第 46 卷第 7 期
2018 年 7 月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 46 No. 7
Jul. 2018

文章编号：0253-374X(2018)07-0988-03

DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2018.07.018

关于路和圈的 3-色 Ramsey 数

陈 明[1,2]，李雨生[1]

（1. 同济大学 数学科学学院，上海 200092；2. 嘉兴学院 数理与信息工程学院，浙江 嘉兴 314000）

摘要：对于给定的图 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，$k \geqslant 2$，k-色 Ramsey 数 $R(G_1, G_2, \cdots, G_k)$ 是指最小的正整数 n，使得对 n 个点的完全图进行任意的 k-边染色，总是存在某个染 i 色的单色图 G_i，$1 \leqslant i \leqslant k$. 对 $G_1 = G_2 = P_m$，$G_3 = C_n$ 的情况进行了研究，得到了 n 较大时的 3-色 Ramsey 数 $R(P_m, P_m, C_n)$ 的准确值.

关键词：路；圈；3-色 Ramsey 数

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A

On Some Three-color Ramsey Numbers of Paths and Cycles

CHEN Ming[1,2], *LI Yusheng*[1]

(1. School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Mathematics Physics and Information Engineering, Jiaxing University, Jiaxing Zhejiang 314000, China)

Abstract: For given graphs $G_1, G_2, \cdots, G_k$, where $k \geqslant 2$, the k-color Ramsey number $R(G_1, G_2, \cdots, G_k)$ is the smallest integer n such that if we arbitrarily color the edges of the complete graph on n vertices with k colors, there is always a monochromatic copy of G_i colored with color i, for some $1 \leqslant i \leqslant k$. In this note, we provide the exact value for 3-color Ramsey $R(P_m, P_m, C_n)$, where n is larger than m.

Key words: path; cycle; 3-color Ramsey number

1 研究背景

本文研究的图均为简单无向图. 设 G 是一个图，其点集和边集分别为 $V(G)$ 和 $E(G)$，并分别用 $n(G)$、$\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 表示图 G 的阶数、最大度以及最小度. Pn 和 Cn 分别表示由 n 个点构成的路和圈. 图 G 中最大的圈长称为该图的周长，用 $c(G)$ 来表示. 其他有关图的定义，可参考文献[1].

对于给定的图 $G_1, G_2, \cdots, G_k$，$k \geqslant 2$，k-色 Ramsey 数 $R(G_1, G_2, \cdots, G_k)$ 是指最小的正整数 n，使得对 n 个点的完全图进行任意的 k-边染色，总是存在某个染 i 色的单色图 G_i，$1 \leqslant i \leqslant k$. 若 $G_1 = G_2 = \cdots = G_k = G$，$k$-色 Ramsey 数 $R(G_1, G_2, \cdots, G_k)$ 简记为 $R_k(G)$，又称之为 G 的对角 k-色 Ramsey 数. 当 $k = 2$ 时，2-色 Ramsey 数通常简称为 Ramsey 数.

关于 Ramsey 数的研究成果非常丰富，详细可见动态综述文献[2]. 但对于 k-色 Ramsey 数（$k \geqslant 3$）的研究结果相对较少，并且主要集中在对路和圈等结构比较明确的图的研究上. 对于充分大的路和圈，其对角 3-色 Ramsey 数已经明确：

定理 1[3]　设 n 充分大，则 $R_3(P_n) = 2n - 2 + (n \bmod 2)$；

定理 2[4]　设 n 是一个充分大的偶数，则有 $R_3(C_n) = 2n$；

定理 3[5]　设 n 是一个充分大的奇数，则有 $R_3(C_n) = 4n - 3$.

对于任意的 n，很多学者猜测定理 1～3 也是成立的，但目前仅有少数情况得到验证.

对于路和圈的混合 3-色 Ramsey 数，已有学者给出了一些准确值：

定理 4[6]　设 $n \geqslant 6$，则 $R(P_3, P_3, C_n) = n$；

定理 5[7]　设 $n \geqslant 6$，则 $R(P_4, P_4, C_n) = n + 2$；

定理 6[8]　设 $n \geqslant 23$，则 $R(P_4, P_5, C_n) = n + 2$，$R(P_4, P_6, C_n) = n + 3$；

定理 7[9]　设 m, n, k 是正整数. 若满足 $k \geqslant 3$ 是一个奇数，$n \geqslant k$，且 m 为奇数时 $n > \frac{3m^2 - 14m + 25}{4}$，$m$ 为偶数时，$n > \frac{3m^2 - 10m + 20}{8}$，则：

$$R(P_m, P_n, C_k) = 2n + 2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 3$$

收稿日期：2017-11-14

基金项目：国家自然科学基金（11331003），浙江省自然科学基金（LY17F030020），浙江省嘉兴市科技局项目（2016AY13011）

第一作者：陈　明（1981—），男，博士生，讲师，主要研究方向为组合数学与图论. E-mail：chen2001ming@163.com

通信作者：李雨生（1954—），男，理学博士，教授，博士生导师，主要研究方向为组合数学与图论. E-mail：li_yusheng@tongji.edu.cn

在此基础上,本文证明了:

定理 8 设 m 为偶数,$n>\frac{2m^2-5m+7}{3}$,则 $R(P_m,P_m,C_n)=m+n-2$;

定理 9 设 m 为奇数,$n>2m^2-7m+8$,则 $R(P_m,P_m,C_n)=m+n-3$.

2 主要结果的证明

为了证明定理 8 和定理 9,将用到以下术语符号和定理.

设 a 和 b 是正整数,定义 $r(a,b)=a-b\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor=a \bmod b$. 对于整数 $n\geqslant k\geqslant 3$,定义:$w(n,k)=\frac{1}{2}(n-1)k-\frac{1}{2}r(k-r-1)$,其中 $r=r(n-1,k-1)$.

定理 10[10] 设 G 是一个有 n 个点的非二部图,若它的边数超过$\frac{(n-1)^2}{4}+1$,则图 G 含有从 3 到最大长的所有长度的圈.

定理 11[11] 设 G 是一个有 n 个点和 m 条边的图,$m\geqslant n$,且周长 $c(G)=k$. 则 $m\leqslant w(n,k)$.

2.1 定理 8 的证明

当 $m\leqslant 4$ 时,由定理 5 可知结论成立. 以下设 $m\geqslant 6$.

先证 $R(P_m,P_m,C_n)\geqslant m+n-2$. 设 K_{m+n-3} 是 $m+n-3$个点构成的完全图,把其点集分成三部分 X、Y 和 Z,其中$|X|=n-1$, $|Y|=|Z|=\frac{m-2}{2}$. 现对 K_{m+n-3}进行如下的 3-边染色(三种颜色设为红、蓝和绿):X、Y 和 Z 内部的边,以及 Y 和 Z 之间的边都染绿色,X 和 Y 之间的边都染蓝色,X 和 Z 之间的边都染红色. 很明显在这个 3-边染色的 K_{m+n-3} 中,不含有红色的 P_m,也不含有蓝色的 P_m,还不含有绿色的 C_n. 因此,由 3-色 Ramsey 数的定义可知 $R(P_m,P_m,C_n)\geqslant m+n-2$.

再证 $R(P_m,P_m,C_n)\leqslant m+n-2$,令 $N= m+n-2$,只需证明任意 3-边染色(三种颜色设为红、蓝和绿)的 K_N,至少含有红色的 P_m、蓝色的 P_m 和绿色的 C_n 中之一. 方便起见,分别称红(蓝、绿)边导出的子图为红(蓝、绿)子图. 下面假设某 3-边染色的 K_N,不含有红色的 P_m,不含蓝色的 P_m,也不含绿色的 C_n,从而导出矛盾.

假设绿子图是一个二部图. 因为 $m\geqslant 6$,故 $n>\frac{2m^2-5m+7}{3}>2m$. 因此,在该二部图中至少有一个部集的点数至少为 $\frac{3m-2}{2}$. 因为 m 为偶数时,$R(P_m,P_m)=\frac{3m-2}{2}$,所以该部集的导出子图要么含有一个红色 P_m,要么含有一个蓝色 P_m,矛盾.

绿色子图不是一个二部图. 由于 3-边染色的 K_N 中不含有红色的 P_m,由路的 Turán 数可知,红边至多有$\frac{m-2}{2}N$ 条. 类似地,蓝边也至多有$\frac{m-2}{2}N$ 条. 因此,绿子图的边数至少为$\frac{N(N-1)}{2}-2\,\frac{m-2}{2}\cdot N$. 易验证,当 $n>\frac{2m^2-5m+7}{3}$ $(m\geqslant 6)$时,有:

$$\frac{N(N-1)}{2}-2\cdot\frac{m-2}{2}N>\frac{(N-1)^2}{4}+1$$

因为绿子图中不含有 C_n,由定理 10 可知,绿子图的周长最大为 $n-1$. 再根据定理 11,可知 K_N 中绿边的条数至多为

$$w(N,n-1)=\frac{1}{2}(N-1)(n-2)-\frac{1}{2}(m-1)(n-1-(m-1)-1)$$

因此,该 3-边染色的 K_N 的总边数$\frac{N(N-1)}{2}$满足:

$$\frac{N(N-1)}{2}\leqslant 2\cdot\frac{m-2}{2}N+w(N,n-1)=(m-2)N+\frac{1}{2}(N-1)(n-2)-\frac{1}{2}(m-1)(n-m-1)$$

这和题设中的 $n>\frac{2m^2-5m+7}{3}$矛盾,定理 8 证毕.

2.2 定理 9 的证明

当 $m=3$ 时,由定理 4 可知结论成立. 以下设 $m\geqslant 5$.

先证 $R(P_m,P_m,C_n)\geqslant m+n-3$. 设 K_{m+n-4} 是 $m+n-4$个点构成的完全图,将其点集分成三部分 X、Y 和 Z,其中$|X|=n-1$, $|Y|=|Z|=\frac{m-3}{2}$. 现对 K_{m+n-4}进行如下的 3-边染色(三种颜色设为红、蓝和绿):X、Y 和 Z 内部的边,以及 Y 和 Z 之间的边都染绿色,X 和 Y 之间的边都染蓝色,X 和 Z 之间的边都染红色. 很明显在这个 3-边染色的 K_{m+n-4} 中,不含有红色的 P_m,也不含有蓝色的 P_m,还不含有绿色的 C_n. 因此,由 3-色 Ramsey 数的定义可知 $R(P_m,P_m,C_n)\geqslant m+n-3$.

再证 $R(P_m,P_m,C_n)\leqslant m+n-3$,令 $N= m+n-3$,只需证明任意 3-边染色(三种颜色设为红、蓝和绿)的 K_N,至少含有红色的 P_m、蓝色的 P_m 和绿色

的 C_n 中之一.方便起见,分别称红(蓝、绿)边导出的子图为红(蓝、绿)子图.下面假设某3-边染色的 K_N,不含有红色的 P_m,不含蓝色的 P_m,也不含绿色的 C_n,从而导出矛盾.

假设绿子图是一个二部图.因为 $m\geqslant 5$,故 $n>2m^2-7m+8>2m$.因此,在该二部图中至少有一个部集的点数至少为 $\frac{3m-3}{2}$.因为 m 为奇数时,$R(P_m,P_m)=\frac{3m-3}{2}$,所以该部集的导出子图要么含有一个红色 P_m,要么含有一个蓝色 P_m,矛盾.

绿色子图不是一个二部图.由于3-边染色的 K_N 中不含有红色的 P_m,由路的 Turán 数可知,红边至多有 $\frac{m-2}{2}N$ 条.类似地,蓝边也至多有 $\frac{m-2}{2}N$ 条.因此,绿子图的边数至少为:$\frac{N(N-1)}{2}-2\cdot\frac{m-2}{2}N$.易验证,当 $n>2m^2-7m+8(m\geqslant 5)$ 时,有:

$$\frac{N(N-1)}{2}-2\cdot\frac{m-2}{2}N>\frac{(N-1)^2}{4}+1$$

因为绿子图中不含有 C_n,由定理10可知,绿子图的周长最大为 $n-1$.再根据定理11,可知 K_N 中绿边的条数至多为

$$w(N,n-1)=\frac{1}{2}(N-1)(n-2)-\frac{1}{2}(m-2)(n-1-(m-2)-1)$$

因此,该3-边染色的 K_N 的总边数 $\frac{N(N-1)}{2}$ 满足:

$$\frac{N(N-1)}{2}\leqslant 2\cdot\frac{m-2}{2}N+w(N,n-1)=(m-2)N+\frac{1}{2}(N-1)(n-2)-\frac{1}{2}(m-2)(n-m)$$

这和题设中的 $n>2m^2-7m+8$ 矛盾,定理9证毕.

鉴于目前所有的研究,给出一个大胆的猜测:

猜想 对任意正整数 n 和 m,且 $n\geqslant m$,有 $R(P_m,P_m,C_n)=m+n-2-(m \bmod 2)$.

参考文献:

[1] BOLLOBÁS B. Modern graph theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[2] RADZISZOWSKI S P. Small ramsey numbers [J]. Electronic Journal of Combinatorics, 2011, 1(4): 28.

[3] GYÁRFS A, RUSZINKÓ M, SÁKÖZY G N, *et al*. Three color ramsey numbers for paths [J]. Combinatorica, 2007, 27(1): 35.

[4] BENEVIDES F S, SKOKAN J. The 3-colored ramsey number of even cycles [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2009, 99(4): 690.

[5] KOHAYAKAWA Y, SIMONOVITS M, SKOKAN J. The 3-colored Ramsey number of odd cycles [J]. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2005, 19: 397.

[6] DZIDO T. Multicolor ramsey numbers for paths and cycles [J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2005, 25(1-2): 57.

[7] DZIDO T, KUBALE M, PIWAKOWSKI K. On some ramsey and turán-type numbers for paths and cycles [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2006, 13: R55.

[8] SHAO Zehui, XU Xiaodong, SHI Xiaolong, *et al*. Some three-color Ramsey numbers, $R(P_4,P_5,C_k)$ and $R(P_4,P_6,C_k)$ [J]. European Journal of Combinatorics, 2009, 30(2): 396.

[9] DZIDO T, FIDYTEK R. On some three color ramsey numbers for paths and cycles [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(15): 4955.

[10] BRANDT S. A sufficient condition for all short cycles [J]. Discrete Applied Mathematics, 1997, 79(1-3): 63.

[11] CACCETTA L, VIJAYAN K. Maximal cycles in graphs [J]. Discrete Mathematics, 1991, 98(1): 1.