

松弛模系矩阵分裂迭代法求解一类非线性互补问题

王 艳¹, 殷俊锋¹, 李 蕊^{1,2}

(1. 同济大学 数学科学学院, 上海 200092; 2. 嘉兴学院 数理与信息工程学院, 浙江 嘉兴 314001)

摘要: 考虑松弛模系矩阵分裂迭代法求解一类非线性互补问题, 理论分析给出了当系数矩阵为 H_+ -矩阵时迭代法的收敛性和松弛参数的选取方法. 数值实验表明, 松弛模系矩阵分裂迭代法在迭代步数和迭代时间上均优于模系矩阵分裂迭代法.

关键词: 矩阵分裂; 松弛模系迭代法; 非线性互补问题

中图分类号: O241.8

文献标志码: A

A Relaxation Modulus-based Matrix Splitting Iteration Method for a Class of Nonlinear Complementarity Problems

WANG Yan¹, YIN Junfeng¹, LI Rui^{1,2}

(1. School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Mathematics Physics and Information Engineering, Jiaxing University, Jiaxing 314001, China)

Abstract: A relaxation modulus-based matrix splitting iteration method is proposed for solving a class of nonlinear complementarity problems. The convergence theory is established when the system matrix is H_+ - and the choice of relaxation parameters is given. Numerical examples show that the proposed methods are efficient and can accelerate the convergence performance of the modulus-based matrix splitting method with less iteration steps and CPU time.

Key words: matrix splitting; relaxation modulus-based iteration methods; nonlinear complementarity problems

给定大型稀疏矩阵 $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 n 维向量 $q \in \mathbf{R}^n$, 考虑如下—类非线性互补问题: 求向量 $z, w \in \mathbf{R}^n$ 满足

$$z \geq 0, \quad w := Mz + q + f(z) \geq 0, \quad z^T w = 0 \quad (1)$$

这里, $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为给定的 n 元函数且满足对角可

微^[1-2], 即 f_i, f 的第 i 个分量仅仅是 z_i 的可微函数. 其中不等号是分量意义下的不等号, z^T 表示向量 z 的转置, 特别地, 当函数 f 为线性函数时, 问题(1)化为线性互补问题.

互补问题在科学与工程等领域有着广泛的应用^[3-4], 如变分不等式、弹性接触问题、期权定价等自由边界问题均可化为互补问题. 由于互补问题的重要性, 引起了数学工作者的广泛关注和高度重视. 近几十年来, 其数值解的研究发展迅速, 取得了丰硕的成果. Bai^[5]提出了求解线性互补问题的模系矩阵分裂迭代法, 并且为模系矩阵分裂迭代方法提供了一个基本框架. 由于其迭代格式简单, 在文献[5]的基础上, 模系矩阵分裂迭代法得到了进一步研究, 比如, 两步模系矩阵分裂迭代法^[6]、加速的模系矩阵分裂迭代法^[7]和松弛模系矩阵分裂迭代方法^[8]等. 随着高性能并行计算机系统的快速发展, Bai等^[9]利用并行计算的思想, 提出了模系同步多分裂迭代法、模系同步二级多分裂迭代方法^[10]和两步模系同步多分裂迭代方法^[11].

针对非线性互补问题(1), 当函数 f 对角可微时, Xia等在文献[12]中首次将求解线性互补问题的模系矩阵分裂迭代法推广至该非线性互补问题, 构造了相应的模系矩阵分裂迭代法, 并给出了系数矩阵为正定或 H_+ -矩阵时的收敛理论. 随后, Li等^[13]采用加速模系矩阵分裂迭代法对该非线性互补问题进行求解, 并且给出了矩阵 M 为 H_+ -矩阵时的收敛性分析. 本文提出用松弛模系矩阵分裂迭代法求解该非线性互补问题, 讨论该迭代法在系数矩阵 M 为 H_+ -矩阵时的收敛条件, 并且给出了最优参数的选取. 数值实验表明, 对于大型稀疏非线性互补问题, 松弛模系矩阵分裂迭代法不仅是有效的, 而且收敛效果优于模系矩阵分裂迭代法.

收稿日期: 2018-04-07

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金; 国家自然科学基金(11701221)

第一作者: 王 艳(1990—), 女, 博士生, 主要研究方向为数值分析与科学计算. E-mail: 7ywang@tongji.edu.cn

通信作者: 殷俊锋(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 理学博士, 主要研究方向为数值分析与科学计算. E-mail: yinjf@tongji.edu.cn

1 松弛模系矩阵分裂迭代法

通过变量替换 $z = \frac{1}{\gamma}(|x| + x), w = \frac{1}{\gamma}\Psi(|x| - x)$, 其中 γ 为正常数, Ψ 为正对角矩阵, 文献[12]给出了求解非线性互补问题的模系矩阵分裂迭代方法.

算法 1^[12] 令 $M = F - G$ 为矩阵 M 的一个分裂, 给定初始向量 $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, 对于 $k = 1, 2, \dots$, 从下列方程组中解出 $x^{(k)}$:

$$(\Psi + F)x^{(k)} = Gx^{(k-1)} + (\Psi - M)|x^{(k-1)}| - \gamma(q + f(z^{(k-1)})),$$

直至 $\{z^{(k)}\}_{k=1}^{+\infty}$ 收敛, 其中 $z^{(k)} = \frac{1}{\gamma}(|x^{(k)}| + x^{(k)})$.

为了提高计算效率, 下面给出松弛模系矩阵分裂迭代方法.

对于任意给定的正对角矩阵 Ω 和 Γ , 令 $z = \Omega(|x| + x), w = \Gamma(|x| - x), M\Omega = F_\Omega - G_\Omega$ 为 $M\Omega$ 的一个分裂, x 满足如下不动点方程

$$(\Gamma + F_\Omega)x = G_\Omega x + (\Gamma - M\Omega)|x| - (q + f(z)) \tag{2}$$

在不动点格式(2)对应的迭代格式中, 考虑对原向量和更新的向量做一个加权, 通过引入一个非奇异的参数矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 建立如下松弛模系矩阵分裂迭代方法.

算法 2 对于任意给定的正对角矩阵 Ω 和 Γ , 令 $M\Omega = F_\Omega - G_\Omega$ 为矩阵 $M\Omega \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的一个分裂. 给定初始向量 $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, 对于 $k = 1, 2, \dots$, 通过求解如下系统:

$$\begin{cases} (\Gamma + F_\Omega)x^{(k-1/2)} = G_\Omega x^{(k-1)} + (\Gamma - M\Omega)|x^{(k-1)}| - q - f(\Omega(|x^{(k-1)}| + x^{(k-1)})) \\ x^{(k)} = (I - P)x^{(k-1)} + Px^{(k-1/2)} \end{cases} \tag{3}$$

得到 $x^{(k)}$, 令 $z^{(k)} = \Omega(|x^{(k)}| + x^{(k)})$.

系统(3)等价于

$$x^{(k)} = (I - P)x^{(k-1)} + P(\Gamma + F_\Omega)^{-1}[G_\Omega x^{(k-1)} + (\Gamma - M\Omega)|x^{(k-1)}| - q - f(\Omega(|x^{(k-1)}| + x^{(k-1)}))] \tag{4}$$

算法 2 提供了松弛模系矩阵分裂迭代方法的一个基本框架. 特别地, 取

$$\begin{cases} F_\Omega = \frac{1}{\alpha}(D_{M\Omega} - \beta L_{M\Omega}) \\ G_\Omega = \frac{1}{\alpha}((1 - \alpha)D_{M\Omega} + (\alpha - \beta)L_{M\Omega} + \alpha U_{M\Omega}) \end{cases}$$

当 α, β 分别取 $\alpha = \beta, \alpha = \beta = 1$ 和 $\alpha = 1, \beta = 0$ 时, 称为松弛模系逐步超松弛迭代格式(RMSOR)、松弛模系高斯-赛德尔迭代格式(RMGS)和松弛模系雅可比迭代格式(RMJ).

令 $\Omega = \frac{1}{\gamma}I, \Gamma = \frac{1}{\gamma}\Psi, P = I$, 算法 2 即为模系矩阵分裂迭代方法.

特别地, 令 $P = \epsilon I$, 系统(3)等价于如下形式:

$$\begin{cases} (\Gamma + F_\Omega)x^{(k-1/2)} = G_\Omega x^{(k-1)} + (\Gamma - M\Omega)|x^{(k-1)}| - q - f(\Omega(|x^{(k-1)}| + x^{(k-1)})) \\ x^{(k)} = (1 - \epsilon)x^{(k-1)} + \epsilon x^{(k-1/2)} \end{cases} \tag{5}$$

这里, $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 并且 ϵ 随着 k 的变化而变化.

2 收敛性分析

H_+ -矩阵在数学物理问题、控制论、电力系统理论、经济数学以及弹性力学等众多领域中都有广泛应用, 例如经济价值模型、反网络分析模型、经济学中的投入产出增长模型和概率统计中的 Markov 链等问题.

给定两个实矩阵 $M = (m_{ij}), N = (n_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 如果对任意的 $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ 都有 $m_{ij} \geq n_{ij}$ ($m_{ij} > n_{ij}$), 则记 $M \geq N$ ($M > N$). 本文用记号 $|M| = (|m_{ij}|) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 表示 M 的绝对值.

令 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为一个实 $n \times n$ 矩阵, 它的比较矩阵 $\langle M \rangle = (\langle m \rangle_{ij})$ 定义为

$$\langle m \rangle_{ij} = \begin{cases} |m_{ij}|, & i = j, \\ -|m_{ij}|, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

若对任意 $i \neq j$, 有 $m_{ij} \leq 0$, 则称 M 为 Z -矩阵. 若 M 为非奇异的 Z -矩阵且 $M^{-1} \geq O, O$ 为零矩阵, 则称 M 为 M -矩阵. 如果 $\langle M \rangle$ 为 M -矩阵, 则称 M 为 H -矩阵. 对于 H -矩阵 M , 有 M 非奇异, 且 $|M^{-1}| \leq \langle M \rangle^{-1}$. 特别地, 对角元为正的 H -矩阵称为 H_+ -矩阵.

给定 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 设 $M = F - G$, 如果 F 非奇异, 则称 $M = F - G$ 为矩阵 M 的一个分裂; 如果 F 是非奇异的 M -阵并且 $G \geq 0$, 则称分裂为 M -分裂; 当 $\langle F \rangle - |G|$ 是一个 M -矩阵, 则称 $M = F - G$ 是一个 H -分裂; 如果 $\langle M \rangle = \langle F \rangle - |G|$, 则称分裂为 H -相容分裂.

引理 1^[14] 如果矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是严格对角占优的, 对于任意矩阵 $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\|M^{-1}N\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(|N|e)_i}{(\langle M \rangle e)_i}$$

成立, 这里 $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

引理 2^[15] 矩阵 M 是一个对角元为正的 Z -阵, M 是一个 M -阵当且仅当存在一个正对角矩阵 D , 使得 MD 是对角元为正的严格对角占优矩阵.

引理 3^[8] 令 $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是一个 H_+ -矩阵, $M\Omega = F_\Omega - G_\Omega$ 为矩阵 $M\Omega$ 的 H -分裂. 则存在一个正对角矩阵 D 使得 $(\langle F_\Omega \rangle - |G_\Omega|)D$ 和 $(\Gamma + \langle F_\Omega \rangle)D$ 是两个严格对角占优矩阵, 且有

$$[(\langle M\Omega \rangle + \langle F_\Omega \rangle - |G_\Omega|)De]_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$$

下面, 考虑算法 2 的收敛性. 假设对角可微函数 f 满足

$$0 \leq \frac{df_i}{dz_i} \leq \bar{j}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

这里 $\bar{j}_i, i = 1, 2, \dots, n$, 是非负常数. 记 $\bar{J} := \text{diag}\{\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_n\}$.

令 (z_*, w_*) 为非线性互补问题(1)的解, 易知

$$x_* = \frac{1}{2}(\Omega^{-1}z_* - \Gamma^{-1}w_*) \text{ 满足}$$

$$x_* = (I - P)x_* + P(\Gamma + F_\Omega)^{-1}[G_\Omega x_* + (\Gamma - M\Omega)|x_*| - q - f(\Omega(|x_*| + x_*))] \quad (6)$$

由于 f 是对角可微的, 根据均值定理, 有

$$f(z^{(k)}) - f(z_*) = f(\Omega(|x^{(k)}| + x^{(k)})) - f(\Omega(|x_*| + x_*)) = J^{(k)}\Omega(|x^{(k)}| - |x_*| + x^{(k)} - x_*)$$

这里, $J^{(k)} = \text{diag}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial z_n}\right)$ 是 $f(z)$ 在点 $\xi^{(k)}$ 处的雅克比矩阵, 其中, $\xi^{(k)}$ 是位于 $\Omega(|x^{(k)}| + x^{(k)})$ 和 $\Omega(|x_*| + x_*)$ 之间的向量. 由假设知 $J^{(k)} \geq 0$, 用式(4)减去式(6)得

$$\begin{aligned} x^{(k)} - x_* &= (I - P)(x^{(k-1)} - x_*) + \\ &P(\Gamma + F_\Omega)^{-1}[G_\Omega(x^{(k-1)} - x_*) + \\ &(\Gamma - M\Omega)(|x^{(k-1)}| - |x_*|) - \\ &(f(\Omega(|x^{(k-1)}| + x^{(k-1)})) - \\ &f(\Omega(|x_*| + x_*)))] = \\ &(I - P)(x^{(k-1)} - x_*) + \\ &P(\Gamma + F_\Omega)^{-1}[G_\Omega(x^{(k-1)} - x_*) + \\ &(\Gamma - M\Omega)(|x^{(k-1)}| - |x_*|) - \\ &J^{(k-1)}\Omega(|x^{(k-1)}| - |x_*| + x^{(k-1)} - x_*)] \end{aligned} \quad (7)$$

矩阵 M 是一个 H_+ -矩阵, $M\Omega = F_\Omega - G_\Omega$ 为矩阵 $M\Omega$ 的一个 H -分裂, 下面给出算法 2 的收敛性分析. 在式(7)两边同时加上绝对值, 记 $J_\Omega^{(k-1)} := J^{(k-1)}\Omega$, 由于 $0 \leq |(\Gamma + F_\Omega)^{-1}| \leq (\Gamma + \langle F_\Omega \rangle)^{-1}$, 有 $|x^{(k)} - x_*| =$

$$|P(\Gamma + F_\Omega)^{-1}(\Gamma + F_\Omega)(P^{-1} - I)(x^{(k-1)} - x_*) +$$

$$\begin{aligned} &P(\Gamma + F_\Omega)^{-1}[(G_\Omega - J_\Omega^{(k-1)})(x^{(k-1)} - x_*) + \\ &(\Gamma - M\Omega - J_\Omega^{(k-1)})(|x^{(k-1)}| - |x_*|)] \leq \\ &P|(\Gamma + F_\Omega)^{-1}|[|(\Gamma + F_\Omega)(P^{-1} - I) + G_\Omega - \\ &J_\Omega^{(k-1)}| + |\Gamma - M\Omega - J_\Omega^{(k-1)}|]|x^{(k-1)} - x_*| \leq \\ &P(\Gamma + \langle F_\Omega \rangle)^{-1}[|(\Gamma + F_\Omega)(P^{-1} - I) + G_\Omega - \\ &J_\Omega^{(k-1)}| + |\Gamma - M\Omega - J_\Omega^{(k-1)}|]|x^{(k-1)} - x_*| = \\ &\hat{L}|x^{(k-1)} - x_*| \end{aligned}$$

这里, $\hat{L} = P\tilde{F}^{-1}\tilde{G}P^{-1}$, 其中

$$\tilde{F} = \Gamma + \langle F_\Omega \rangle \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= |(\Gamma + F_\Omega)(I - P) + G_\Omega P - J_\Omega^{(k-1)}P| + \\ &|\Gamma - M\Omega - J_\Omega^{(k-1)}|P \end{aligned} \quad (9)$$

引理 4 令 M 是一个 H_+ -矩阵, $M\Omega = F_\Omega - G_\Omega$ 为 $M\Omega$ 的一个 H -分裂, P 为正对角矩阵, Γ 为满足条件 $(\Gamma e)_i \geq [(D_{M\Omega} + \bar{J})e]_i$ 的正对角矩阵, 矩阵 \tilde{F} 和 \tilde{G} 分别由公式(8)和(9)给出, 如果

$$\begin{cases} \{[2\Gamma + 2D_{F_\Omega} - (2\Gamma + |F_\Omega| + |G_\Omega| - \langle M\Omega \rangle)P]De\}_i > 0, \\ \text{当 } (Pe)_i \geq 1 \text{ 时} \\ \{[(\langle M\Omega \rangle + |F_\Omega| - |G_\Omega|)P - 2|B_{F_\Omega}|]De\}_i > 0, \\ \text{当 } 0 < (Pe)_i < 1 \text{ 时} \end{cases} \quad (10)$$

则有 $\rho(\hat{L}) < 1$. 其中矩阵 D 由引理 3 给出.

证明 由 \hat{L} 的定义, 有

$$\begin{aligned} \|D^{-1}P^{-1}\hat{L}PD\|_\infty &= \|D^{-1}P^{-1}P\tilde{F}^{-1}\tilde{G}GP^{-1}PD\|_\infty = \\ &\|D^{-1}\tilde{F}^{-1}\tilde{G}D\|_\infty = \\ &\|(\tilde{F}D)^{-1}\tilde{G}D\|_\infty \end{aligned}$$

由于 $M\Omega = F_\Omega - G_\Omega$ 是一个 H -分裂, 由 H -分裂的定义易知 $\langle F_\Omega \rangle - |G_\Omega|$ 是一个 M -矩阵, 此外, $\Gamma + \langle F_\Omega \rangle$ 也是一个 M -矩阵. 由引理 2, 知道 $\tilde{F}D = (\Gamma + \langle F_\Omega \rangle)D$ 是严格对角占优的, 利用引理 1, 得到

$$\|D^{-1}P^{-1}LPD\|_\infty = \|(\tilde{F}D)^{-1}\tilde{G}D\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(\tilde{G}De)_i}{(\tilde{F}De)_i}$$

下面, 证明对于任意 $1 \leq i \leq n$, 都有 $(\tilde{F}De)_i > (\tilde{G}De)_i$.

根据式(9), 令 $\tilde{G} = D_{\tilde{G}} - B_{\tilde{G}}$, \tilde{G} 的对角元满足

$$\begin{aligned} D_{\tilde{G}} &\leq (\Gamma + D_{F_\Omega})|P - I| + |D_{G_\Omega} - J_\Omega^{(k-1)}P| + \\ &|\Gamma - D_{M\Omega} - J_\Omega^{(k-1)}P| \end{aligned}$$

$B_{\tilde{G}}$ 的对角元满足

$$\begin{aligned} B_{\tilde{G}} &= -|B_{F_\Omega}(I - P) + B_{G_\Omega}P| - |B_{M\Omega}|P \geq \\ &-|B_{F_\Omega}||P - I| - |B_{G_\Omega}|P - |B_{M\Omega}|P \end{aligned}$$

进而, 有

$$(\tilde{F}De)_i - (\tilde{G}De)_i = [(\tilde{F} - D_{\tilde{G}} + B_{\tilde{G}})De]_i \geq$$

$$\begin{aligned} & \{[\Gamma + \langle F_\Omega \rangle - (\Gamma + D_{F_\Omega}) | P - I | - \\ & | D_{G_\Omega} - J_\Omega^{(k-1)} | P - | \Gamma - D_{M\Omega} - J_\Omega^{(k-1)} | P - \\ & | B_{F_\Omega} | | P - I | - | B_{G_\Omega} | P - | B_{M\Omega} | P] De\}_i. \end{aligned} \quad (11)$$

基于 $(\Gamma e)_i \geq [(D_{M\Omega} + \bar{J})e]_i$ 的假设,从以下两个方面来讨论.

情况 1: 如果 $(Pe)_i \geq 1$, 由式(11)可得到

$$\begin{aligned} (\tilde{F}De)_i - (\tilde{G}De)_i & \geq \{[\Gamma + \langle F_\Omega \rangle - \\ & (\Gamma + D_{F_\Omega})(P - I) - | D_{G_\Omega} - J_\Omega^{(k-1)} | P - \\ & (\Gamma - D_{M\Omega} - J_\Omega^{(k-1)})P - | B_{F_\Omega} | (P - I) - \\ & | B_{G_\Omega} | P - | B_{M\Omega} | P] De\}_i \geq \{[\Gamma + \langle F_\Omega \rangle - \\ & (\Gamma + D_{F_\Omega})(P - I) - | D_{G_\Omega} | P - (\Gamma - D_{M\Omega})P - \\ & | B_{F_\Omega} | (P - I) - | B_{G_\Omega} | P - | B_{M\Omega} | P] De\}_i = \\ & \{[2\Gamma + 2D_{F_\Omega} - (2\Gamma + |F_\Omega| + |G_\Omega| - \\ & \langle M\Omega \rangle)P] De\}_i > 0 \end{aligned} \quad (12)$$

情况 2: 如果 $0 < (Pe)_i < 1$, 有

$$\begin{aligned} (\tilde{F}De)_i - (\tilde{G}De)_i & \geq \{[\Gamma + \langle F_\Omega \rangle - \\ & (\Gamma + D_{F_\Omega})(I - P) - | D_{G_\Omega} - J_\Omega^{(k-1)} | P - \\ & (\Gamma - D_{M\Omega} - J_\Omega^{(k-1)})P - | B_{F_\Omega} | (I - P) - \\ & | B_{G_\Omega} | P - | B_{M\Omega} | P] De\}_i \geq \{[\Gamma + \langle F_\Omega \rangle - \\ & (\Gamma + D_{F_\Omega})(I - P) - | D_{G_\Omega} | P - (\Gamma - D_{M\Omega})P - \\ & | B_{F_\Omega} | (I - P) - | B_{G_\Omega} | P - | B_{M\Omega} | P] De\}_i = \\ & \{[(\langle M\Omega \rangle + |F_\Omega| - |G_\Omega|)P - \\ & 2|B_{F_\Omega}|] De\}_i > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

结合式(12)和式(13),得到不等式(10). 证毕.

基于引理 4, 建立如下收敛性定理.

定理 1 令 M 是一个 H_+ -矩阵, $M\Omega = F_\Omega - G_\Omega$ 为 $M\Omega$ 的一个 H -分裂, $P = \epsilon I$ 是一个正对角矩阵, Γ 是满足条件 $(\Gamma e)_i \geq [(D_{M\Omega} + \bar{J})e]_i$ 的正对角矩阵, 然后对于任意给定的初始向量 $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, 如果

$$a_i < \epsilon < b_i$$

其中, D 由引理 3 给出, 则

$$\begin{aligned} a_i & = \frac{(2|B_{F_\Omega}|De)_i}{[(\langle M\Omega \rangle + |F_\Omega| - |G_\Omega|)De]_i} \\ b_i & = \frac{[(2\Gamma + 2D_{F_\Omega})De]_i}{[(2\Gamma + |F_\Omega| + |G_\Omega| - \langle M\Omega \rangle)De]_i} \\ & \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (14)$$

由算法 2 生成的迭代序列收敛到非线性互补问题(1)的解 x_* .

证明 基于假设 $(\Gamma e)_i \geq [(D_{M\Omega} + \bar{J})e]_i$, 结合条件(10), 由引理 3, 得到

$$\begin{aligned} & [(2\Gamma + 2D_{F_\Omega})De]_i - [(2\Gamma + |F_\Omega| + |G_\Omega| - \\ & \langle M\Omega \rangle)De]_i = [(\langle M\Omega \rangle + \langle F_\Omega \rangle - \\ & |G_\Omega|)De]_i > 0 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} & [(\langle M\Omega \rangle + |F_\Omega| - |G_\Omega|)De]_i - 2(|B_{F_\Omega}|De)_i = \\ & [(\langle M\Omega \rangle + \langle F_\Omega \rangle - |G_\Omega|)De]_i > 0 \end{aligned}$$

然后, 有 $0 < a_i < 1 < b_i$.

在引理 4 中, 令 $P = \epsilon I$, 如果松弛参数 ϵ 满足 $a_i < \epsilon < b_i$, 有 $\rho(\hat{L}) < 1$, 则算法 2 收敛到非线性互补问题的解 $z_* \in \mathbb{R}^n$. 证毕.

注 1 定理 1 给出了松弛参数 ϵ 的一个区域, 可以保证算法 2 的收敛. 在文献[11]中, 给出求解线性互补问题的理论最优参数,

$$\epsilon = 1 + \frac{(x^{(k-1/2)} - x_*)^T (x^{(k-1)} - x^{(k-1/2)})}{\|x^{(k-1)} - x^{(k-1/2)}\|_2^2}$$

由于 x_* 未知, 在具体实现时, x_* 用 $x^{(k-1/2)}$ 代替, 并且用 $k-1$ 代替 k . 因此, 松弛参数 ϵ 的一个合理的选择为

$$\epsilon^{(k)} = 1 + \frac{(x^{(k-3/2)} - x^{(k-1/2)})^T (x^{(k-2)} - x^{(k-3/2)})}{\|x^{(k-2)} - x^{(k-3/2)}\|_2^2} \quad (15)$$

在第 k 步, 松弛参数 ϵ 的选取方法如下:

$$\epsilon = \begin{cases} 1, & \text{当 } k = 1 \text{ 时} \\ \epsilon^{(k)}, & \text{当 } k > 1 \text{ 并且 } \epsilon^{(k)} \in (a, b) \\ a, & \text{当 } k > 1 \text{ 并且 } \epsilon^{(k)} \leq a \\ b, & \text{当 } k > 1 \text{ 并且 } \epsilon^{(k)} \geq b \end{cases} \quad (16)$$

这里, a, b 由定理 1 给出.

3 数值实验

本节通过数值实验验证几种松弛模系矩阵分裂迭代法求解非线性互补问题(1)的有效性.

在数值实验中, 初始向量取为 $x^{(0)} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$, $\Gamma = 2D_M$, 对于 MSOR 方法和 RMSOR 方法, 松弛参数取 $\alpha = 1.2$, 停止准则设定为

$$E(z^{(k)}) := \frac{\|\min(Mz^{(k)} + q + f(z^{(k)}), z^{(k)})\|_2}{\|\min(Mz^{(0)} + q + f(z^{(0)}), z^{(0)})\|_2} \leq 10^{-6}$$

所有计算均在一台 CPU 为 2.40 GHz 和内存为 4.00 GB 的机器上运行, 编程语言为 MATLAB.

例 1 设 m 为给定的正整数, $n = m^2$. 在式(1)中取 $M = \hat{M} + 4I$, 其中

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} S & -I & 0 & \cdots & 0 \\ -I & S & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & S & -I \\ 0 & \cdots & 0 & -I & S \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

为块三对角矩阵, 其中 $S = \text{tridiag}(-1, 4, -1) \in$

$\mathbf{R}^{m \times m}$ 为三对角矩阵,

$$q = (-1, 1, \dots, (-1)^n)^T \in \mathbf{R}^n,$$

$$f(z) = (\sqrt{z_1^2 + 0.01}, \dots, \sqrt{z_n^2 + 0.01})^T \in \mathbf{R}^n.$$

表 1 给出了松弛参数 ϵ 的选取策略. 对于例 1, 式 (14) 中取 $\mathbf{D}=\mathbf{I}$. 基于定理 1, 通过简单地计算, 对于 RMJ, RMGS, RMSOR 方法, 策略 2 中的 (a, b) 为

$$(0, 1.200\ 0), (0.333\ 3, 1.200\ 0),$$

$$(0.428\ 6, 1.133\ 3) \quad (17)$$

策略 3 中 (a, b) 为

$$(0, 1.333\ 3), (0, 1.333\ 3), (0, 1.259\ 3) \quad (18)$$

表 2 分别列出当 $n=1\ 600$, 松弛参数 ϵ 在 $0.5 \sim 1.5$ 之间变化时几种迭代法的迭代步数(记作 IT)和迭代时间(记作 CPU).

从表 2 中可以看出, 当松弛参数 $\epsilon < 1$ 时, 算法 2 需要的迭代步数和计算时间比算法 1 多, 当 ϵ 增大时, 对于 RMJ 方法, 迭代步数和计算时间是不断下降的, 而 RMGS 方法和 RMSOR 方法的迭代步数和计算时间先减少后增大. 当 ϵ 不在收敛区域时, 迭代方法不收敛.

此外, $\epsilon \geq 1$ 时三种方法比 $\epsilon < 1$ 时收敛得快, 这表明在公式 (15) 中, 精确解更靠近 $x^{(k-1/2)}$. 松弛参数的三种选取策略数值实验显示在表 2 的最后三行. 从表 2 最后三行可以看出, 基于三种选取策略的算法 2 明显优于算法 1, 且策略 1 是最优策略.

表 1 3 种策略描述

| Tab.1 Description of three strategies | |
|---------------------------------------|--|
| 策略 | 描述 |
| 策略 1 | 当 $k=1$ 时, $\epsilon=1$; 当 $k>1$ 时, $\epsilon=\epsilon^{(k)}$ |
| 策略 2 | ϵ 由式(16)给出, $(a, b) = (\max_{1 \leq i \leq n} a_i, \min_{1 \leq i \leq n} b_i)$ |
| 策略 3 | ϵ 由式(16)给出, $(a, b) = (\min_{1 \leq i \leq n} a_i, \max_{1 \leq i \leq n} b_i)$ |

表 2 例 1 的 3 种迭代法的迭代时间和迭代步数随参数 ϵ 的变化

Tab.2 IT and CPU for three methods with the change of ϵ for Example 1

| 算法 | RMJ | | RMGS | | RMSOR | |
|------------------------|-----|---------|------|---------|-------|---------|
| | IT | CPU | IT | CPU | IT | CPU |
| 算法 2($\epsilon=0.5$) | 49 | 0.713 6 | 46 | 0.734 3 | 43 | 0.677 6 |
| 算法 2($\epsilon=0.6$) | 40 | 0.577 2 | 37 | 0.561 5 | 34 | 0.492 3 |
| 算法 2($\epsilon=0.7$) | 33 | 0.490 3 | 30 | 0.434 7 | 28 | 0.409 5 |
| 算法 2($\epsilon=0.8$) | 28 | 0.400 1 | 25 | 0.379 4 | 23 | 0.342 0 |
| 算法 2($\epsilon=0.9$) | 24 | 0.353 4 | 22 | 0.324 9 | 20 | 0.302 7 |
| 算法 1($\epsilon=1.0$) | 20 | 0.290 1 | 19 | 0.288 6 | 17 | 0.260 9 |
| 算法 2($\epsilon=1.1$) | 18 | 0.260 0 | 17 | 0.254 3 | 21 | 0.313 3 |
| 算法 2($\epsilon=1.2$) | 15 | 0.231 8 | 22 | 0.338 0 | 33 | 0.473 0 |
| 算法 2($\epsilon=1.3$) | 13 | 0.189 2 | 40 | 0.611 0 | 89 | 1.291 5 |
| 算法 2($\epsilon=1.4$) | 11 | 0.158 1 | 123 | 1.791 9 | — | — |
| 算法 2($\epsilon=1.5$) | 10 | 0.145 0 | — | — | — | — |
| 算法 2(策略 1) | 12 | 0.214 3 | 12 | 0.239 8 | 13 | 0.266 9 |
| 算法 2(策略 2) | 17 | 0.267 7 | 16 | 0.233 2 | 16 | 0.229 2 |
| 算法 2(策略 3) | 16 | 0.242 4 | 14 | 0.208 2 | 15 | 0.221 3 |

当矩阵维数不断增大时, 数值实验结果显示在表 3 中. 从表 3 中可以得出, 无论是计算时间还是迭代步数, 基于 2 种策略的算法 2 明显优于算法 1.

表 3 矩阵维数变化时例 1 两种算法比较

Tab.3 Comparison of two algorithms with the change of n for Example 1

| n | 算法 | RMJ | | RMGS | | RMSOR | |
|---------|------------|-----|----------|------|----------|-------|----------|
| | | IT | CPU | IT | CPU | IT | CPU |
| 40×40 | 算法 1 | 20 | 0.290 1 | 19 | 0.288 6 | 17 | 0.260 9 |
| | 算法 2(策略 1) | 12 | 0.214 3 | 12 | 0.239 8 | 13 | 0.266 9 |
| | 算法 2(策略 2) | 17 | 0.267 7 | 16 | 0.233 2 | 16 | 0.229 2 |
| | 算法 2(策略 3) | 16 | 0.242 4 | 14 | 0.208 2 | 15 | 0.221 3 |
| 60×60 | 算法 1 | 20 | 1.377 5 | 19 | 1.317 7 | 17 | 1.189 9 |
| | 算法 2(策略 1) | 12 | 0.990 8 | 11 | 0.833 4 | 13 | 0.957 3 |
| | 算法 2(策略 2) | 17 | 1.204 6 | 16 | 1.102 9 | 16 | 1.094 5 |
| | 算法 2(策略 3) | 16 | 1.223 9 | 14 | 0.973 1 | 15 | 1.278 5 |
| 80×80 | 算法 1 | 20 | 4.400 9 | 19 | 5.183 0 | 17 | 3.678 9 |
| | 算法 2(策略 1) | 12 | 2.593 9 | 11 | 2.363 1 | 13 | 2.793 7 |
| | 算法 2(策略 2) | 17 | 3.767 0 | 17 | 3.946 6 | 16 | 3.330 5 |
| | 算法 2(策略 3) | 16 | 3.428 4 | 13 | 2.834 9 | 15 | 3.434 1 |
| 100×100 | 算法 1 | 20 | 11.247 3 | 19 | 11.267 3 | 17 | 10.097 2 |
| | 算法 2(策略 1) | 12 | 8.880 8 | 11 | 9.008 2 | 13 | 8.725 0 |
| | 算法 2(策略 2) | 17 | 11.466 0 | 17 | 11.172 2 | 16 | 12.357 8 |
| | 算法 2(策略 3) | 16 | 11.207 8 | 13 | 10.624 3 | 15 | 11.330 1 |

例 2 设 m 为给定的正整数, $n=m^2$. 在式(1) 中取

表 4 例 2 的三种迭代法的迭代时间和迭代步数随参数 ϵ 的变化

Tab.4 IT and CPU for three methods with the change of ϵ for Example 2

| 算法 | RMJ | | RMGS | | RMSOR | |
|------------------------|-----|---------|------|---------|-------|---------|
| | IT | CPU | IT | CPU | IT | CPU |
| 算法 2($\epsilon=0.5$) | 194 | 2.353 2 | 179 | 2.247 2 | 167 | 2.184 0 |
| 算法 2($\epsilon=0.6$) | 160 | 2.001 1 | 147 | 1.782 3 | 138 | 1.684 7 |
| 算法 2($\epsilon=0.7$) | 136 | 1.851 3 | 125 | 1.542 5 | 117 | 1.413 4 |
| 算法 2($\epsilon=0.8$) | 118 | 1.449 4 | 108 | 1.334 4 | 101 | 1.245 2 |
| 算法 2($\epsilon=0.9$) | 104 | 1.259 6 | 95 | 1.164 0 | 89 | 1.093 6 |
| 算法 2($\epsilon=1.0$) | 93 | 1.142 2 | 85 | 1.078 8 | 79 | 0.963 8 |
| 算法 2($\epsilon=1.1$) | 83 | 0.992 6 | 76 | 0.939 8 | 72 | 0.919 1 |
| 算法 2($\epsilon=1.2$) | 76 | 0.923 7 | 71 | 0.881 2 | 68 | 0.851 2 |
| 算法 2($\epsilon=1.3$) | 69 | 0.833 3 | 68 | 0.877 1 | 70 | 0.883 8 |
| 算法 2($\epsilon=1.4$) | 63 | 0.791 0 | 73 | 0.942 4 | 110 | 1.361 0 |
| 算法 2($\epsilon=1.5$) | 58 | 0.711 5 | 184 | 2.256 1 | — | — |
| 算法 2(策略 1) | 53 | 0.725 6 | 49 | 0.629 9 | 49 | 0.599 9 |
| 算法 2(策略 2) | 92 | 1.078 2 | 85 | 0.992 2 | 75 | 0.879 1 |
| 算法 2(策略 3) | 72 | 0.837 5 | 66 | 0.773 3 | 67 | 0.774 2 |

$$M = \begin{pmatrix} S & -I & -I & \cdots & 0 \\ & S & -I & -I & \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & S & -I & -I \\ & & & S & -I \\ 0 & \cdots & & & S \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

为块三对角矩阵, $S = \text{tridiag}(-1, 4, -1) \in \mathbf{R}^{m \times m}$ 为三对角矩阵,

$$q = (-1, 1, \dots, (-1)^n)^T \in \mathbf{R}^n, f(z) = (z_1 - \sin z_1, \dots, z_n - \sin z_n)^T \in \mathbf{R}^n.$$

对于例 2, 式(14)中取 $D = \text{diag}[\langle \langle F_\Omega \rangle -$

$|G_\Omega|)^{-1} e]$. 基于定理 1, 通过简单的计算, 对于 RMJ, RMGS, RMSOR 方法, 策略 2 的中 (a, b) 为

$$(0, 1.006 2), (0.930 8, 1.006 2) \quad (18)$$

$$(0.748 9, 1.062 5) \quad (19)$$

策略 3 中的 (a, b) 为

$$(0, 1.294 8), (0, 1.294 8), (0, 1.199 1) \quad (20)$$

表 4 分别列出当 $n=1\ 600$, 松弛参数 ϵ 在 $0.5 \sim 1.5$ 之间变化时几种迭代法的迭代步数和迭代时间. 从表 4 中可以看出, 当松弛参数 $\epsilon < 1$ 时, 算法 2 需要的迭代步数和计算时间比算法 1 多, 当 ϵ 增大时, 对于 RMJ 方法, 迭代步数和计算时间是不断下降的, 而 RMGS 方法和 RMSOR 方法的迭代步数和计算时间先减少后增大. 算法 2 的实际收敛区域比式(18)、式(19)要大, 因此, 收敛区域还可以进行改进.

松弛参数的三种选取策略数值实验显示在表 4 的最后三行. 从表 4 最后三行可以看出, 基于三种选取策略的算法 2 明显优于算法 1, 且策略 1 是最优策略.

当矩阵维数不断增大时, 数值实验结果显示在表 5 中. 从表 5 可以得出, 无论是计算时间还是迭代步数, 基于三种策略的算法 2 明显优于算法 1.

根据实验结果, 得出策略 1 是最优策略, 在图 1 和图 2 中, 分别画出基于策略 1 的算法 2 和算法 1 随着迭代步数变化的残差下降曲线. 从两张图中可以看出, 算法 2 收敛速度明显快于算法 1, 表明提出的新方法是有效的且明显优于模系矩阵分裂迭代方法.

表 5 矩阵维数变化时例 2 两种算法比较

Tab.5 Comparison of two algorithms with the change of n for Example 2

| 矩阵维数 | 算法 | RMJ | | RMGS | | RMSOR | |
|---------|------------|-----|----------|------|----------|-------|----------|
| | | IT | CPU | IT | CPU | IT | CPU |
| 40×40 | 算法 1 | 93 | 1.142 2 | 85 | 1.078 8 | 79 | 0.963 8 |
| | 算法 2(策略 1) | 53 | 0.725 6 | 49 | 0.629 9 | 49 | 0.599 9 |
| | 算法 2(策略 2) | 92 | 1.078 2 | 85 | 0.992 2 | 75 | 0.879 1 |
| | 算法 2(策略 3) | 72 | 0.837 5 | 66 | 0.773 3 | 67 | 0.774 2 |
| 60×60 | 算法 1 | 121 | 7.040 9 | 111 | 7.313 2 | 103 | 6.475 9 |
| | 算法 2(策略 1) | 69 | 3.910 5 | 64 | 3.614 7 | 61 | 3.424 3 |
| | 算法 2(策略 2) | 120 | 6.697 5 | 110 | 6.179 7 | 98 | 5.515 7 |
| | 算法 2(策略 3) | 93 | 5.285 6 | 86 | 5.020 4 | 86 | 4.827 9 |
| 80×80 | 算法 1 | 141 | 26.411 9 | 129 | 22.399 7 | 121 | 20.675 0 |
| | 算法 2(策略 1) | 77 | 13.143 4 | 71 | 12.048 5 | 69 | 11.776 7 |
| | 算法 2(策略 2) | 141 | 24.074 1 | 129 | 22.005 9 | 114 | 19.522 3 |
| | 算法 2(策略 3) | 109 | 18.971 6 | 100 | 17.186 3 | 101 | 16.902 1 |
| 100×100 | 算法 1 | 150 | 65.126 9 | 138 | 60.347 5 | 130 | 52.658 3 |
| | 算法 2(策略 1) | 81 | 34.838 8 | 73 | 33.104 3 | 71 | 33.080 7 |
| | 算法 2(策略 2) | 150 | 67.524 6 | 139 | 65.730 4 | 122 | 54.649 7 |
| | 算法 2(策略 3) | 116 | 50.647 2 | 107 | 48.188 8 | 108 | 54.023 4 |

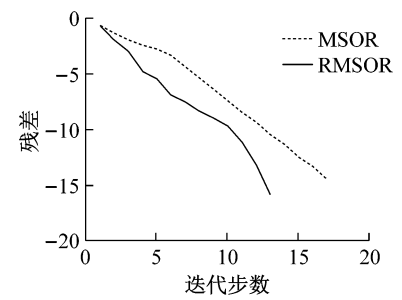
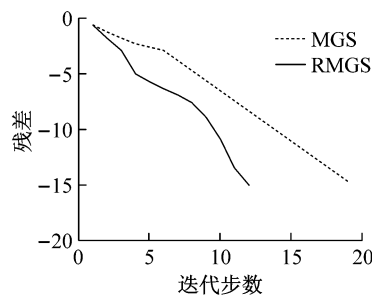
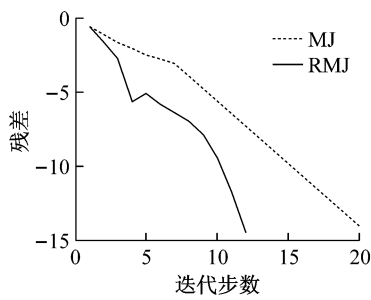


图1 例1两种算法的残差比较

Fig.1 Residual comparison of two algorithms for Example 1

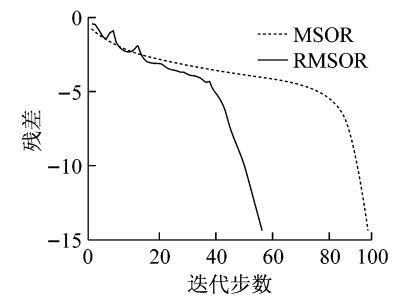
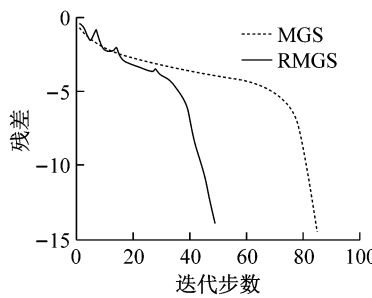
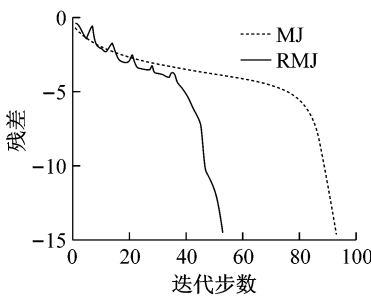


图2 例2两种算法的残差比较

Fig.2 Residual comparison of two algorithms for Example 2

4 结论

本文构造了求解一类非线性互补问题的松弛模系矩阵分裂迭代法,理论上分析了当矩阵 M 为 H_+ -矩阵时的收敛性,并且给出了最优参数的选取方法.数值实验进一步验证了松弛模系矩阵分裂迭代法的有效性.数值结果表明,松弛模系矩阵分裂迭代法无论在迭代步数还是迭代时间上均优于模系矩阵分裂迭代法.

参考文献:

- [1] ORTEGA J M, RHEINBOLDT W C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables [M]. New York: Academic Press, 1970.
- [2] BAI Z Z. Parallel nonlinear AOR method and its convergence [J]. Computers and Mathematics with Applications, 1996, 31(2): 21.
- [3] FERRIS M C, PANG J S. Engineering and economic applications of complementarity problems[J]. SIAM Review, 1997, 39(4):669.
- [4] COTTLE R W, PANG J S, STONE R E. The linear complementarity problem [M]. San Diego: Academic Press, 2009.
- [5] BAI Z Z. Modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2010, 17(6): 917.
- [6] ZHANG L L. Two-step modulus-based matrix splitting iteration method for linear complementarity problems [J]. Numerical Algorithms, 2011, 57(1): 83.
- [7] ZHENG N, YIN J F. Accelerated modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems [J]. Numerical Algorithms, 2013, 64(2): 245.
- [8] ZHENG H, LI W, VONG S. A relaxation modulus-based matrix splitting iteration method for solving linear complementarity problems[J]. Numerical Algorithms, 2017, 74(1): 137.
- [9] BAI Z Z, ZHANG L L. Modulus-based synchronous multisplitting iteration methods for linear complementarity problems [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2013, 20(3): 425.
- [10] BAI Z Z, ZHANG L L. Modulus-based synchronous two-stage multisplitting iteration methods for linear complementarity problems[J]. Numerical Algorithms, 2013, 62(1):59.
- [11] ZHANG L L. Two-step modulus-based synchronous multisplitting iteration methods for linear complementarity problems[J]. Journal of Computational Mathematics, 2015, 33(1):100.
- [12] XIA Z C, LI C L. Modulus-based matrix splitting iteration methods for a class of nonlinear complementarity problem [J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 271: 34.
- [13] LI R, YIN J F. Accelerated modulus-based matrix splitting iteration methods for a class of restricted nonlinear complementarity problems [J]. Numerical Algorithms, 2017, 75(2): 339.
- [14] HU J G. Estimates of $\|B^{-1}C\|_{\infty}$ and their applications[J]. Mathematica Numerica Sinica, 1982, 4:272.
- [15] BERMAN A, PLEMMONS R J. Nonnegative matrix in the mathematical science [M]. Philadelphia: SIAM Publisher, 1994.