本文与文献[15]的稳定性系数对比

Fig. 5 Comparison between stability factors of present study and the literature [15] when $\varphi = 30^\circ$

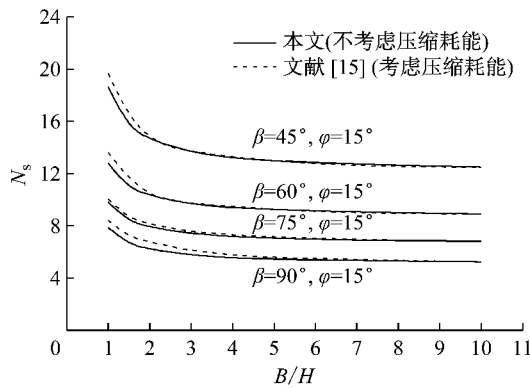


图 6 土体内摩擦角为 15° 时本文与文献[15]的稳定性系数对比
Fig. 6 Comparison between stability factors of present study and the literature when $\varphi = 15^\circ$

坡角 $\beta = 60^\circ, 75^\circ$ 和 90° 时, 本文结果与文献[15]结果几乎重合. 由图 6 可以看出, 当土体内摩擦角 $\varphi = 15^\circ$ 时, 本文不考虑土体体积压缩耗能的稳定性系数和文献[15]考虑土体体积压缩耗能的稳定性系数存在一定误差, 但这些误差均较小, 且在合理范围之内.

因此, 可以总结得出当土体内摩擦角较大而边坡坡角较小时, 如果三维土质边坡的宽高比也较小, 则需考虑土体体积压缩产生的能量耗散; 如果三维土质边坡的宽高比较大, 则土体体积压缩产生的能量耗散可以忽略. 此外, 当土体内摩擦角和边坡坡角均较大或者仅土体内摩擦角较小时, 土体体积压缩产生的能量耗散对三维土坡稳定性系数的影响也可忽略.

3.2 参数分析

图 7 为土体非均质性对不同坡角的三维土质边坡稳定性影响结果对比. 从图中可以发现, 随着土体非均质性的增强, 即非均质系数减小, 不同坡角的三维土质边坡的稳定性系数都呈现减小趋势, 且坡角越小, 其稳定性系数减小的趋势越明显, 说明土体非均质性对坡角较小的三维土质边坡稳定性影响越强. 图 8 为土体非均质性对不同内摩擦角的三维土质边坡稳定性影响结果对比. 从图中同样可以发现, 随着土体非均质性的增强, 三维土质边坡的稳定性系数都呈现减小趋势, 且内摩擦角较大的三维土质边坡稳定性减弱越明显. 因此, 对坡角较小或内摩擦角较大的三维土质边坡, 土体非均质性对其稳定性的影响较显著.

图 9 为土体非均质性对不同宽高比的三维土质边坡稳定性影响结果对比. 如前文所述, 宽高比反映了土质边坡的三维效应, 即宽高比越小, 边坡三维效应越强. 从图中可以发现, 土体非均质性对三维效应

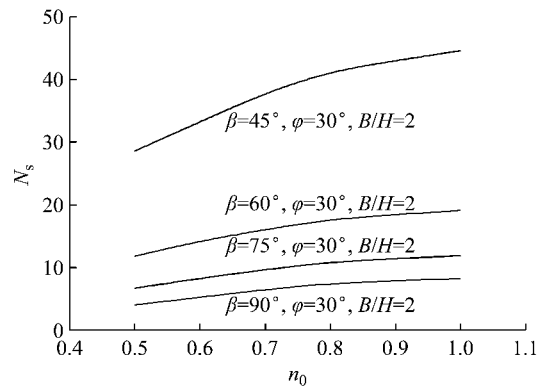


图 7 非均质性对不同坡角的三维边坡稳定性系数影响
Fig. 7 Influence of nonhomogeneity on stability factors of three-dimensional slopes with different inclination angles

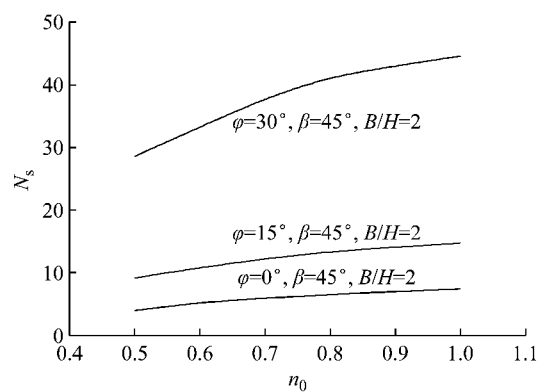


图 8 非均质性对不同内摩擦角的三维边坡稳定性系数影响
Fig. 8 Influence of nonhomogeneity on stability factor of three-dimensional slopes with different internal friction angles

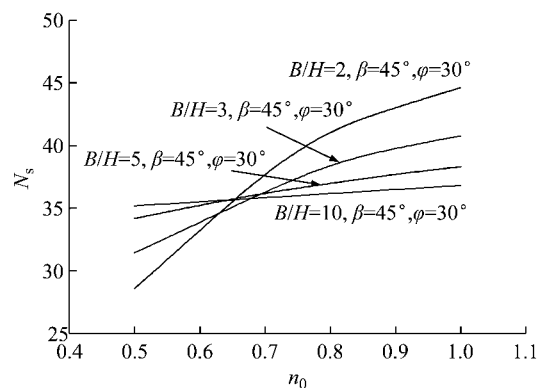


图 9 非均质性对不同宽高比的三维边坡稳定性系数影响
Fig. 9 Influence of nonhomogeneity on stability factor of three-dimensional slopes with different ratios of width to height

越强的土质边坡稳定性影响越明显, 而对三维效应较弱的边坡稳定性影响较小. 同时, 从图中可以看出, 在不考虑土体非均质性条件下, 三维效应强的土

质边坡其稳定性系数要大于三维效应较弱的边坡,但在考虑土体非均质性条件下,特别当土体具有很强的非均质性时,三维效应强的边坡其稳定性系数可能会小于三维效应较弱的边坡。

4 结论

基于极限分析法探讨了土体非均质性对三维土质边坡稳定性的影响,分析了忽略土体体积压缩耗能对边坡稳定性的影响。主要结论如下:

(1) 当三维土质边坡内摩擦角较大而坡角和宽高比较小时,土体体积压缩产生的能量耗散需要考虑;当三维土质边坡内摩擦角和坡角均较大或仅土体内摩擦角较小时,土体体积压缩产生的能量耗散可以忽略。

(2) 土体非均质性对坡角较小或内摩擦角较大的三维土质边坡稳定性影响较大。三维土质边坡坡角越小、内摩擦角越大,土体非均质性对其稳定性的影响越强。

(3) 边坡三维效应越强,土体非均质性对其稳定性的影响也越强。当土体非均质性很强时,三维效应较强边坡的稳定性系数小于三维效应较弱边坡的稳定性系数。

参考文献:

[1] 郑颖人,赵尚毅,时卫民,等. 边坡稳定分析的一些进展[J]. 地下空间,2001,21(4):262.
ZHENG Yingren,ZHAO Shangyi,SHI Weimin, *et al.* Progress in analysis of slope stability[J]. *Underground Space*,2001,21(4):262.

[2] 杨明成,郑颖人. 基于极限平衡理论的局部最小安全系数法[J]. 岩土工程学报,2002,24(5):600.
YANG Mingcheng,ZHENG Yingren. Local minimum factor-of-safety method based on limit equilibrium theory[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*,2002,24(5):600.

[3] 卢坤林,朱大勇,甘文宁,等. 一种边坡稳定性分析的三维极限平衡法及应用[J]. 岩土工程学报,2013,35(12):2276.
LU Kunlin,ZHU Dayong,GAN Wenning, *et al.* 3D limit equilibrium method for slope stability analysis and its application[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*,2013,35(12):2276.

[4] LAM L, FREDLUND D G. A general limit equilibrium model for three-dimensional slope stability analysis [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1993, 30(6): 905.

[5] AL-KARNI A A, AL-SHAMRANI M A. Study of the effect of soil anisotropy on slope stability using method of slices[J]. *Computers and Geotechnics*, 2000, 26(2): 83.

[6] 张磊,张璐璐,程演,等. 考虑潜蚀影响的降雨入渗边坡稳定性分析[J]. 岩土工程学报,2014,36(9):1680.

ZHANG Lei,ZHANG Lulu,CHENG Yan, *et al.* Slope stability under rainfall infiltration considering internal erosion [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2014, 36(9):1680.

[7] 陈金锋,宋二祥,徐明. 强度折减有限元法在昆明新机场高填方边坡稳定分析中的应用[J]. 岩土力学,2011,32(S1):636.
CHEN Jinfeng, SONG Erxiang, XU Ming. Application of strength reduction FEM to stability analysis of high fill slope in Kunming new airport[J]. *Rock and Soil Mechanics*,2011,32(S1):636.

[8] MATSUI T, SAN K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique [J]. *Soils and Foundations*, 1992, 32(1): 59.

[9] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction [J]. *Géotechnique*, 1999, 49(6): 835.

[10] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Amsterdam: Elsevier, 1975.

[11] 年廷凯,栾茂田,杨庆. 阻滑桩加固土坡稳定性分析与桩基的简化设计[J]. 岩石力学与工程学报,2005,24(19):3427.
NIAN Tingkai,LUAN Maotian,YANG Qing. Stability analysis of slopes with stabilizing piles and their simplified design[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*,2005,24(19):3427.

[12] NIAN T K, CHEN G Q, LUAN M T, *et al.* Limit analysis of the stability of slopes reinforced with piles against landslide in nonhomogeneous and anisotropic soils [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2008, 45(8): 1092.

[13] 唐高朋,赵炼恒,李亮,等. 基于 MATLAB 的边坡稳定性极限上限分析程序开发[J]. 岩土力学,2013,34(7):2091.
TANG Gaopeng,ZHAO Lianheng,LI Liang, *et al.* Program development for slope stability using MATLAB software and upper bound limit analysis [J]. *Rock and Soil Mechanics*,2013,34(7):2091.

[14] DONALD I B, CHEN Z. Slope stability analysis by the upper bound approach: Fundamentals and methods [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1997, 34(6): 853.

[15] MICHALOWSKI R L, DRESCHER A. Three-dimensional stability of slopes and excavations[J]. *Géotechnique*, 2009, 59(10): 839.

[16] 饶平平,赵琳学,李林,等. 坡面沉桩边坡动态稳定性三维极限上限分析[J]. 岩石力学与工程学报,2017,36(3):697.
RAO Pingping,ZHAO Linxue,LI Lin, *et al.* Three-dimensional dynamic stability analysis of slope during pile driving using upper-bound limit analysis [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*,2017,36(3):697.

[17] GAO Y F, ZHANG F, LEI G H, *et al.* An extended limit analysis of three-dimensional slope stability[J]. *Géotechnique*, 2013, 63(6): 518.

[18] GAO Y, YE M, ZHANG F. Three-dimensional analysis of slopes reinforced with piles [J]. *Journal of Central South University*, 2015, 22(6): 2322.

[19] PAN Q, XU J, DIAS D. Three-dimensional stability of a slope subjected to seepage forces [J]. *International Journal of Geomechanics*, 2017, 17(8): 04017035.

[20] YANG X L, XU J. Three-dimensional stability of two-stage slope in inhomogeneous soils [J]. *International Journal of Geomechanics*, 2017, 17(7): 06016045.