

Baarda 数据探测法中的粗差误判分析

杨 玲, 喻杨康

(同济大学 测绘与地理信息学院, 上海 200092)

摘要: 重点讨论了数据探测法中系统发生误警、漏检和误判的原因. 探讨了 3 类错误与检验量间相关系数的函数关系, 给出了在多个备选假设下 3 类错误发生概率的估计公式. 以 2 个备选假设为例, 通过仿真模拟计算了 3 类错误发生概率随统计量间相关系数的变化趋势, 并证明当观测值统计量间强相关时, 数据探测法发生误警的概率显著增加, 从而导致最小可探测粗差理论值与实际值不符, 降低了数据探测法的可信度及系统的可靠性. 最后利用 2 个不同网形的算例验证了结论.

关键词: 数据探测法; 误判; 统计检验量; 相关系数

中图分类号: P2

文献标志码: A

Separability Analysis for Baarda Data Snooping Method

YANG Ling, YU Yangkang

(College of Surveying and Geo-Informatics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The Baarda' data snooping method detects the outlier by making decision between the null and alternative hypotheses. Based on this method, usually only the false alert and missed detection were considered and the possibilities were defined for the minimal detectable bias (MDB). Nevertheless, in practical application, there are always multiple alternative hypotheses. Therefore, a third type error - wrong exclusion - occurs, which was caused by the correlation between two test statistics. The probabilities of false alert, missed detection, wrong exclusion can be considered as functions of the correlation coefficient. Monte Carlo methods were used to calculate the possibilities of these three types of errors with different correlation coefficients for two alternative hypotheses. It has proved that when the correlation is high the probability of committing wrong exclusion increases exponentially. As a result, the discrepancy between the theoretical and realistic MDB values

enlarges, and accordingly the confidence level and the system reliability decrease. Finally, numerical experiments were conducted to analyze and compare the performance of two examples with different geometry conditions.

Key words: data snooping; wrong exclusion; test statistic; correlation coefficient

粗差探测与识别是测绘、导航及相关领域的研究热点. 在融合卫星定位、视觉导航等技术的多传感器融合导航定位系统中, 观测数据量呈指数倍增加, 提高了定位精度及可靠性. 与此同时, 系统冗余度增加导致粗差出现的概率及复杂度也成倍增加, 故系统需具备更强的粗差探测与识别能力^[1-4].

目前, 粗差探测与识别方法主要有两类: 一类将粗差纳入函数模型, 认为粗差导致该观测值期望平移, 由此发展了数据探测法^[1-2]; 另一类将粗差纳入随机模型, 认为粗差与正常观测值等期望, 但方差膨胀(变大), 由此发展了抗差估计理论^[3-4]. 基于第一类思想, 文献[1]最早提出了针对单粗差的数据探测法, 基于已知单位权方差, 利用服从正态分布的标准化残差作为统计量(data snooping). 在此基础上, 文献[5]根据观测值的多余观测分量判断其对粗差的容忍度, 提出了一种基于局部分析法的粗差探测法. 文献[6]基于真误差与观测值间的解析关系, 提出了拟准检定法(QUAD); 文献[7]借鉴拟稳平差思想, 附加“拟准观测的真误差范数极小”条件, 解决了关于真误差的秩亏方程组求确定解的问题; 文献[8-9]提出了多维粗差同时定位定值法(LEGE), 可同时定位并求解多个粗差. 有学者证明, 当观测值独立时以上 3 种方法理论等价^[10-11]. 基于第二类思想, 发展了适用于最小二乘平差的选权迭代法^[3-4]. 文献[12]比较了数据探测法和选权迭代法抵抗粗差的效果差

收稿日期: 2017-11-16

基金项目: 国家自然科学基金青年项目(41504022)

第一作者: 杨 玲(1986—), 女, 助理教授, 硕士生导师, 工学博士, 主要研究方向为多源数据融合导航及稳健估计.

E-mail: lingyang@tongji.edu.cn

异;文献[13]构造了适用于相关观测值的等价权函数;文献[14]利用中位数法估计参数初值,提高了选权迭代法的抗差性.以上相关研究也广泛应用于导航定位^[15-17]和方差分量估计^[18]等平差问题.

不同数据探测法或抗差估计均通过建立观测值函数的统计量来进行粗差探测与定位.由于真误差不完全可知,因此,粗差探测可能发生误警和漏检^[19-20].文献[21-23]基于误警和漏检概率提出了单粗差及多粗差影响下的系统内部和外部可靠性指标,但并未考虑粗差误判(错误定位)的可能.当系统中观测值统计量强相关,或存在多个粗差时,粗差误判概率将显著升高,并对参数估计造成更显著的偏差影响.文献[19]分析了粗差误判对摄影测量光束法平差的精度影响;文献[24]仿真计算了 2 个备选假设下的单个粗差的误判概率;文献[25]初步推导了多个备选假设下发生误警、漏检和误判的概率的近似计算公式,但估计精度有待提高.

虽已有研究对粗差误判的可能和原因进行了分析,但仍难以准确估计其对系统内、外部可靠性参数的影响.因此,详细讨论数据探测法中系统发生误警、漏检和误判的原因,理论推导多维备选假设下误警、漏检和误判概率与统计量间相关性的函数关系.

1 数据探测法

1.1 单个备选假设

Baarda 数据探测法基于间接平差模型^[9]

$$Ax + e = y \quad (1)$$

式中: y 为 $n \times 1$ 阶观测值向量; A 为 $n \times t$ 阶列满秩设计矩阵; x 为 $t \times 1$ 阶参数向量; e 为 $n \times 1$ 阶观测误差. Q 为 $n \times n$ 阶表征观测值精度的方差-协方差阵(正定阵),则式(1)的参数及其方差的最小二乘解为

$$\hat{x} = (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} y, Q_x = (A^T Q^{-1} A)^{-1} \quad (2)$$

观测值残差及其方差的最小二乘解为

$$\begin{aligned} \hat{v} &= y - A \hat{x} = Ry \\ Q_v &= Q - A Q_x A^T = RQ \end{aligned} \quad (3)$$

式中: $R = I - A Q_x A^T Q^{-1}$ 是幂等阵,表征了观测值与其残差间的映射关系,称为可靠性矩阵,与观测值无关,取决于设计矩阵 A 和协方差阵 Q ^[1].

设平差系统中只存在单个粗差,数据探测法将粗差归入函数模型,认为粗差与正常观测值方差相同而期望不同,进而利用统计假设检验探测并剔除粗差.设观测值 y_i 中含有粗差 Δ_i ,按式(1)~(3)平

差后得粗差的估值 Δ_i 及其方差 q_{Δ} ,进而可构造统计量 w_i ^[1].

$$w_i = \frac{\hat{\Delta}_i}{\sqrt{q_{\Delta}}} = \frac{\{Q^{-1}R\}_{i*}y}{\sqrt{\{Q^{-1}R\}_{ii}}} \quad (4)$$

当不存在粗差时,原假设成立,即 $H_0: w_i \sim N(0, 1)$.若存在粗差,则备选假设成立,即 $H_1: w_i \sim N(\delta_0, 1)$.

对于 w_i ,选定显著水平 α_0 和检验功效 $1 - \beta_0$,或选定显著水平 α_0 和非中心化参数 δ_0 进行假设检验.若 $|w_i| \leq k_0$,则认为粗差不存在;若 $|w_i| > k_0$,则认为存在明显粗差.其中, $k_0 = \mu_{1-\alpha_0/2}$ 为显著水平对应的标准正态分布的分位值.

一般而言,假设检验认为小概率事件在一次试验中不可能发生.然而事实上,小概率事件发生概率虽小,但仍存在.因而,一次试验中假设检验的结果可能与客观现实矛盾,产生弃真和纳伪错误,致使系统发生误警或漏检,如表 1 所示^[1].

表 1 单个备选假设时的检验抉择

Tab.1 Stochastic test decisions for signal alternative hypothesis

客观现实	检验结果	
	接受 H_0	接受 H_1
H_0 为真	正确抉择($1 - \alpha_0$)	弃真错误(α_0)
H_1 为真	纳伪错误(β_0)	正确抉择($1 - \beta_0$)

表 1 中显示的是单个备选假设时假设检验的 4 种检验抉择,括号内为对应的概率值.换言之,在一个显著水平为 α_0 的假设检验中,若原假设 H_0 为真,错误选择备选假设的概率为 α_0 ,即 $P(|w_i| > k_0) = \alpha_0$;反之,若备选假设 H_1 为真,错误选择原假设的概率为 β_0 ,即 $P(|w_i| \leq k_0) = \beta_0$.由此可推算非中心化参数 δ_0 为

$$\delta_0 = \mu_{1-\alpha_0/2} - \mu_{\beta_0} \quad (5)$$

由式(4)、(5)可得最小可探测粗差 MDB 为^[21]

$$\Delta_i = \frac{\delta_0}{\sqrt{\{Q^{-1}R\}_{ii}}} \quad (6)$$

1.2 多个备选假设

因最小二乘法会将系统的多余观测分量均摊到各观测值改正数,某观测值上的粗差平差后会对其观测值统计量造成影响,从而可能导致多个检验量超限.常规做法是将绝对值最大的检验量对应的观测值标记为粗差并剔除,然后重复进行“平差—检验—剔除粗差观测值”的过程,直到所有检验量均满足 $|w_i| \leq k_0$.此时,统计假设检验需在多个备选假设下做出判断,不仅可能发生误警和漏检,还可能犯误判错误,即错误地定位粗差,其具体解释如表 2^[25].

表 2 多个备选假设时的检验抉择

Tab.2 Stochastic test decisions for multiple alternative hypothesis

客观现实	检验结果		
	接受 H_0	接受 H_i	接受 H_j
H_0 为真	正确抉择($1-\alpha_{00}$)	弃真错误(α_{0i})	弃真错误(α_{0j})
H_i 为真	纳伪错误(β_{i0})	正确抉择($1-\beta_{ii}$)	误判错误(γ_{ij})
H_j 为真	纳伪错误(β_{j0})	误判错误(γ_{ji})	正确抉择($1-\beta_{jj}$)

表 2 为多个备选假设时的检验抉择。

(1) 当客观现实不存在粗差时, $1-\alpha_{00}$ 表示检验时若考虑多个备选假设则原假设 H_0 被正确接受的概率为

$$1-\alpha_{00} = P(\bigcap (|\omega_i| \leq k_0) | H_0) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (7)$$

式中: $P(*)$ 表示事件“*”的概率; $\bigcap(*)$ 表示多个事件“*”的并集; “ $|H_0$ ”表示在事件 H_0 发生的条件下; “ $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ”表示变量 i 取 1 至 n 中的任意值, n 为统计量 ω_i 的个数。 α_{0i} 表示错误地放弃原假设而接受备选假设 H_i 的概率(称为弃真错误)为

$$\alpha_{0i} = P(|\omega_i| > k_0 \&\& |\omega_i| > |\omega_k| | H_0) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \&\& k \neq i \quad (8)$$

则, 总的弃真概率为

$$\alpha_{00} = \sum \alpha_{0i} \quad (9)$$

(2) 当客观现实是第 i 个观测值中存在粗差时, 备选假设 H_i 被正确接受的概率为

$$1-\beta_{ii} = P(|\omega_i| > k_0 \&\& |\omega_i| > |\omega_k| | H_i) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (10)$$

相应的纳伪概率为

$$\beta_{i0} = P(\bigcap (|\omega_k| \leq k_0) | H_i) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (11)$$

同时, 存在误判概率为

$$\gamma_{ij} = P(|\omega_j| > k_0 \&\& |\omega_j| > |\omega_k| | H_i) \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (12)$$

式(12)表示第 j 个观测值被错误判断为粗差的概率, 则总的误判概率为

$$\gamma_i = \sum \gamma_{ij} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \&\& j \neq i \quad (13)$$

式(7)~(11)表明, 若阈值 k_0 和非中心化参数 δ_0 仍由单个备选假设检验的显著水平 α_0 和检验功效 $1-\beta_0$ 决定, 则此时真实的误警和漏检概率分别为 α_{00} 和 β_{i0} , 而非 α_0 和 β_0 。

2 多个备选假设下的 3 类误差分析

文献[25]研究表明, 多个备选假设下的误警、漏

检和误判概率受检验量间相关系数的影响, 以下 2 个备选假设为例进行分析。 试验步骤如下:

(1) 生成 2×10^6 个二维统计量 (ω_1, ω_2) ; 满足 $(\omega_1, \omega_2) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 其中 $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, 对应实际情况为观测值中不存在粗差。 第 1 次实验 $\rho = 0$ 。

(2) 设显著水平(误警概率) $\alpha_0 = 0.1\%$, 统计 $\rho = 0$ 时的实际误警概率 $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{02}$ 。

(3) 重复步骤(1)和(2), 取步长 0.01, 使 ρ 从 0 逐渐增加至 1; 则步骤(2)统计的 3 个参数 $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{02}$ 可表示为相关系数 ρ 的函数, 如图 1 所示。

(4) 设显著水平(误警概率) $\alpha_0 = 0.1\%$ 、漏检概率 $\beta_0 = 20\%$, 则对应的非中心化参数 $\delta_0 = 4.13$ 。

(5) 生成 2×10^6 个二维统计量 (ω_1, ω_2) ; 满足 $(\omega_1, \omega_2) \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, 其中 $\boldsymbol{\mu} = (\delta_0, \delta_0\rho)$, $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ 。 对应的实际情况是第 1 个观测量中存在粗差, 使其对应统计量 ω_1 的期望漂移至 δ_0 , 同时令 ω_2 的期望漂移至 $\rho\delta_0$ 。

(6) 统计实际漏检概率 β_{10} 及误判概率 γ_{12} 。

(7) 重复步骤(5)和(6), 取步长 0.01, 使 ρ 从 0 逐渐增加至 1; 则步骤(6)统计的参数 β_{10} 和 γ_{12} 可表示为相关系数 ρ 的函数, 如图 2 和图 3 所示。

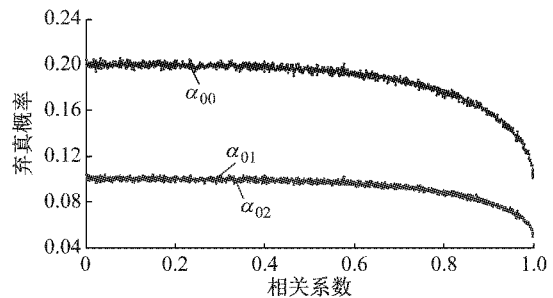


图 1 误警概率随相关系数变化曲线

Fig.1 Possibility of false alert changing with correlation coefficient

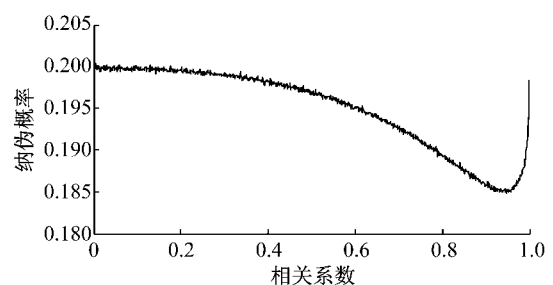


图 2 漏检概率随相关系数变化曲线

Fig.2 Possibility of missed detection changing with correlation coefficient

图 1 显示,对正常系统(无粗差)进行 2 个备选假设的统计检验时,误警概率随相关系数 ρ 的增大逐渐降低,且这几个误警概率之间满足: $\alpha_{00} = \alpha_{01} + \alpha_{02}$,由对称性原理可得 $\alpha_{01} = \alpha_{02}$,因而 $\alpha_{00} = 2\alpha_{01}$.当设 $\alpha_0 = 0.10\%$ 时,相关系数 $\rho = 0$ 对应的误警概率为 $\alpha_{00} = 0.20\% = 2\alpha_0$, $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 0.10\% = \alpha_0$;相关系数 $\rho = 1.0$ 对应的误警概率分别为 $\alpha_{00} = 0.10\% = \alpha_0$, $\alpha_{01} = \alpha_{02} = 0.05\% = \alpha_0/2$.

图 2 和图 3 为实际第 1 个观测值中存在粗差时系统的漏检和误判概率随相关系数的变化曲线.图 2 显示当两统计量间相关系数为零时,系统真实的纳伪概率 β_{10} 与 β_0 (20%) 相等.而随着相关系数 ρ 的增加, β_{10} 先递减,随后又迅速递增至一个略低于 β_0 的值.图 3 显示,误判概率随相关系数 ρ 单调递增,当 ρ 从 0.8 增加至 1.0 时,误判概率从 6% 增加至 40%.可见相关系数越大,数据探测法的误判概率就越高,进而严重影响探测成功率及参数估计的可靠性.当 $\rho = 0$ 和 $\rho = 1$ 时,3 类错误概率可直接由式(7)~(11) 计算,列于表 3.该表显示,其结果与图 1 至图 3 的极

值情况相符.

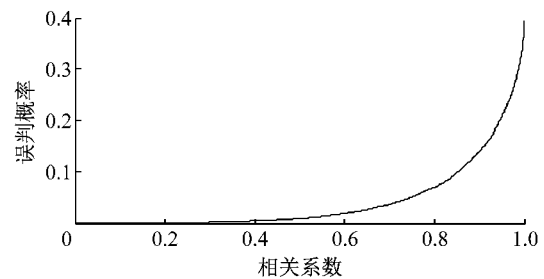


图 3 误判概率随相关系数变化曲线

Fig.3 Possibility of wrong exclusion changing with correlation coefficient

以上分析基于 2 个备选假设,实际应用于多个备选假设的统计假设检验时, n 个观测值对应 n 个统计量 w_i ,两两统计量的相关系数为 ρ_{ij} ,则共有 $n(n-1)/2$ 个相关系数,且这些相关系数各不相同.因而,误警、漏检和误判的概率计算更为复杂,无法理论推导得解析解,只能通过大量蒙特卡洛仿真模拟进行统计.

表 3 $\rho = 0$ 与 $\rho = 1$ 时 2 个备选假设下的误警、漏检和误判概率

Tab.3 Probability of false alert, missed detection and wrong identification for two alternative hypotheses while $\rho = 0$ and $\rho = 1$

参数	$\rho = 0$		$\rho = 1$	
	无粗差	粗差为 1	无粗差	粗差为 1
μ	(0, 0)	($\delta_0, 0$)	(0, 0)	(δ_0, δ_0)
方差	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	
α_{00}	$1 - (1 - \alpha_0)^2 = 0.2\%$		$\alpha_0 = 0.1\%$	
$\alpha_{01(02)}$	0.1%		0.05%	
β_{10}	$\beta_0 (1 - \alpha_0) = 19.98\%$		$\beta_0 = 20\%$	
γ_{12}	0		$(1 - \beta_0)/2 = 40\%$	

3 试验分析

为分析统计量间相关性对系统粗差探测能力的影响,以图 4 水准网为例进行分析,其对应的观测值及其已知信息列于表 4(例 1).

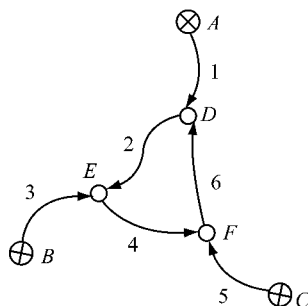


图 4 水准网的示意图

Fig.4 Levelling network

表 4 给出了观测值 l_1 至 l_6 及待定参数 D 、 E 、 F 三点高程的真值,为排除一次观测中偶然误差的影响,通过构建大量服从已知正态分布的观测误差(期望为零,方差阵 Q 为权阵 P 的逆阵)及粗差来统计误警、漏检和误判的概率.

表 4 水准网路线观测值

Tab.4 Measurements of the levelling network

线号	高差观测值/真值/m	线路长度/km	权	已知高程/m
1	1.644	4.5	0.22	$H_A = 34.788$
2	-0.440	3.1	0.32	$H_B = 35.259$
3	0.734	3.4	0.29	$H_C = 37.825$
4	1.238	3.8	0.26	$H_D = 36.432$
5	-0.594	4.3	0.23	$H_E = 35.993$
6	-0.799	2.5	0.40	$H_F = 37.231$

3.1 w 检验

首先,为了研究偶然误差对观测值残差的影响,

对观测值 $L=(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)^T$ 加入服从正态分布 $N(0, Q)$ 的偶然误差,模拟次数为 2×10^6 ,进行最小二乘平差及 w 检验. 统计假设检验量 w_i 由式(4)求得,检验量之间的相关系数由式(14)求得,并列于表 5.

$$\rho_{ij} = \text{cov}(w_i, w_j) = \frac{\{Q^{-1}R\}_{ij}}{\sqrt{\{Q^{-1}R\}_{ii}\{Q^{-1}R\}_{jj}}} \quad (14)$$

表 6 显示了当观测值仅含偶然误差时,统计量 $|w_i| > k_0$ 的概率 ($\alpha_0 = 0.1\%$). 可见,对任意仅含偶然误差的观测值进行单个备选假设的 w 检验时,其

表 5 统计量 w 的相关系数矩阵

Tab.5 Correlation coefficient matrix of the test statistic w

统计量	1	2	3	4	5	6
1	1.000 0	0.439 8	-0.515 6	-0.049 4	-0.467 8	-0.468 6
2	0.439 8	1.000 0	-0.508 6	0.537 7	0.085 0	0.587 3
3	-0.515 6	-0.508 6	1.000 0	0.452 4	-0.516 1	-0.035 6
4	-0.049 4	0.537 7	0.452 4	1.000 0	-0.417 3	0.573 4
5	-0.467 8	0.085 0	-0.516 1	-0.417 3	1.000 0	0.505 2
6	-0.468 6	0.587 3	-0.035 6	0.573 4	0.505 2	1.000 0

表 6 无粗差时 $|w_i| > k_0$ 的概率

Tab.6 Possibility of $|w_i| > k_0$ without outliers

统计量	$P/\%$	统计量	$P/\%$
1	0.100 0	4	0.099 9
2	0.100 0	5	0.100 0
3	0.099 8	6	0.100 0

误差概率即为置信水平 α_0 .

表 7 显示了分别在各观测值中加入 1 倍中误差大小的粗差时统计量 $|w_i| > k_0$ 的概率. 可见,各观测值统计量对粗差的敏感程度不同,且粗差不仅使其对应的统计量变大,也不同程度的影响了其他观测值统计量,从而导致粗差可能错误定位. 例如,在 l_4 上加入粗差,将导致 $|w_6| > k_0$ 的概率为 0.22%.

表 7 粗差大小为 $\sqrt{Q_{ii}}$ 时 $|w_i| > k_0$ 的概率

Tab.7 Possibility of $|w_i| > k_0$ with an outlier

粗差位置	size of $\sqrt{Q_{ii}}$ %					
	统计量					
	1	2	3	4	5	6
1	0.58	0.10	0.20	0.10	0.18	0.18
2	0.16	0.40	0.18	0.19	0.10	0.20
3	0.18	0.10	0.47	0.17	0.18	0.11
4	0.10	0.20	0.17	0.54	0.16	0.22
5	0.18	0.10	0.20	0.16	0.56	0.19
6	0.15	0.19	0.10	0.18	0.16	0.39

表 8 显示了当在各观测值中加入 3 倍中误差大小的粗差时,统计量 $|w_i| > k_0$ 的概率. 与表 7 对比可知,粗差越大,其被成功探测的概率也越高. 但各观测值对粗差的敏感程度存在差异,这是由式(3)中 R 阵对角元素 R_{ii} 决定的. 此外,第 i 个观测值上的粗差除了影响其自身统计量,也影响其他观测值统计量. 当某一观测值 l_i 存在粗差时,其他统计量 $|w_j| > k_0$ 的概率亦随之增加,且增幅与其之间的相关系数正相关.

表 8 粗差大小为 $3\sqrt{Q_{ii}}$ 时 $|w_i| > k_0$ 的概率

Tab.8 Possibility of $|w_i| > k_0$ with an outlier

粗差位置	size of $3\sqrt{Q_{ii}}$ %					
	统计量					
	1	2	3	4	5	6
1	15.58	1.11	1.72	0.11	1.31	1.32
2	0.87	10.98	1.25	1.49	0.12	1.87
3	1.27	1.22	10.61	0.91	1.29	0.10
4	0.10	1.76	1.11	14.01	0.91	2.14
5	1.24	0.12	1.63	0.92	14.46	1.52
6	0.79	1.43	0.10	1.34	0.97	7.85

为进一步研究粗差大小与其探测成功率的关系,在各观测值上加入大小为 $\sqrt{Q_{ii}}$ 到 $10\sqrt{Q_{ii}}$ 的粗差,并统计各粗差的正确探测概率,如图 5 所示. 该图显示,粗差越大,其被正确探测的概率就越高,但并非线性增加,且对不同观测值上粗差的探测能力略有差异. 图 6 显示了与各观测值相关性最大的另一观测值的统计量超限的概率. 例如,对 l_1 而言, $\rho_{13} = -0.5156$ 最大,则该图中(1,3)虚线表示在 l_1 上加入粗差时, $|w_3| > k_0$ 的概率. 该图显示, $|w_j| > k_0$ 的概率随粗差增大而加速增大,说明某一观测值

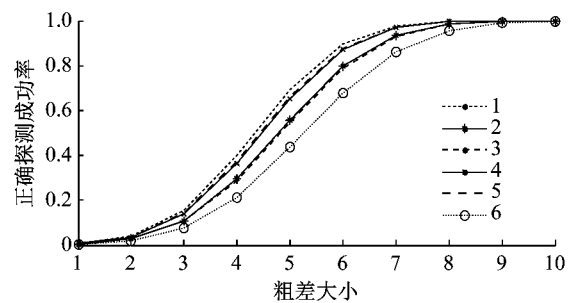


图 5 各观测值上加入粗差时成功检测的概率

Fig.5 Possibility of $|w_i| > k_0$ with the outlier size on w_i increasing from $\sqrt{Q_{ii}}$ to $10\sqrt{Q_{ii}}$

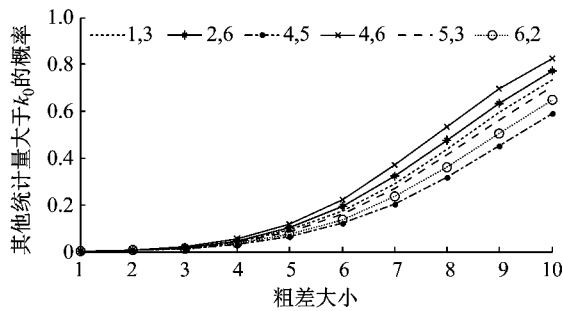


图 6 各观测值 l_i 上的粗差从 Q_{ii} 增至 $10\sqrt{Q_{ii}}$ 时导致其他统计量 w_j 大于 k_0 的概率

Fig. 6 Possibility of $|w_j| > k_0$ with the outlier on l_i increasing from $\sqrt{Q_{ii}}$ to $10\sqrt{Q_{ii}}$

上的大粗差很有可能导致其他正常观测值被错误探测为粗差。

3.2 MDB 的计算与检验

Baarda 数据探测法中定义了最小可探测粗差 (MDB, minimal detectable bias), 其数学含义是当粗差大小为 MDB 时, 以分位值 $k_0 = \mu_{1-\alpha_0/2}$ 作为阈值, 则 $|w_i| \leq k_0$ 的概率即为漏检概率 β_0 。

取 $\alpha_0 = 0.1\%$ 、 $\beta_0 = 20\%$, 表 9 为水准网中各观测值的 MDB 值。依次在各观测值上加入其 MDB 大小的粗差, 统计各观测值统计量超限的概率, 列于表 10。该表中, 对角元素为各观测值上粗差被成功探测的概率, 均接近其理论值 80%; 非对角元素表示某观测值上的粗差被错误定位到其他观测值的概率。对比表 5 可知, 统计量间的相关系数越大, 对应位置上的误判概率就越大。

表 9 各观测值的 MDB

观测值	Δ_i	观测值	Δ_i
1	11.600	4	11.008
2	10.627	5	11.595
3	11.241	6	10.453

表 10 粗差大小为 MDB 时 $|w_i| \leq k_0$ 的概率

粗差位置	统计量						%
	1	2	3	4	5	6	
1	80.00	7.01	12.32	0.13	8.71	8.78	
2	7.04	79.99	11.70	14.28	0.18	19.4	
3	12.31	11.71	79.96	7.72	12.31	0.11	
4	0.13	14.26	7.75	79.99	5.85	17.83	
5	8.72	0.18	12.36	5.84	79.97	11.42	
6	8.78	19.42	0.11	17.92	11.43	80.00	

3.3 数据探测法中的粗差误判分析

在实际应用中, 即便只存在单个粗差, 由于统计量之间的相关性, 该粗差可能导致多个检验量均大

于阈值 k_0 。然而, 数据探测法的实际过程是每次仅剔除最大统计量对应的观测值而利用剩余的观测值重新平差, 直到所有的统计检验量均小于 k_0 。因此, 数据探测法的实际检验条件为仅当

$$|w_i| > k_0 \&\& |w_i| > |w_k| \mid H_i$$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \&\& k \neq i \quad (15)$$

时认为第 i 个观测值存在粗差。针对这一条件进行统计分析, 对于图 4 所示水准网, 将大小为其 MDB 值的粗差依次加入各观测值中, 将式 (15) 成立的概率列于表 11。

表 11 例 1 中粗差大小为 MDB 时数据探测法的成功率、误判率及漏检率

Tab.11 Possibility of successful identification, wrong exclusion and missed detection while outlier size is MDB (example 1)

粗差位置	成功率或误判率						漏检率
	统计量 1	统计量 2	统计量 3	统计量 4	统计量 5	统计量 6	
1	77.92	0.61	1.02	0.01	0.73	0.73	18.98
2	0.61	76.99	0.96	1.15	0.02	1.63	18.65
3	1.05	0.98	77.47	0.67	1.04	0.01	18.79
4	0.01	1.13	0.67	77.34	0.5	1.49	18.86
5	0.72	0.02	1.04	0.53	77.77	0.95	18.96
6	0.73	1.63	0.01	1.49	0.94	76.6	18.60

注: 黑体为成功率。

表 11 中, 对角线数值表示粗差正确定位的概率, 非对角线数值表示粗差被误判到其他观测值上的概率, 最后一列数值表示漏检概率。如第 1 行数据显示, l_1 上的粗差被误判到 l_3 的概率是 1.02%, 而被误判到 l_4 上的概率仅为 0.01%。这一误判错误是由检验量间的相关性导致的, 这也是数据探测法的主要问题及重点讨论内容。对比表 5 可知, 误判概率与两统计量之间的相关系数呈正相关。

3.4 另一网型下的第 3 类错误分析

为对比不同网形中相关系数对误判概率的影响, 采用一组单历元 GPS 伪距观测数据进行实验分析。对原始观测方程进行线性化后得到最小二乘的函数模型和随机模型如下 (例 2)。

原始观测值矩阵 $L = (2.070 \ 0.800 \ -2.581 \ 1.818 \ -0.880 \ 0.174 \ 2.081 \ 0.171)^T$ 。

系数矩阵 $A =$

0.254 7	0.853 7	0.454 2	1.000 0
-0.082 7	0.929 0	0.360 8	1.000 0
0.574 4	-0.384 6	-0.722 6	1.000 0
-0.698 9	0.161 0	-0.696 9	1.000 0
0.995 3	0.068 2	-0.068 7	1.000 0
0.362 0	0.663 8	-0.654 5	1.000 0
0.954 1	0.274 1	0.121 0	1.000 0
-0.230 6	0.695 8	-0.680 3	1.000 0

观测值权阵 $Q = \text{diag}(145.055 \ 85.807 \ 67.511 \ 31.461 \ 176.927 \ 9.590 \ 199.721 \ 10.372)$.

得其观测值对应统计量之间的相关系数矩阵为

$$\rho = \begin{bmatrix} 1.00 & -0.73 & 0.14 & 0.03 & -0.19 & 0.02 & -0.25 & -0.01 \\ -0.73 & 1.00 & 0.40 & -0.16 & -0.18 & 0.19 & -0.28 & -0.20 \\ 0.14 & 0.40 & 1.00 & -0.77 & -0.51 & -0.38 & -0.34 & 0.38 \\ 0.03 & -0.16 & -0.77 & 1.00 & 0.03 & 0.87 & 0.09 & -0.87 \\ -0.19 & -0.18 & -0.51 & 0.03 & 1.00 & -0.24 & -0.26 & 0.24 \\ 0.02 & 0.19 & -0.38 & 0.87 & -0.24 & 1.00 & -0.20 & -1.00 \\ -0.25 & -0.28 & -0.34 & 0.09 & -0.26 & -0.20 & 1.00 & 0.20 \\ -0.01 & -0.20 & 0.38 & -0.87 & 0.24 & -1.00 & 0.20 & 1.00 \end{bmatrix}$$

统计分析结果列于表 12,其加入的粗差大小是取 $\alpha_0 = 0.1\%$ 、 $\beta_0 = 20\%$ 时各观测值的 MDB 值. 对角线数值为依次在各观测值中加入其 MDB 大小的粗差时该粗差被正确探测的概率,非对角线数值为误判概率,最后一列为漏检概率. 对比各行数值可知,当 l_7 含粗差时漏检概率最高,为 19.36%;而 l_4 含粗差时,漏检概率最低,为 17.44%. 然而,在实际应用中,由于误判错误的影响,漏检概率并不能完全反映数据探测法的成功率. 检验量间相关系数越大,误判概率就越高,相应的粗差探测成功率就越低. 例如该例中,相关系数 $|\rho_{68}|$ 高达 1,所以当 l_6 含粗差时,其被正确探测的概率只有 34.68%,而被误判到 l_8 上

的概率却高达 35.35%. 因此,当观测值检验量间的相关系数很大时,误判错误可能是影响粗差探测正确率的重要因素.

对比表 11 和表 12 可知,在不同网形中, MDB 的有效性差异很大. 例 1 网形中各统计量间的相关系数分布较均匀,最大值为 0.587 3. 对应的误判概率最大不超过 2%,因而并未对系统粗差探测成功率造成显著影响,此时 MDB 仍可有效表征系统的内部可靠性. 在例 2 网形中,某些统计量间的相关性很强,如 $|\rho_{68}|$ 达到 1.00,其他如 $|\rho_{46}|$ 、 $|\rho_{48}|$ 也都高达 0.87. 相应的,表 12 中各观测值上的粗差探测成功率都显著降低.

表 12 例 2 中粗差大小为 MDB 时数据探测法的成功率、误判率及漏检率

Tab. 12 Possibility of successful identification, wrong exclusion and missed detection while outlier size is MDB (example 2)

粗差位置	粗差大小	成功率或误判率/%								漏检率/%
		统计量 1	统计量 2	统计量 3	统计量 4	统计量 5	统计量 6	统计量 7	统计量 8	
1	61.009	76.20	4.38	0.05	0.02	0.10	0.02	0.15	0.01	19.08
2	55.633	4.32	75.84	0.43	0.03	0.07	0	0.21	0.09	19.03
3	56.360	0.06	0.44	74.06	5.68	1.00	0	0.32	0.02	18.41
4	43.894	0.02	0.05	5.66	65.24	0.01	6.09	0.03	5.46	17.44
5	62.333	0.10	0.07	1.02	0	79.24	0.06	0.15	0.08	19.28
6	26.375	0.03	0.06	0.03	11.21	0.13	34.68	0.09	35.35	18.43
7	65.234	0.13	0.20	0.29	0.02	0.17	0.08	79.74	0.01	19.36
8	20.905	0.02	0.08	0.04	10.89	0.15	33.82	0.13	36.54	18.34

注:黑体为成功率.

4 结论

理论和算例分析表明,数据探测法的误警、漏检和误判概率与统计量间相关系数相关,尤其当统计量间强相关性时,误判概率显著增加. 传统的数据探测法仅考虑了误警和漏检,而忽略了系统误判的可能,从而导致真实的粗差探测成功率低于其理论值. 为削弱这一影响,应尽量使平差系统中各观测值检验量间的相关系数较小,式(14)显示相关系数由可靠性矩阵 R 和观测值方差阵 Q 决定,而可靠性矩阵

R 取决于设计矩阵 A 和权阵 P ,因此需设计科学合理的网形,才能使得系统粗差探测的效果更优. 而对于很多测量问题,初始网形一经采用,无法更改,此时,必须考虑该网形中观测值统计量间的相关系数,计算真实的误警、漏检和误判概率作为粗差探测及系统可靠性评估的指标之一.

参考文献:

[1] BAARDA W. A testing procedure for use in geodetic networks [J]. Netherland Geodetic Commission, 1968, 2(5):1.
 [2] TEUNISSEN P J G. Testing theory, an introduction [M].

- Delft; Delft University Press, 2000.
- [3] 周江文. 经典误差理论与抗差估计[J]. 测绘学报, 1989, 12(2):115.
ZHOU Jiangwen. Classical error theory and robust estimation [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1989, 12(2):115.
- [4] 杨元喜. 抗差估计理论及其应用[M]. 北京:八一出版社, 1993.
YANG Yuanxi. Robust estimation theory and its application [M]. Beijing: Bayi Press, 1993.
- [5] 孙海燕, 黄华兵, 王喜娜. 多维平差问题粗差的局部分析法[J]. 测绘学报, 2012, 41(1):54.
SHUN Haiyan, HUANG Huabing, WANG Xina. Local analysis method on gross error of multidimensional adjustment problem [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(1):54.
- [6] 欧吉坤. 粗差的拟准检定法(QUAD法)[J]. 测绘学报, 1999, 23(1):15.
OU Jikun. Quasi-accurate detection of gross errors (QUAD) [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1999, 23(1):15.
- [7] 欧吉坤. 一种三步抗差方案的设计[J]. 测绘学报, 1996, 23(1):15.
OU Jikun. Design of a new scheme of robust estimation by three steps[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1996, 23(1):15.
- [8] 於宗涛, 李明峰. 多维粗差的同时定位与定值[J]. 武汉:武汉测绘科技大学学报, 1996, 21(4):323.
YU Zhongchou, LI Mingfeng. Positioning and valuation of multidimensional gross errors[J]. Wuhan: Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1996, 21(4): 323.
- [9] 於宗涛, 李明峰. 对LEGE法性质的进一步讨论及其改进搜索方法[J]. 武汉:武汉测绘科技大学学报, 1998, 23(3):244.
YU Zhongchou, LI Mingfeng. A further discussion on the LEGE method and its improved search method[J]. Wuhan: Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1998, 23(3):244.
- [10] 鲁铁定. 几种粗差估值方法的比较[J]. 测绘学报, 2016, 45(6): 656.
LU Tieding. Comparison of several methods for outlier estimation[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2016, 45(6): 656.
- [11] 王海涛, 欧吉坤, 袁运斌, 等. 估计观测值粗差三种方法的等价性讨论[J]. 武汉:武汉大学学报(信息科学版), 2013, 38(2):162.
WANG Haitao, OU Jikun, YUAN Yunbing, *et al.* Equivalence discussion on three methods for estimating the gross error of observations[J]. Wuhan: Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2013, 38(2):162.
- [12] 刘文生, 唐守路. 稳健估计的两种粗差探测方法[J]. 辽宁:辽宁工程技术大学学报, 2016(1):54.
LIU Wensheng, TANG Shoulu. Two robust detection methods for robust estimation [J]. Liaoning: Liaoning Engineering Technology University Press, 2016(1):54.
- [13] YANG Y, SONG L, XU T. Robust estimator for correlated observations based on bifactor equivalent weights[J]. Journal of Geodesy, 2002, 76(6):353.
- [14] 杨玲, 沈云中, 楼立志. 基于中位参数初值的等价权抗差估计方法[J]. 测绘学报, 2011, 40(1): 28.
YANG Ling, SHEN Yunzhong, LOU Lizhi. Equivalent weight robust estimation method based on median parameter estimates [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2011, 40(1): 28.
- [15] YANG L, LI Y, WU Y L. Efficient quality control procedure for GNSS/INS integrated navigation system[C]// 4th China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2013 Proceedings. Wuhan:[s. n.], 2013:673-684.
- [16] WANG J, KNIGHT N L. New outlier separability test and its application in GNSS positioning [J]. Journal of Global Positioning Systems, 2012, 11:46.
- [17] YANG L, LI Y, WU Y L, *et al.* An enhanced MEMS-INS/GNSS integrated system with fault detection and exclusion capability for land vehicle navigation in urban areas[J]. GPS Solutions, 2014, 18(4): 593.
- [18] 李博峰, 沈云中. 基于等效残差探测粗差的方差-协方差分量估计[J]. 测绘学报, 2011, 40(1):10.
LI Bofeng, SHEN Yunzhong. Equivalent residual product based outlier detection for variance and covariance component estimation[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2011, 40(1):10.
- [19] 李德仁. 误差处理和可靠性理论[M]. 北京:测绘出版社, 1988.
LI Deren. Error handling and reliability theory[J]. Beijing: Survey Press, 1988.
- [20] 岑敏仪, 卓健成, 李志林, 等. 判断观测值粗差能否发现和定位的一种验前方法[J]. 测绘学报, 2003, 32(2):134.
CEN Minyi, ZHUO Jiancheng, LI Zhilin, *et al.* A Method of judging whether gross errors detectable and locatable in observations before least squares adjustment [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2003, 32(2):134.
- [21] 李德仁. 误差处理和可靠性理论[M]. 北京:北京测绘出版社, 1988.
LI Deren. Error handling and reliability theory[M]. Beijing: Beijing Survey Press, 1998.
- [22] 陶本藻. 姚宜斌. 可靠性分析与数据探测[J]. 武汉:武汉大学学报:信息科学版, 2002, 27(6):607.
TAO Benzao, YAO Yibin. Reliability analysis and data detection [J]. Wuhan: Geomatics and information Science of Wuhan University, 2002, 27(6):607.
- [23] KNIGHT N L, WANG J, RIZOS C. Generalised measures of reliability for multiple outliers[J]. Journal of Geodesy, 2010, 84(10), 625.
- [24] Förstner W. Reliability and discernability of extended Gauss-Markov models[EB/OL]. [2017-11-01]. http://xueshu.baidu.com/s?wd=Reliability+and+discernability+of+extended+Gauss-Markov+models%2C&tn=SE_baiduxueshu_c1gieupa&cl=3&ie=utf-8&bs=%E6%9D%8E%E5%BE%B7%E4%BB%81.+%E8%AF%AF%E5%B7%AE%E5%A4%84%E7%90%86%E5%92%8C%E5%8F%AF%E9%9D%A0%E6%80%A7%E7%90%86%E8%AE%BA%5B%5D&f=8&rsrv_bp=1&rsrv_sug2=1&sc_f_para=sc_tasktype%3D%7BfirstSimpleSearch%7D&rsrv_spt=3&rsrv_n=2.
- [25] YANG L, WANG J, KNIGHT N L, *et al.* Outlier separability analysis with a multiple alternative hypotheses test[J]. Journal of Geodesy, 2013, 87(6): 591.