

失效非线性相关的桥梁截面可靠性 Vine-Copula 数据融合

刘月飞^{1,2}, 樊学平^{1,2}

(1. 兰州大学 西部灾害与环境力学教育部重点实验室, 甘肃 兰州 730000;

2. 兰州大学 土木工程与力学学院, 甘肃 兰州 730000)

摘要: 为合理融合健康监测数据分析在役桥梁截面可靠性, 首先应用桥梁截面多个监测点的极值应力数据, 建立监测变量非线性相关的 Vine-Copula 模型, 实现极值应力数据的融合分析; 然后结合多个监测点的功能函数, 进行桥梁截面失效模式非线性相关的 Vine-Copula 建模分析, 并融合一次二阶矩(FOSM)方法, 分析失效非线性相关的桥梁截面可靠性; 最后进行了在役桥梁截面监测数据的验证分析. 研究表明, 考虑失效模式非线性相关性所得桥梁截面可靠性较不考虑失效模式相关性所得结果小, 说明不考虑失效模式相关性所得结果偏保守.

关键词: 桥梁; 截面; 非线性相关性; Vine-Copula 模型; 一次二阶矩(FOSM)方法; 可靠性分析

中图分类号: TU391; TU392.5

文献标志码: A

Data Fusion about Vine-Copula for Bridge Section Reliability Considering Nonlinear Correlation of Failure Modes

LIU Yuefei^{1,2}, FAN Xueping^{1,2}

(1. Key Laboratory of Mechanics on Disaster and Environment in Western China of the Ministry of Education, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China; 2. School of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

Abstract: Bridge section reliability analysis method is reasonably carried on with the fusion of structural health monitoring data. Firstly, the vine-copula models considering the nonlinear correlation of multiple monitored variables were established based on the extreme stress data at the multiple monitored points of bridge section, which make the extreme stress data fusion achieved. Secondly, the vine copula models considering the nonlinear correlation of failure modes about bridge section were built with the performance functions about

the multiple monitored points, further, through combining the built vine copula models with first order second moment (FOSM) method, the bridge section reliability considering the nonlinear correlation of failure modes was analyzed. Finally, the monitored data of an existing bridge was provided to illustrate the proposed model and method. The results show that the obtained bridge section reliability with considering the nonlinear correlation of failure modes is bigger than that without considering the correlation of failure modes. It is illustrated that the obtained results without considering the correlation of failure modes are conservative.

Key words: bridge; girder section; nonlinear correlation; Vine-Copula model; first order second moment (FOSM) method; reliability analysis

桥梁健康监测 (bridge health monitoring, BHM) 系统在长期运营过程中积累了大量数据, 如何利用这些数据分析桥梁可靠性, 在国内外还处于研究的起步阶段, 但已成为 BHM 领域的主要科学问题和共识问题.

桥梁可靠性研究主要是利用抗力信息 (如: 容许应力、容许挠度等) 和荷载效应信息 (如: 应力、挠度等), 采用合适的可靠性计算方法 (如: 一次二阶矩可靠性分析方法、一次可靠性分析方法等), 进行构件或体系的可靠性分析. 现定义桥梁截面监测点的可靠度为构件可靠度, 而考虑多个监测点非线性相关或独立的桥梁截面可靠度为体系可靠度.

基于 BHM 数据的桥梁可靠性研究已取得一些成果. 国外, Ni 等^[1]首次提出基于 BHM 数据的桥梁可靠度评估的概念; Frangopol 等^[2-3]首次给出基于 BHM 数据的桥梁体系可靠度评估的基本框架流程,

收稿日期: 2018-03-13

基金项目: 国家自然科学基金(51608243); 甘肃省自然科学基金(1606RJYA246)

第一作者: 刘月飞(1982—), 女, 讲师, 工学博士, 主要研究方向为桥梁可靠性和结构健康监测数据处理. E-mail: yfliu@lzu.edu.cn

通信作者: 樊学平(1983—), 男, 副教授, 工学博士, 主要研究方向为桥梁结构安全预后与损伤预后. E-mail: fxp_2004@163.com

并将其应用于工程实例,分析中假定各个监测点失效模式相互独立,同时给出基于监测应力极值的钢板梁桥可靠度评估方法^[4-5];Dissanayake 等^[6]采用 BHM 数据,假定各个监测点失效模式相互独立,分析研究了一座旧桁架桥的体系可靠性;Pourali 等^[7]提出了一种新的传感器优化布置方法,并在此基础上亦假定各个监测点失效模式相互独立,进行了结构体系可靠性分析.国内,李顺龙^[8]结合 BHM 和检测数据,分析研究了混凝土桥梁主梁构件的可靠性;焦美菊等^[9]研究了 BHM 与可靠度评估相结合的桥梁构件性能评估方法;赵卓^[10]采用 ARMA 模型,利用 BHM 数据研究分析了长春伊通河桥构件的可靠性;陈志为^[11]基于 BHM 系统提出大跨多荷载悬索桥关键位置的疲劳可靠度分析框架,并应用于香港青马大桥;樊学平^[12]基于 BHM 数据,采用贝叶斯动态模型和粒子滤波器,亦假定各个监测点失效模式相互独立,研究分析了天津富民桥的体系时变可靠性;Liu 等^[13-14]基于 BHM 数据,初步假定 2 个监测点失效模式非线性相关,研究了长春伊通河桥主梁可靠性分析方法.

由上述研究现状可知,基于监测数据的桥梁可靠性研究主要集中在构件(单个监测点)、失效模式相互独立的结构体系(多个监测点组成的结构体系)以及 2 个监测点失效模式非线性相关的结构体系 3 个层面.考虑到桥梁结构体系存在多个失效模式,且具有共同的输入随机源,因而这些失效模式相互之间存在相关性,其中非线性相关性一般蕴含线性相关性的特性^[13-15].因此,基于 BHM 数据,建立多个监测点失效模式相互之间的非线性相关性模型,进而合理分析结构体系可靠性需要深入展开研究.

鉴于上述存在的问题,以在役桥梁主梁截面为研究对象,基于主梁截面多个监测点(对应多个监测变量)的日常极值应力监测数据,首先,引入 Pair-Copula 模型和二元 Copula 模型,建立刻画多个测点监测变量两两之间非线性相关性的 Vine-Copula 模型,进而,结合测点的功能函数,进行多个监测点失效模式非线性相关性的建模分析;然后,结合一次二阶矩(FOSM)方法,进行失效非线性相关的主梁梁截面可靠性分析;最后,通过在役桥梁监测数据进行验证分析.

1 监测变量的 Vine-Copula 模型

在役桥梁每个截面均包含多个监测点,对应多

个监测变量,分别指多个测点的日常监测极值应力.由于具有共同输入随机源(如:共同的荷载作用),这些监测变量相互之间存在非线性相关性^[13-15].引入 Pair-Copula 理论和二维 Copula 理论建立刻画这些非线性相关性的 Vine-Copula 模型.

1.1 Pair-Copula 理论

Bedford 等^[16-17]提出了基于 Pair-Copula 构造模块(Pair-Copula construction)的多元随机变量联合分布概率模型. Pair-Copula 构造模块为多维随机变量提供了一种分离变量间相依结构的方法,可以将多维随机变量按照某种逻辑结构分解为多个两两变量的 Pair-Copula 模块,为 Copula 理论在高维随机变量的应用中提供了理论基础.

将桥梁某截面 n 个监测点所对应的监测极值应力定义为一个 n 维随机变量 $X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$,基于 Copula 模型的联合概率密度函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ 按照条件密度函数理论可以写为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_i(x_i), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (1)$$

式中: c 为 Copula 密度函数; $F_i(x_i)$ 和 $f_i(x_i)$ 分别为随机变量 x_i 的边缘概率分布函数和概率密度函数.

由式(1)可得二维随机变量的联合概率密度函数为

$$f(x_a, x_j) = c_{aj}(F_a(x_a), F_j(x_j)) f_a(x_a) f_j(x_j) \quad a, j = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } a \neq j \quad (2)$$

式中: $c_{aj}(F_a(x_a), F_j(x_j))$ 为 x_a 和 x_j 的二维 Copula 密度函数.

由式(2),可以推导得到:在 x_j 已知的条件下, x_a 的概率密度函数为

$$f(x_a | x_j) = c_{aj}(F_a(x_a), F_j(x_j)) f_a(x_a) \quad a, j = 1, 2, \dots, n \text{ 且 } a \neq j \quad (3)$$

由式(3)可得在 n 维随机变量 \mathbf{u} 已知的条件下,任意随机变量 x 的条件密度函数为

$$f(x | \mathbf{u}) = c_{x u_a | \mathbf{u}_{-a}}(F(x | \mathbf{u}_{-a}), F(u_a | \mathbf{u}_{-a})) \cdot f(x | \mathbf{u}_{-a}) \quad (4)$$

式中: u_a 是 n 维随机变量 \mathbf{u} 中的一个分量; \mathbf{u}_{-a} 是 n 维随机变量 \mathbf{u} 中去掉 u_a 之后的 $n-1$ 维分量.

1.2 二元 Copula 结构

常见的二元 Copula 函数有 5 种,如表 1 所示.采用 Gaussian Copula 函数对非线性相关性进行研究,由表 1 可以得到二元 Gaussian Copula 函数.式(5)是二元 Gaussian Copula 概率分布函数;式(6)是二元 Gaussian Copula 概率密度函数.

表 1 5 种典型的 Copula 函数

Tab.1 Five typical copula functions

Copula 函数	$C(u_1, u_2 \rho)$ 方程	ρ 范围
Gaussian	$\Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2) \rho)$	$[-1, 1]$
T	$t_{\rho, n}(t_n^{-1}(u_1), t_n^{-1}(u_2) \rho)$	$[-1, 1]$
Clayton	$(u_1^{-\rho} + u_2^{-\rho} - 1)^{-1/\rho}$	$(0, \infty)$
Gumbel	$\exp(-((-\ln u_1)^\rho + (-\ln u_2)^\rho)^{1/\rho})$	$[1, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{\rho} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\rho u_1} - 1)(e^{-\rho u_2} - 1)}{e^{-\rho} - 1} \right)$	$(-\infty, \infty) / \{0\}$

$$C(u_1, u_2; \rho) = \Phi_G(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \cdot \exp\left(\frac{-(r^2 - 2\rho rs + s^2)}{2(1-\rho^2)}\right) dr ds \quad (5)$$

$$c(u_1, u_2; \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left(\frac{\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2 - 2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)}{2(1-\rho^2)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\Phi^{-1}(u_1)^2\Phi^{-1}(u_2)^2}{2}\right) \quad (6)$$

式中: $u_i = F_i(x_i), i = 1, 2, F_i(x_i)$ 是 x_i 的边缘概率分布函数; Φ_G 为 Gaussian copula 函数; Φ 为标准正态分布函数; Φ^{-1} 为 Φ 的逆函数; $r = \Phi^{-1}(u_1); s = \Phi^{-1}(u_2); \rho$ 为 Copula 函数的相关参数, $\rho \in [-1, 1]$.

Kendall 秩相关系数是 Copula 函数常用的相关

性测度. Kendall 秩相关系数 τ_k 与 Copula 函数的关系如式(7)所示^[13-15]:

$$\tau_k = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2 | \rho) - 1 \quad (7)$$

根据文献[15],可以得到 ρ 与 τ_k 的关系为

$$\tau_k(\rho) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho \quad (8)$$

1.3 “Vine”结构及其分解

多元随机变量联合分布存在许多复杂的 Pair-Copula 分解结构, Bedford 等^[16-17]引入 Vine 结构对这种复杂逻辑结构进行描述.

高维 Copula 函数通过 Vine 结构可以有效实现多维随机变量间两两相依结构的相关组合. 采用 Vine 结构理论将多元随机变量分解为单元 Pair-Copula 构造模块.

由 Vine 的定义^[16-17]可知,每个 Vine 由多棵树(tree)组成,每棵树含有多个结点(node),连接 2 个节点的线叫做边缘(edge). 不同的 Vine 结构具有不同的性质,其中应用最广、性质最好的是 Regular Vine^[16-18].

Regular Vine 包含多种组成结构,其中最常用的是 C-Vine 和 D-Vine,这两类 Vine 结构都能在不同树状集合的逻辑结构下对高维分布进行分解,以四维监测变量为例,分别建立 C-Vine 和 D-Vine,如图 1 和图 2 所示.

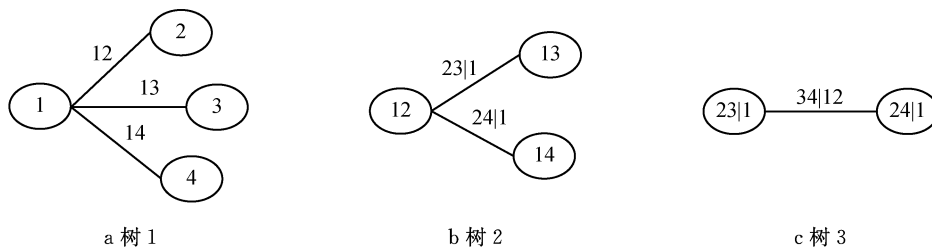


图 1 四维 C-Vine Copula 分解结构

Fig.1 Factorized structure for four-dimension C-Vine Copula

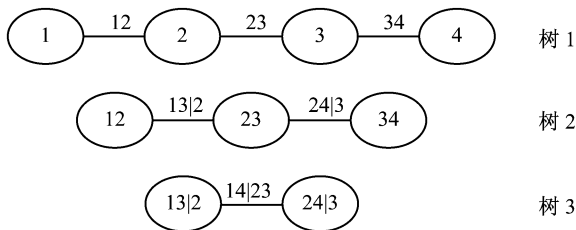


图 2 四维 D-Vine Copula 分解结构

Fig.2 Factorized structure for four-dimension D-Vine Copula

图 1 为一个四维 C-Vine Copula 结构分解图,该 Vine 结构共有 3 棵树,每棵树有一个主节点,每个主

节点都会连接到其他节点上,每条连接主节点与其他节点的边对应的就是一个 Pair-Copula;图 2 为一个四维 D-Vine Copula 结构分解图,该 Vine 结构亦包含 3 棵树,共有 6 条边,每条边对应一个 Pair-Copula.

由图 1 可得,四维随机变量 (x_1, x_2, x_3, x_4) 的 C-Vine 联合密度函数如式(9)所示;由图 2 可得,四维随机变量 (x_1, x_2, x_3, x_4) 的 D-Vine 联合密度函数如式(10)所示.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4) c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2));$$

$$\begin{aligned} & \rho_{12}) \times c_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3); \rho_{13}) c_{14}(F_1(x_1), \\ & F_4(x_4); \rho_{14}) \times c_{23|1}(F_{2|1}(x_2|x_1), F_{3|1}(x_3|x_1); \\ & \rho_{23|1}) \times c_{24|1}(F_{2|1}(x_2|x_1), F_{4|1}(x_4|x_1); \rho_{24|1}) \times \\ & c_{34|12}(F_{3|12}(x_3|x_1, x_2), F_{4|12}(x_4|x_1, x_2); \rho_{34|12}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = & f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) f_4(x_4) c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2); \\ & \rho_{12}) \times c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3); \rho_{23}) c_{34}(F_3(x_3), \\ & F_4(x_4); \rho_{34}) \times c_{13|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2); \\ & \rho_{13|2}) \times c_{24|3}(F_{2|3}(x_2|x_3), F_{4|3}(x_4|x_3); \rho_{24|3}) \times \\ & c_{14|23}(F_{1|23}(x_1|x_2, x_3), F_{4|23}(x_4|x_2, x_3); \rho_{14|23}) \end{aligned} \quad (10)$$

式中: ρ_{\dots} 和 $\rho_{\dots| \dots}$ 是对应 Copula 函数的相关参数; $F_i(\cdot)$ 表示每个随机变量的累积分布函数; $F_{\cdot| \cdot}(\cdot | \cdot)$ 表示条件分布函数; $c_{\dots}(\cdot, \cdot)$ 表示 Copula 密度函数; $c_{\cdot| \cdot}(\cdot | \cdot)$ 表示条件 Copula 密度函数。

2 失效模式非线性相关的在役桥梁截面可靠性分析

基于上述所建立的刻画多个监测变量相互非线性相关性的 Vine-Copula 模型(如图 1、图 2、式(9)以及式(10)所示),多个监测点失效模式非线性相关性模型可利用两两监测点失效模式间的二元失效模式(Pair-Copula 模块),通过 Vine 结构来建立. 利用所建立的 Vine-Copula 模型可实现失效非线性相关的钢梁截面可靠性分析,核心流程如图 3 所示,详细步骤为:① 基于容许应力和监测极值应力信息,采用 FOSM 方法,计算监测点可靠指标和失效概率;② 基于监测点失效概率,采用 Pair-Copula 理论,进行仅有 2 个监测点且其失效模式非线性相关的桥梁截面可靠性分析;③ 基于两测点失效模式非线性相关的截面可靠性分析结果,采用串联体系可靠性分析方法,进行含有多个监测点且其失效模式相互非线性

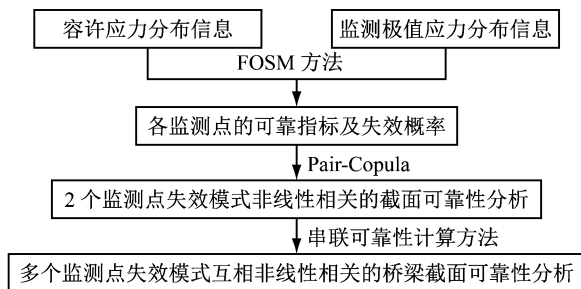


图 3 可靠性计算流程

Fig.3 Flowchart of reliability computation

性相关的桥梁截面可靠性分析.

2.1 一次二阶矩方法

假设抗力 R 和极值荷载效应 S 相互独立,对应的平均值和标准差分别为 μ_R, σ_R 和 μ_S, σ_S .

理论极限状态方程为

$$g(R, S) = R - S \quad (11)$$

采用 FOSM 方法^[12, 15],可得可靠性指标 β_t 计算公式为

$$\beta_t = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (12)$$

2.2 截面监测点可靠指标计算

钢梁截面监测点极限状态方程为

$$g([\sigma], M) = [\sigma] - \gamma_P M \quad (13)$$

式中: $[\sigma]$ 为钢材屈服强度; M 为监测极值应力; γ_P 为传感器修正系数.

结合式(12)可得监测点可靠指标 β_P 为

$$\beta_P = \frac{\mu_{[\sigma]} - \gamma_P \mu_M}{\sqrt{\sigma_{[\sigma]}^2 + (\gamma_P \sigma_M)^2}} \quad (14)$$

式中: μ_M 和 σ_M 分别为监测极值应力的平均值和标准差; $\mu_{[\sigma]}$ 和 $\sigma_{[\sigma]}$ 为钢材容许应力的平均值和标准差; γ_P 是传感器的修正系数. 极值应力指每天监测正应力的极大值或每天监测负应力绝对值的极大值.

2.3 2 个失效模式非线性相关的可靠性分析

单元 Pair-Copula 模块中的二元结构体系有 2 种形式:串联体系和并联体系. 任意 2 个监测点形成的二元组合结构体系是并联体系,根据文献[15]可得, n 维并联结构体系的失效模式功能函数为

$$h_q(Y_q) = [\sigma] - Y_q, q = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

式中: n 表示监测点总数; q 表示第 q 个监测点; Y_q 表示第 q 个监测点的监测极值应力.

基于式(5)~(8),可得单元 Pair-Copula 模块中任意二元组合结构体系失效模式同时发生的概率为

$$\begin{aligned} P\{h_i(Y_i) \leq 0, h_j(Y_j) \leq 0\} &= P\{h_i(Y_i) \leq \\ & H_i^{-1}[H_i(0)], h_j(Y_j) \leq H_j^{-1}[H_j(0)]\} = \\ & C(H_i(0), H_j(0); \rho_{ij}) = C(p_{f_i}, p_{f_j}; \rho_{ij}) \end{aligned} \quad (16)$$

式中: Y_i 表示第 i 个监测点的监测极值应力;

$$H_i(h_i(y_i)) = \Phi\left(\frac{[\sigma] - y_i - \mu_i}{\sigma_i}\right); H_j(h_j(y_j)) =$$

$$\Phi\left(\frac{[\sigma] - y_j - \mu_j}{\sigma_j}\right); H_i(0) = \Phi\left(\frac{-\mu_i}{\sigma_i}\right); H_j(0) =$$

$$\Phi\left(\frac{-\mu_j}{\sigma_j}\right); p_{f_i} \text{ 和 } p_{f_j} \text{ 是失效模式的失效概率, 可由}$$

$p_f = \Phi(-\beta)$ 得到, 其中 β 是可靠性指标.

2.4 多个失效模式非线性相关的桥梁截面可靠性分析

假定桥梁截面任意 2 个监测点非线性相关的二元结构体系呈串联关系,采用式(9)和式(10)可得多个失效模式非线性相关的桥梁截面失效概率为

$$p_{f_{system}} = \max_{i \neq j} (C(p_{f_i}, p_{f_j}; \rho_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

式中: f_i, f_j 分别为 i 和 j 测点失效对应的功能函数. 对应的多个失效模式相互独立的桥梁截面失效概率为

$$p_{f_{system}} = \max(p_{f_i}, i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

式中: p_{f_i} 是第 i 个监测点的失效概率.

3 算例分析

采用天津富民桥主梁 A 截面的健康监测数据对

其截面可靠性进行分析,截面 A 的位置以及截面传感器布置分别如图 4 和图 5 所示. 由图 5 可知,利用 8 个传感器对 A 截面极值应力进行健康监测,通过对各个测点的日常极值应力数据比较分析可知,以下 4 个传感器(即 FBG01081、FBG01078、FBG01080、FBG01077)得到的极值应力(正应力或负应力绝对值的极大值)数据偏大,因而利用其对应 4 个监测点的数据对 A 截面的可靠性进行分析. 采集到的应力信息包含了车辆荷载、温度荷载、收缩徐变以及结构变化造成的应力信息,结构自重造成的应力亦包含在其中.

在不考虑监测点失效模式相依性的情况下,4 个监测点的最大失效概率认为是 A 截面的失效概率可用式(18)进行计算. 在考虑监测点失效模式相依性的情况下,所有任意组合模块(Pair-Copula 模块)中的最大失效概率认为是 A 截面的失效概率可用式(17)进行计算.

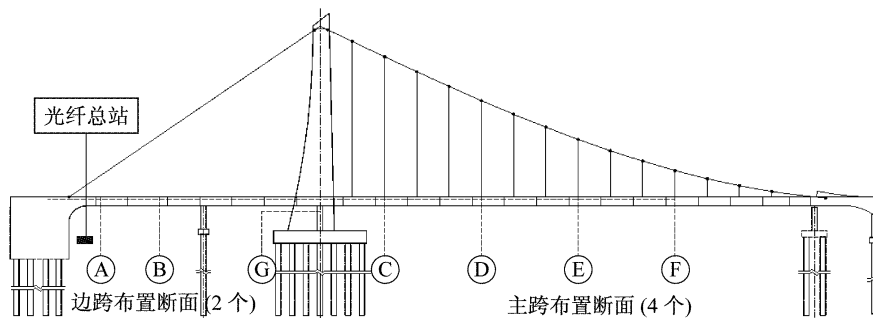


图 4 富民桥主梁监测截面分布

Fig.4 Layout of the monitored sections about Fumin bridge girder

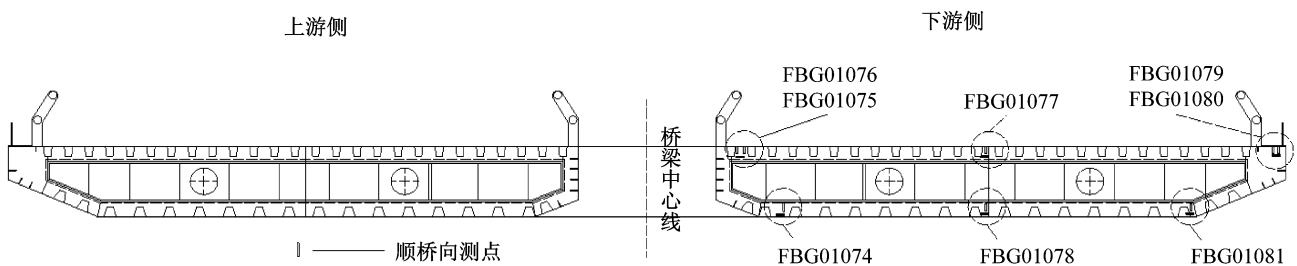


图 5 A 截面的传感器布置

Fig.5 Sensor layout about section A

对天津富民桥横梁底板横桥向 A 截面极值应力进行了 1 000 d 的监测(注:极值应力指的是每天监测得到的应力绝对值的极大值),保证了 4 个监测点极值应力的概率统计特性得到正确提取. 其中,传感器 FBG01081 的监测点视为 a 点,传感器 FBG01078 的监测点视为 b 点,传感器 FBG01080 的监测点视为 c 点,传感器 FBG01077 的监测点视为 d 点. A 截

面 4 个监测点的监测应力时程曲线如图 6 所示. 基于这些监测极值应力数据,采用 Kolmogorov-Smirnov (K-S) 检验方法^[4-5, 12-15],可得 4 个监测点监测变量的概率密度函数和概率分布函数,利用式(7)、(8)和式(15)可得 4 个监测点失效模式两两之间的 Copula 相关参数: $\rho_{ab} = -0.96, \rho_{ac} = \rho_{ac|b} = 0.95, \rho_{ad} = \rho_{ad|bc} = 0.85, \rho_{bc} = \rho_{bc|a} = 0.06, \rho_{bd|a} =$

$$\rho_{bd|c} = 0.20, \rho_{cd} = \rho_{cd|ab} = 0.85.$$

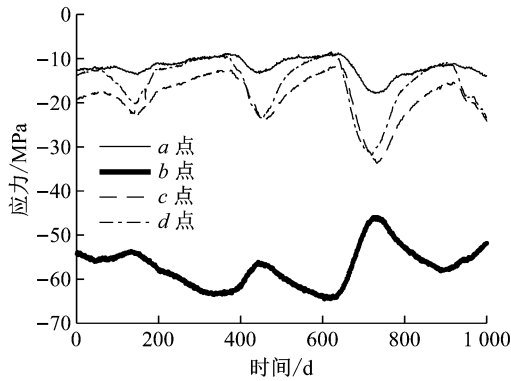


图 6 监测应力时程曲线

Fig. 6 Monitored stress curves

基于 Pair-Copula 理论、极值应力监测数据以及所得的 Copula 相关参数,分别采用 C-Vine 结构和 D-Vine 结构,进行了考虑失效模式非线性相关性的四元钢梁截面可靠性分析。

根据 C-Vine 结构可将四元(即 4 个监测点)钢梁截面体系分解成 6 个系列两两结构相依的失效模块(Pair-Copula 模块),即: C_{cb} 、 C_{ca} 、 C_{cd} 、 $C_{bc|a}$ 、 $C_{bd|a}$ 、 $C_{cd|ab}$ (C 表示基于 C-Vine 结构的 Pair-Copula 模块),每个失效模块所对应的 Gaussian Copula 函数 PDF(probability density function)可由式(2)~(4)和式(6)~(8)计算得到。根据 D-Vine 结构同样也将四元桥梁结构体系分解成 6 个具有相依性的模块即 D_{cb} 、 D_{bc} 、 D_{cd} 、 $D_{ac|b}$ 、 $D_{bd|c}$ 、 $D_{ad|bc}$ (D 表示基于 D-Vine 结构的 Pair-Copula 模块),每个失效模块所对应的 Gaussian Copula 函数 PDF 同样可由式(2)~(4)和式(6)~(8)计算得到。

参考上述监测点失效模式间 Copula 相关参数值,利用式(5)和式(15)分析可得,任意 2 个失效模式之间均相关。

对 4 个监测点的健康监测数据进行 K-S 检验,可知 4 个监测点的极值应力数据均服从正态分布,与文献[2, 4]研究的极值应力分布类型相一致。由文献[12, 15]可知:天津富民桥钢梁钢材的容许应力服从均值为 345 MPa、标准差为 103.5 MPa 的正态分布(变异系数取值 0.3),因而,可以采用一次二阶矩方法对监测点可靠性指标进行计算。

结合式(14)可得可靠性指标计算公式为

$$\beta_p = \frac{345 - 1.15\mu}{\sqrt{103.5^2 + (1.15\sigma)^2}} \quad (19)$$

式中: μ 和 σ 为监测点极值应力绝对值的平均值与标准差。

进而可得天津富民桥横梁底板横桥向 A 截面 4 个监测点的可靠性指标分别为 $\beta_a = 3.2011$, $\beta_b = 2.6937$, $\beta_c = 3.1203$, $\beta_d = 3.1545$ 。

采用 $p_f = \Phi(-\beta)$,可以得到 A 截面 4 个监测点的失效概率分别为 $p_{f_a} = 0.0024$, $p_{f_b} = 0.0106$, $p_{f_c} = 0.0031$, $p_{f_d} = 0.0028$ 。

进而利用式(18)可得不考虑失效模式相关性的 A 截面失效概率为 $p_{f1} = \max(p_{f_a}, p_{f_b}, p_{f_c}, p_{f_d}) = 0.0106$ 。

结合图 1,利用式(9)、式(13)~(16),可得 C-Vine 结构的四元桥梁截面各组合模块失效模式对应的失效概率分别为 $p_{f_{cb}} = 1.05 \times 10^{-77}$, $p_{f_c} = 1.60 \times 10^{-3}$, $p_{f_{cd}} = 9.90 \times 10^{-4}$, $p_{f_{bc|a}} = 5.24 \times 10^{-5}$, $p_{f_{bd|a}} = 1.17 \times 10^{-4}$, $p_{f_{cd|ab}} = 1.10 \times 10^{-3}$ 。

进而利用式(17)可得,考虑失效模式相关性时,基于 C-Vine 的 A 截面失效概率为 $p_{f2} = \max(p_{f_{cb}}, p_{f_{ac}}, p_{f_{cd}}, p_{f_{bc|a}}, p_{f_{bd|a}}, p_{f_{cd|ab}}) = 1.6 \times 10^{-3}$ 。

结合图 2,利用式(10)、式(13)~(16),可得 D-Vine 结构的四元桥梁截面各组合模块对应的失效概率分别为 $p_{f_{cb}} = 1.05 \times 10^{-77}$, $p_{f_{bc}} = 2.27 \times 10^{-42}$, $p_{f_{cd}} = 1.70 \times 10^{-3}$, $p_{f_{ac|b}} = 1.00 \times 10^{-3}$, $p_{f_{bd|c}} = 2.5 \times 10^{-4}$, $p_{f_{ad|bc}} = 5.49 \times 10^{-6}$ 。

进而利用式(17)可得,考虑失效模式相关性时,基于 D-Vine 的 A 截面失效概率为 $p_{f3} = \max(p_{f_{cb}}, p_{f_{bc}}, p_{f_{cd}}, p_{f_{ac|b}}, p_{f_{bd|c}}, p_{f_{ad|bc}}) = 1.7 \times 10^{-3}$ 。

由上述结果可知,采用 C-Vine 结构或 D-Vine 结构,天津富民桥主梁 A 截面考虑监测点失效模式相关性的失效概率小于不考虑失效模式相关性时的截面失效概率。

4 结论

提出了基于 Pair-Copula 理论和监测极值应力数据的考虑监测点失效模式非线性相关性的桥梁截面可靠性分析方法。基于天津富民桥截面监测极值应力数据的验证分析,得出如下结论:考虑多个监测点失效模式非线性相关性所得桥梁截面失效概率比不考虑失效模式相关性所得结果偏小,说明不考虑失效模式相关性计算所得的结果具有一定的保守性,考虑失效模式相关性计算所得结果更加合理。

采用多测点的极值应力数据进行服役阶段桥梁截面承载能力极限状态的可靠性分析,为在役桥梁

安全评价提供理论基础和应用方法. 利用式(14)计算得到的监测点可靠性指标偏小,甚至小于设计可靠性指标,主要是式中考虑了传感器修正系数 γ_P . 规范规定的可靠性指标针对设计层面,而基于健康监测数据的服役阶段桥梁可靠性,考虑到监测数据和模型的不确定性,需要进一步开展细化研究. 由于只对主梁单个监测截面的体系可靠性进行了分析研究,所以对多个监测截面组成的主梁体系可靠性分析研究需要进一步分析研究.

参考文献:

- [1] NI Y Q, HUA X G, KO J M. Reliability-based assessment of bridges using long-term monitoring data [J]. *Key Engineering Materials*, 2006; 10. 4028/www. scientific. net/KEM. 321-323. 217.
- [2] FRANGOPOL D M, STRAUSS A, KIM S Y. Bridge reliability assessment based on monitoring [J]. *Journal of Bridge Engineering*, ASCE, 2008, 13(3): 258.
- [3] CATBAS F N, SUSOY M, FRANGOPOL D M. Structural health monitoring and reliability estimation: Long span truss bridge application with environmental monitoring data [J]. *Engineering Structures*, 2008, 30: 2347.
- [4] FRANGOPOL D M, STRAUSS A, KIM S Y. Use of monitoring extreme data for the performance prediction of structures: General approach [J]. *Engineering Structures*, 2008, 30: 3644.
- [5] STRAUSS A, FRANGOPOL D M, Kim S Y. Use of monitoring extreme data for the performance prediction of structures: Bayesian updating [J]. *Engineering Structures*, 2008, 30: 3654.
- [6] DISSANAYAKE P B R, KARUNANANDA P A K. Reliability index for structural health monitoring of aging bridges [J]. *Structural Health Monitoring-An International Journal*, 2008, 7 (2): 175.
- [7] POURALI M, MOSLEH A. A Bayesian approach to sensor placement optimization and system reliability monitoring [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*, 2013, 227(3): 327.
- [8] 李顺龙. 基于健康监测技术的桥梁结构状态评估和预警方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2009.
LI Shunlong. Approaches of condition assessment and damage alarming of bridges based on structural health monitoring [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2009.
- [9] 焦美菊, 孙利民, 李清富. 基于监测数据的桥梁结构可靠度评估[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2011, 39(10): 1452.
JIAO Meiju, SUN Limin, LI Qingfu. Bridge structural reliability assessment based on health monitoring data [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2011, 39 (10): 1452.
- [10] 赵卓. 基于 ARMA 模型的伊通河桥监测数据建模与可靠度分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012.
ZHAO Zhuo. Health monitoring data modeling and reliability analysis for Yitong river bridge based on ARMA model [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2012.
- [11] 陈志为. 基于健康监测系统的多跨多荷载桥梁的疲劳可靠度评估[J]. 工程力学, 2014, 31(7): 99.
CHEN Zhiwei. Fatigue reliability assessment of multi-loading suspension bridges based on SHMs [J]. *Engineering Mechanics*, 2014, 31(7): 99.
- [12] 樊学平. 基于验证荷载和监测数据的桥梁可靠性修正与贝叶斯预测[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2014.
FAN Xueping. Bridge reliability updating and Bayesian prediction based on proof loads and monitored data [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2014.
- [13] FAN X P, LIU Y F. Time-variant reliability prediction of bridge system based on BDGCM and SHM data[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2018, 25 (1): 10. 1002/stc. 2185.
- [14] LIU Y F, FAN X P. Gaussian Copula-Bayesian dynamic linear model - based time-dependent reliability prediction of bridge structures considering nonlinear correlation between failure modes [J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2016, 8 (11): 1.
- [15] 刘月飞. 考虑失效模式和验证模式相关性的桥梁结构体系可靠度分析[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
LIU Yuefei. System reliability analysis of bridge structures considering correlation of failure modes and proof modes [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015.
- [16] BEDFORD T, COOKE R M. Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines [J]. *Annals of Mathematics & Artificial Intelligence*, 2001, 32 (1-4): 245.
- [17] BEDFORD T, COOKE R M. Vines: A new graphical model for dependent random variables [J]. *Annals of Statistics*, 2002, 30 (4): 1031.
- [18] NELSEN R B. An Introduction to copulas [M]. New York: Springer, 2006.