

2.5 维有限元分析高铁荷载诱发非饱和土地面振动

高广运^{1,2}, 姚哨峰^{1,2}, 孙雨明³, 杨成斌⁴

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092;

3. 上海应用技术大学 城市建设与安全工程学院, 上海 201418; 4. 合肥工业大学 资源与环境工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘要: 开发一种非饱和地基 2.5 维有限单元方法研究高速列车荷载引起的地面振动。对时间进行 Fourier 变换并沿轨道方向进行波数变换将三维空间问题降为二维平面问题, 结合边界条件和 Galerkin 法推导控制方程 2.5 维有限元格式。轨道结构视为非饱和地基上的 Euler 梁, 所得频域-波数域内解答通过快速 Fourier 逆变换得到三维时域-空间域内结果。分析了车速和路基液体饱和度对地面振动及超静孔隙水压力的影响。结果表明, 路基从完全饱和和转为近饱和状态轨道中心处地面振动位移幅值变化显著; 非饱和路基地面振动位移随时间衰减更快。距轨道中心 8 m 远处, 同一速度下饱和路基路面振动持时大于非饱和路基; 车速提高非饱和土振动持续时间变短, 而饱和土地面振动持时变长。近轨道处 $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 下地面振动位移幅值大于其他速度且均以相当速率快速衰减; 地面振动加速度级在某些车速下的衰减会出现反弹增大现象, 其位置与车速密切相关。轨道中心处超静孔隙水压力主要分布在地表下 4.5 m 内, 最大幅值出现在 1.5~2.0 m 深, 且随路基饱和度降低显著减小。

关键词: 高速铁路; 非饱和土; 2.5 维有限元; 地面振动; 超静孔隙压力

中图分类号: TU435

文献标志码: A

Unsaturated Ground Vibration Induced by High-speed Train Loads Based on 2.5D Finite Element Method

GAO Guangyun^{1,2}, YAO Shaofeng^{1,2}, SUN Yuming³, YANG Chengbin⁴

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. College of Urban Construction and Safety Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China; 4. School of Resources and Environmental Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: A two-and-a-half-dimension finite element method

(2.5D FEM) was established to investigate the surface vibration of the unsaturated ground subjected to moving loads caused by high-speed trains. The track structure was simplified as an Euler beam resting on an unsaturated porous half-space. The Galerkin method was used and the governing equations of unsaturated soil of 2.5D in frequency-wavenumber domain was derived by applying the Fourier transform with respect to time and the load moving direction. The influences of train speed and water saturation of unsaturated ground on ground vibration and excess pore water pressure are analyzed. Results show that, at the track center, the displacement amplitude largely decreases when the water saturation decreases from 100% (fully saturated) to 99% (nearly saturated); for a given speed, the ground vibration displacement of unsaturated ground attenuates faster with time than the saturated ground. At 8 m away from the track center, the displacement amplitude of the unsaturated ground is larger than that of the saturated ground when the train speed is below $250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; as the speed increasing, the duration time of the unsaturated ground vibration displacement becomes shorter as the speed increases, while of the saturated ground it becomes longer. The displacement amplitude at $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ is larger than the other speed near the track (less than 5m) and attenuates rapidly at an equal rate. The rebound phenomenon of acceleration may occur at some train speed, and the location is strongly related to the train speed. The excess pore water pressure is mainly distributes within 4.5 m below the ground surface and the maximum amplitude is located at 1.5~2.0 m depth and decreases significantly as the water saturation decreases.

Key words: high-speed train; unsaturated subgrade; 2.5D finite element method (FEM); ground vibration; excess pore pressure

高速铁路以其速度快、低排放、方便快捷的优点近年得到迅速发展。截至 2016 年底, 我国处于运营

收稿日期: 2018-05-22

基金项目: 国家自然科学基金(41772288)

第一作者: 高广运(1961—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要从事土动力学和桩基方面的研究。E-mail: gaoguangyun@263.net

状态的高速铁路里程超过 2.5 万 km, 占世界 67% 以上. 高速铁路带来便捷的同时, 其运行引起的地面振动日益影响到人们的生活、工作以及健康^[1]. 建立合理的列车荷载下轨道-路基动力分析模型、有效评价高铁运行诱发地面振动对高铁线路的设计和建设具有重要意义, 而其中的路基模型很大程度上决定着数值模型的计算量和精度.

最初路基常被视为单相弹性体, 学者们对其在移动荷载下的动力响应进行研究. Cole 和 Huth^[2]最早研究了二维均质弹性地基上作用超高速移动线荷载的动力响应. Eason^[3]研究了移动点荷载、圆形和矩形荷载下三维均质半空间稳态问题. Xia 等^[4]采用列车-轨道-路基动力模型分析了列车运行对轨道及周围地面振动的影响. 王永刚等^[5]基于移动荷载作用下弹塑性半无限空间的动应力分布和残余应力场分析了交通动应力下路基土体安定性下限值及车辆移动速度的影响. 周凤玺等^[6]基于线弹性动力学理论, 结合坐标变换用半解析法研究了移动荷载作用下二维非均匀路基动力响应. 为了考虑饱和土体中孔隙水对路基振动的影响, Burke 等^[7]基于 Biot 理论^[8-9]首先给出了忽略惯性项的二维多孔饱和半平面在表面移动荷载作用下的解析解. Theodorakopoulos 等^[10-11]考虑了水土耦合及平面应变条件, 采用半解析法求解了移动荷载下饱和路基动力响应. Jin 等^[12]使用半解析方法研究了高速移动荷载下饱和多孔介质的应力和超静孔压. Lefeuve-Mesgouez 等^[13]采用 Fourier 变换的方法分析了竖向矩形简谐移动荷载引起的地面振动. Cai 等^[14-16]考虑了路轨系统的影响, 获得了列车移动荷载作用下饱和半空间的动力响应, 并讨论了荷载移动速度、土体物理参数和渗透系数对路面振动的影响. 高广运等^[17-22]利用 2.5D 有限元系统研究了饱和路基(均匀、分层均匀、横观各向同性和分层横观各向同性)在高铁移动荷载下的动力响应问题.

然而由于大量的蒸发和蒸腾作用路基常处于非饱和状态^[23], Wu^[24]、Yang 等^[25]指出非饱和土饱和度对其动力特性有着明显的影响, 因此有必要研究饱和度对移动荷载下地面振动及超静孔隙水压力的影响. 相比于三维的有限元分析, 2.5D 有限元方法在求解移动荷载作用下动力响应问题速度快、精度高, 具有很大优势. Yang 和 Huang^[26]、Takemiya^[27]、Gao 等^[17-22, 28-30]分别利用 2.5D 有限元研究了弹性、成层以及饱和路基在移动荷载下的动力响应, 指出在求解移动荷载下土体动力响应过程

中 2.5D 有限元法在保证精度的情况下可极大地减小计算量. 本文视路基为更符合工程实际的非饱和介质, 开发一种非饱和路基的 2.5 维有限单元方法, 研究高速列车移动荷载引起的地面振动. 对控制方程时间进行 Fourier 变换, 沿轨道方向波数变换将三维问题降为平面问题, 结合边界条件和 Galerkin 法推导出频域内的 2.5 维有限元方程. 轨道结构视为非饱和路基上的 Euler 梁, 所得频域-波数域内解答通过快速 Fourier 逆变换得到三维时域-空间域内结果. 数值实验研究了车速和路基液体饱和度对地面振动和超静孔隙水压力的影响.

1 计算理论与模型

1.1 路基控制方程的 2.5D 有限元格式

对非饱和土建模采用如下假定: ①表征单元大小满足连续介质尺寸要求; ②孔隙水和空气的运动符合广义 Darcy 定律; ③土颗粒密度与流体压力和体积变形有关, 孔隙中水和气的密度分别是孔隙水压力和孔隙气压力的函数. 首先定义对 t 和 x 的傅里叶变换为: $\tilde{u}(\epsilon_x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, z, t) e^{i\epsilon_x x} e^{-i\omega t} dx dt$. 土骨架质量守恒方程可表示为^[31]

$$(1-n) \frac{\partial \rho_s}{\partial t} - \rho_s \frac{\partial n}{\partial t} + \rho_s (1-n) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (1)$$

式中: ρ_s 为土颗粒密度; n 为孔隙率; \mathbf{u} 为土颗粒位移; “ \cdot ”表示对时间一阶导数; ∇ 为拉普拉斯算子. 流体压力和体积变形对固体介质密度的影响可表示为^[31]

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial \rho_c}{\partial t} = \frac{\alpha - n}{K_g} \frac{\partial p_c}{\partial t} - (1 - \alpha) \frac{\partial \epsilon_s}{\partial t} \quad (2)$$

式中: K_g 为土体颗粒压缩模量, $\alpha = 1 - K_{sk}/K_g$ 为 Biot 系数, 其中 K_{sk} 为土骨架压缩模量; ϵ_s 为土体体积变形; $p_c = S_r p^w + (1 - S_r) p^a$ 为非饱和流体压力, p^w 、 p^a 分别为孔隙水压力和孔隙气压力, S_r 为流体饱和度. 将式(2)代入式(1)有

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\alpha - n}{K_g} \frac{\partial (S_r p^w + (1 - S_r) p^a)}{\partial t} + (\alpha - n) \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (3)$$

孔隙液体的质量守恒方程为^[31]

$$S_r \rho_w \frac{\partial n}{\partial t} + n S_r \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \eta \rho_w \frac{\partial S_r}{\partial t} + \rho_w n S_r \nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}^w = 0 \quad (4)$$

式中: ρ_w 为液体密度; \mathbf{u}^w 为液体的位移. 液相密度和液体压力关系为^[23]

$$\frac{d\rho_w}{\rho_w} = \frac{dp^w}{K_w} \quad (5)$$

式中: K_w 为液体压缩模量, 基质吸力 $s = p^a - p^w$ 与液体饱和度 S_r 的关系可以采用水土特征曲线 (SWCC) 表示^[23]

$$S_r = S_r(s) = S_r(p^a - p^w) \quad (6)$$

在小变形假定条件下, 将式(3)和式(5)代入式(4), 并结合式(6)可得

$$A_{11}\dot{p}^w + A_{12}\dot{p}^a + A_{13}\nabla\dot{u} + A_{14}\nabla\dot{u}^w = 0 \quad (7)$$

参数 $A_{11} \sim A_{14}$ 为 $A_{11} = \frac{(\alpha-n)S_r^2}{K_g} + \frac{nS_r}{K_w} - A_{ss}\left(n - \frac{(\alpha-n)S_r s}{K_g}\right)$, $A_{12} = \frac{(\alpha-n)S_r(1-S_r)}{K_g} + A_{ss}\left(n - \frac{(\alpha-n)S_r s}{K_g}\right)$, $A_{13} = S_r(\alpha-n)$, $A_{14} = nS_r$, $A_{ss} = \frac{\partial S_r}{\partial s}$.

孔隙气体的质量守恒方程为^[31]

$$(1-S_r)\rho_a \frac{\partial n}{\partial t} + n(1-S_r) \frac{\partial \rho_a}{\partial t} - n\rho_a \frac{\partial S_r}{\partial t} + n(1-S_r)\rho_a \nabla \cdot \dot{u}^a = 0 \quad (8)$$

式中: ρ_a 为气体密度; u^a 为气体位移, 气相压缩变形和气相压力关系为^[23]

$$\frac{d\rho_a}{\rho_a} = \frac{dp^a}{K_a} \quad (9)$$

在小变形假定条件下, 将式(3)和式(9)代入式(8), 并结合式(6)有

$$A_{21}\dot{p}^w + A_{22}\dot{p}^a + A_{23}\nabla\dot{u} + A_{24}\nabla\dot{u}^a = 0 \quad (10)$$

$$A_{21} = \frac{(\alpha-n)S_r(1-S_r)}{K_g} + A_{ss}\left(n + \frac{(\alpha-n)(1-S_r)s}{K_g}\right),$$

$$A_{22} = \frac{(\alpha-n)(1-S_r)^2}{K_g} + \frac{n(1-S_r)}{p^a} - A_{ss}\left(n + \frac{(\alpha-n)(1-S_r)s}{K_g}\right),$$

$$A_{23} = (1-S_r)(\alpha-n), A_{24} = n(1-S_r).$$

根据广义 Darcy 定律, 孔隙流体 (液相和气相) 的渗流运动方程分别为^[23]

$$nS_r(\dot{u}_i^w - \dot{u}_i) = -\frac{k_w}{\rho_w g}(p_{,i}^w + \rho_w \ddot{u}_i^w) \quad (11)$$

$$n(1-S_r)(\dot{u}_i^a - \dot{u}_i) = -\frac{k_a}{\rho_a g}(p_{,i}^a + \rho_a \ddot{u}_i^a) \quad (12)$$

式中“ $\ddot{\cdot}$ ”表示对时间二阶导数, 采用傅里叶变换处理式(11)和式(12), 得孔隙水和孔隙气平均位移在频率域内表达式分别为

$$\tilde{u}_i^w = (F_w \tilde{u}_i - \tilde{p}_{,i}^w)/(F_w - \rho_w \omega^2) \quad (13)$$

$$\tilde{u}_i^a = (F_a \tilde{u}_i - \tilde{p}_{,i}^a)/(F_a - \rho_a \omega^2) \quad (14)$$

式中“ \sim ”代表参数频域内的解; $F_w = nS_r \rho_w g \omega i / k_w$;

$F_a = n(1-S_r) \rho_a g \omega i / k_a$, ω 为振动圆频率, 采用傅里叶变换处理式(7)和式(10), 结合(13)和式(14)得频域内液体和气体的质量守恒方程为

$$\left(A_{13} + \frac{A_{14}F_w}{F_w - \rho_w \omega^2}\right)\tilde{u}_{i,i} - \frac{A_{14}}{F_w - \rho_w \omega^2}\tilde{p}_{,ii}^w + A_{11}\tilde{p}^w + A_{12}\tilde{p}^a = 0 \quad (15)$$

$$\left(A_{23} + \frac{A_{24}F_a}{F_a - \rho_a \omega^2}\right)\tilde{u}_{i,i} - \frac{A_{24}}{F_a - \rho_a \omega^2}\tilde{p}_{,ii}^a + A_{21}\tilde{p}^w + A_{22}\tilde{p}^a = 0 \quad (16)$$

由非饱和多孔介质平衡方程 $\sigma_{ij,j} + F_i = \bar{\rho}_s \ddot{u}_i + \bar{\rho}_w \ddot{u}_i^w + \bar{\rho}_a \ddot{u}_i^a$ 、小变形条件下应力-应变关系式 $\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} - \delta_{ij}\alpha p_c$ 和弹性介质几何方程 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ 可得非饱和多孔介质动量守恒方程为^[23]

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{i,ji} - S_r p_{,i}^w - (1-S_r)p_{,i}^a = \bar{\rho}_s \ddot{u}_i + \bar{\rho}_w \ddot{u}_i^w + \bar{\rho}_a \ddot{u}_i^a \quad (17)$$

式中: λ 和 μ 为土体 Lamé 常数; 采用复数形式的 Lamé 常数 $\bar{\lambda} = (1+2i\eta_s)\lambda$, $\bar{\mu} = (1+2i\eta_s)\mu$ 考虑土体阻尼系数的影响; η_s 为阻尼系数; ϵ_{ij} 为土体的应变分量; δ_{ij} 为 Kronecker 符号; σ_{ij} 和 F_i 为土体的应力分量和体力分量; $\bar{\rho}_s = (1-n)\rho_s$, $\bar{\rho}_w = nS_r\rho_w$, $\bar{\rho}_a = n(1-S_r)\rho_a$ 分别为固相、液相和气相的相对密度。

采用傅里叶变换处理式(17), 结合式(13)和式(14), 用应力-应变关系式消去应力项, 得到非饱和土体频域内动力方程如下:

$$\bar{\mu} \tilde{u}_{i,jj} + (\bar{\lambda} + \bar{\mu})\tilde{u}_{i,ji} - S_r \tilde{p}_{,i}^w - (1-S_r)\tilde{p}_{,i}^a + \omega^2 \left[(1-n)\rho_s + \frac{nS_r\rho_w F_w}{F_w - \rho_w \omega^2} + \frac{n(1-S_r)\rho_a F_a}{F_a - \rho_a \omega^2} \right] \tilde{u}_i - \frac{\omega^2 nS_r\rho_w}{F_w - \rho_w \omega^2} \tilde{p}_{,i}^w - \frac{\omega^2 n(1-S_r)\rho_a}{F_a - \rho_a \omega^2} \tilde{p}_{,i}^a = 0 \quad (18)$$

非饱和多孔介质控制方式(15)、式(16)和式(18)可以采用有限元法求解, 对排水排气边界, 应力、流体孔压及流量边界条件可分别表示为

$$\sigma_{ij}^* n_j = f_i, p = p', -k_d p'_{,j} n_j = \rho_f g v_n = q$$

式中: f_i 为边界处应力; p' 为边界处孔隙流体压力; v_n, q 分别表示边界处流速和流量; ρ_f 为流量密度; k_d 为渗透系数; g 为重力加速度; n_j 为方向向量, 由式(18)和应力边界条件, 引入虚位移 δu_i^* 和频域内有效应力 $\tilde{\sigma}'_{ij}$, 利用虚功原理及高斯公式得多孔介质控制方程如下:

$$\int \left[\tilde{\epsilon}_i^* \tilde{\sigma}'_{ij} - \delta u_i^* \omega^2 \left[(1-n)\rho_s + \frac{nS_r\rho_w F_w}{F_w - \rho_w \omega^2} + \frac{n(1-S_r)\rho_a F_a}{F_a - \rho_a \omega^2} \right] \tilde{u}_i \right] dV + \int \left(\delta u_i^* \frac{\omega^2 nS_r\rho_w}{F_w - \rho_w \omega^2} \tilde{p}_{,i}^w - \right.$$

$$\begin{aligned} & \delta \epsilon_i^* \delta_{ij} S_r \bar{p}_{,i}^w) dV + \int \left(\delta u_i^* \frac{\omega^2 n(1-S_r) \rho_a}{F_a - \rho_a \omega^2} \bar{p}_{,i}^a - \right. \\ & \left. \delta \epsilon_i^* \delta_{ij} (1-S_r) \bar{p}_{,i}^a \right) dV = \int \delta u_i^* f_i dS \end{aligned} \quad (19)$$

对式(19)在列车运行方向采用波数展开,并采用 4 节点等参单元离散. 单元形函数取 $N_i(\eta, \xi) = \frac{1}{4}(1+\eta_i\eta)(1+\xi_i\xi)$, 单元位移和孔隙压力与节点位移、节点孔隙压力关系为

$$u_i = \sum_{j=1}^4 N_j(\eta, \xi) u_{ij}^e, p = \sum_{j=1}^4 N_j(\eta, \xi) p_j^e$$

式中: η, ξ 分别为单元局部坐标; η_i, ξ_i 为节点局部坐标, 则可得到矩阵形式 2.5 维有限元控制方程为

$$\begin{aligned} & (\mathbf{K}'_{up} - \mathbf{M}_{up}) \tilde{\mathbf{u}} + (\mathbf{Q}'_{up} - \mathbf{Q}_{up}) \tilde{\mathbf{p}}^w + \\ & (\mathbf{G}'_{up} - \mathbf{G}_{up}) \tilde{\mathbf{p}}^g = \tilde{\mathbf{f}}_{up}^s \end{aligned} \quad (20)$$

式中: “—”代表参数在波数域中的量; $\mathbf{K}'_{up}, \mathbf{M}_{up}, \mathbf{Q}_{up}, \mathbf{G}_{up}, \mathbf{f}_{up}^s$ 分别为刚度矩阵、质量矩阵、液体贡献矩阵、气体贡献矩阵和等效节点力矩阵. 各参量表达式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'_{up} &= \sum_e \iint (\mathbf{B}^* \mathbf{N})^T \mathbf{D} (\mathbf{B} \mathbf{N}) | \mathbf{J} | d\eta d\xi; \mathbf{M}_{up} = \\ & \omega^2 \left[(1-n) \rho_s + n S_r \rho_w \frac{F_w}{F_w - \rho_w \omega^2} + \right. \\ & \left. n(1-S_r) \rho_w \frac{F_a}{F_a - \rho_a \omega^2} \right] \sum_e \iint \mathbf{N} \mathbf{N}^T | \mathbf{J} | d\eta d\xi; \\ \mathbf{Q}'_{up} &= \frac{\omega^2 n S_r \rho_w}{F_w - \rho_w \omega^2} \sum_e \iint \mathbf{N}^T \mathbf{B} \mathbf{N} | \mathbf{J} | d\eta d\xi; \\ \mathbf{Q}_{up} &= \alpha S_r \sum_e \iint (\mathbf{B}^* \mathbf{N})^T \mathbf{m} \mathbf{N} | \mathbf{J} | d\eta d\xi; \\ \mathbf{G}'_{up} &= \frac{\omega^2 n(1-S_r) \rho_a}{F_a - \rho_a \omega^2} \sum_e \iint \mathbf{N}^T \mathbf{B} \mathbf{N} | \mathbf{J} | d\eta d\xi; \\ \mathbf{G}_{up} &= \alpha(1-S_r) \sum_e \iint (\mathbf{B}^* \mathbf{N})^T \mathbf{m} \mathbf{N} | \mathbf{J} | d\eta d\xi; \\ \tilde{\mathbf{f}}_{up}^s &= \sum_e \iint \mathbf{N}^T \tilde{\mathbf{f}} | \mathbf{J} | d\eta d\xi \end{aligned}$$

式中: “*” 代表矩阵共轭; $\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}}$ 为空间域和波数域形函数; \mathbf{J} 为雅可比矩阵; \mathbf{D} 为应力矩阵; \mathbf{B} 为偏导矩阵. 对式(15)和式(16)采用 Galerkin 方法并结合流量和孔压边界条件可得相应有限元控制方程如下:

$$(\mathbf{H}_{md}) \tilde{\mathbf{u}} + (\mathbf{Q}_{md} + \mathbf{Q}'_{md}) \tilde{\mathbf{p}}^w + (\mathbf{G}'_{md}) \tilde{\mathbf{p}}^g = \tilde{\mathbf{f}}^w \quad (21)$$

$$(\mathbf{H}_{dw}) \tilde{\mathbf{u}} + (\mathbf{Q}'_{dw}) \tilde{\mathbf{p}}^w + (\mathbf{G}_{dw} + \mathbf{G}'_{dw}) \tilde{\mathbf{p}}^g = \tilde{\mathbf{f}}^g \quad (22)$$

$$\mathbf{H}_{md} = \left(A_{13} + \frac{A_{14} F_w}{F_w - \rho_w \omega^2} \right) \sum_e \iint \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{m}^T \mathbf{B} \mathbf{N} | \mathbf{J} | d\eta d\xi;$$

$$\mathbf{H}_{dw} = \left(A_{23} + \frac{A_{24} F_a}{F_a - \rho_a \omega^2} \right) \sum_e \iint \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{m}^T \mathbf{B} \mathbf{N} | \mathbf{J} | d\eta d\xi;$$

$$\mathbf{Q}_{md} = \frac{A_{14}}{F_w - \rho_w \omega^2} \sum_e \iint (\mathbf{B}_s^* \bar{\mathbf{N}})^T (\mathbf{B}_s \bar{\mathbf{N}}) | \mathbf{J} | d\eta d\xi;$$

$$\mathbf{Q}'_{md} = A_{11} \sum_e \iint \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} | \mathbf{J} | d\eta d\xi;$$

$$\mathbf{G}_{dw} = \frac{A_{24}}{F_a - \rho_a \omega^2} \sum_e \iint (\mathbf{B}_s^* \bar{\mathbf{N}})^T (\mathbf{B}_s \bar{\mathbf{N}}) | \mathbf{J} | d\eta d\xi;$$

$$\mathbf{Q}'_{dw} = A_{21} \sum_e \iint \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} | \mathbf{J} | d\eta d\xi;$$

$$\mathbf{G}'_{md} = A_{12} \sum_e \iint \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} | \mathbf{J} | d\eta d\xi;$$

$$\mathbf{G}'_{dw} = A_{22} \sum_e \iint \bar{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{N}} | \mathbf{J} | d\eta d\xi;$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{up}^w = - \sum_e \iint \frac{F_w \rho_w g \bar{\mathbf{v}}_n}{k_w} | \mathbf{J} | d\eta d\xi;$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{up}^g = - \sum_e \iint \frac{F_g \rho_g g \bar{\mathbf{v}}_n}{k_g} | \mathbf{J} | d\eta d\xi.$$

综合式(20)、式(21)和式(22)可以得到非饱和地基 2.5 维有限元控制方程为

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (23)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{up} - \mathbf{M}_{up} & \mathbf{Q}'_{up} - \mathbf{Q}_{up} & \mathbf{G}'_{up} - \mathbf{G}_{up} \\ \mathbf{H}_{md} & \mathbf{Q}_{md} + \mathbf{Q}'_{md} & \mathbf{G}'_{md} \\ \mathbf{H}_{dw} & \mathbf{Q}'_{dw} & \mathbf{G}'_{dw} + \mathbf{G}_{dw} \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{p}}^w \\ \tilde{\mathbf{p}}^g \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{up}^s \\ \tilde{\mathbf{f}}^w \\ \tilde{\mathbf{f}}^g \end{bmatrix}.$$

1.2 轨道模型

采用 Euler 梁模型模拟轨道系统, 根据结构力学理论, 波数-频率域轨道动力方程如下^[28]:

$$(EI \xi_x^4 - m \omega^4) u_x^w = f_{\bar{n}}^w(\xi_x, \omega) + p_0^w(\xi_x, \omega) \quad (24)$$

式中: u_x^w 为波数-频率域位移; EI 为轨道的弯曲刚度; m 为轨道和枕木的综合质量; $f_{\bar{n}}^w$ 为波数域-频率域路基接触反力; p_0^w 表示波数-频率域轨道上动荷载, 其中 p_0 为列车车轮轴重, $\delta(x)$ 为狄拉克函数; ξ_x 为波数变量. 列车作用在轨道上的连续轴重荷载同文献[27].

本文计算模型示意图如图 1 所示, 采用黏弹性吸波边界防止外行波在边界的反射. 由于边界处距离振源较远, 非饱和路基边界处孔隙气压力可忽略不计, 黏弹性吸波边界推导详见文献[29]. 编制程序求解轨道路基耦合控制方程, 式(23)和式(24)可得到方程在频域-波数域内解答, 将结果通过快速傅里叶逆变换(FFT)可以得到时间-空间域内的解答.

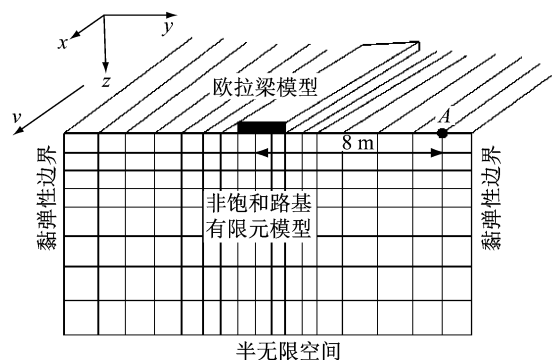


图1 轨道和地基的2.5D有限元模型及黏弹性边界

Fig.1 2.5D FEM of track-ground and the visco-elastic boundary

2 模型验证与计算参数

本文地基地层分布和土体参数采用瑞典国家铁路局 X2000 列车现场实测数据,实测地层、列车轴重参数以及轨道参数见表 1 和表 2^[27]。值得注意的是,本文主要参考的非饱和土理论(文献[31]),在 $S_r=1$ 的情况下,其退化为 Biot 波动方程。首先对模型进行退化验证,取饱和度 $S_r=0$ 土体退化为弹性土体进行计算。图 2 给出列车速度为 $70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 和 $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时轨道中心处路基地面振动结果,同时给出了与文献[27]的对比。由图可以看出两者相当一致,说明本文模型可靠。

表1 路基土层及参数^[27]Tab.1 Parameters of foundation soil^[27]

土层分布	厚度/m	密度/ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$V_s/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	泊松比
回填覆盖层	1.0	1 500	72	0.39
淤泥质黏土	3.0	1 260	41	0.35
黏土	4.5	1 475	65	0.41
黏土	15.0	1 475	87	0.33

表2 X2000 轨道参数^[32]Tab.2 Track parameters of X2000^[32]

轨道参数	数值
轨道宽度 $2B/\text{m}$	3
质量密度 $M/(\text{t} \cdot \text{m}^{-1})$	10.8
弯曲刚度 $EI/(\text{MN} \cdot \text{m}^2)$	200
阻尼系数	0.10

非饱和路基动力响应计算中,土水土特征曲线采用 V-G 模型^[31]: $S_e = [1 + (\alpha_1 s)^k]^{-m}$; 孔隙气和孔隙水的渗透系数采用 Mualem 模型^[31]: $k_w = \frac{\rho_w g \kappa}{\eta_w} \sqrt{S_r} \{1 - [1 - (S_e)^{\frac{1}{m}}]^m\}^2$, $k_g = \frac{\rho_g g \kappa}{\eta_g} \sqrt{1 - S_r} [1 - (S_e)^{\frac{1}{m}}]^{2m}$, 其中参数 $\alpha_1 = 1 \times 10^{-5}$, $k = 4$, $m =$

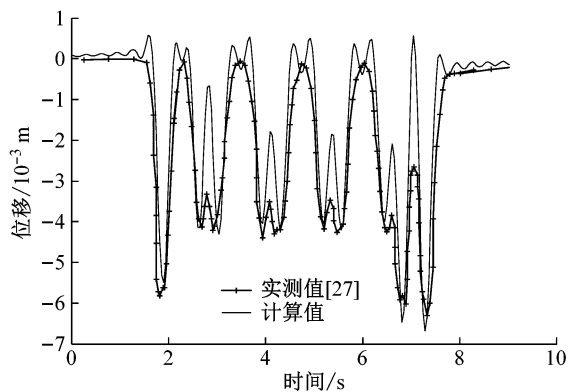
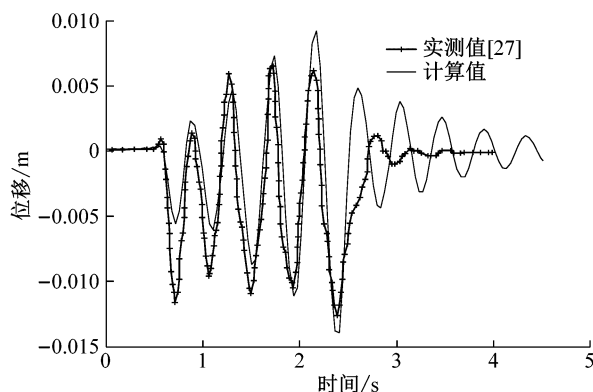
a 车速 $70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ b 车速 $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

图2 不同车速下轨道中心处地面振动时程曲线实测值与模拟值

Fig.2 Time history curve of ground vertical displacement at track center for both test data and simulations with different train speeds

$1 - 1/k = 0.75$, $S_e = (S_r - S_{w0}) / (1 - S_{w0})$ 为有效饱和度, $S_{w0} = 0.05$ 为水的束缚饱和度, s 为基质吸力. $\eta_w = 1.0 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ 为孔隙水黏性系数, $\eta_g = 0.015 \text{ mPa} \cdot \text{s}$ 为孔隙气体的黏性系数; $\kappa = 1.0 \mu\text{m}^2$ 为土体的固有渗透率; 孔隙水压缩模量 $K_w = 2.1 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. 流体的物理参数在动力作用过程中假定为常数; 地面边界设为排水边界和排气边界, 地层底边和无穷远边设为不排水和不排气边界, 以大气压力为参考气压力。高铁多分布于东南沿海地区, 本文选取较高饱和度(100%、99%和 90%)进行分析。

3 不同车速下非饱和路基地面振动位移时程分析

分析轨道中心处和距离轨道中心 8 m 远处(图 1 中点 A)路基地面振动位移随车速和饱和度变化。车速分别取 200、250、300 和 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, 每个车速下路基饱和度取 100%和 90%。

3.1 轨道中心处分析

图 3 为不同速度和饱和度下轨道中心处地面竖向振动位移时程曲线。在车速不超过 $250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时,非饱和路基地面位移振动幅值明显小于饱和路基;随着速度的增大,饱和与非饱和路基地面振动位移幅值的差距呈减小趋势。值得注意的是饱和度从

100%降低为 90%时,饱和土中进入少量气体,土体从完全饱和变为非饱和状态,带来土体相状态的彻底改变(三相变为两相),进而带来土体动力特性的实质性改变,非饱和路基中的孔隙气体降低了轨道中心处的地面位移振幅,而完全饱和是振动位移最不利状态。

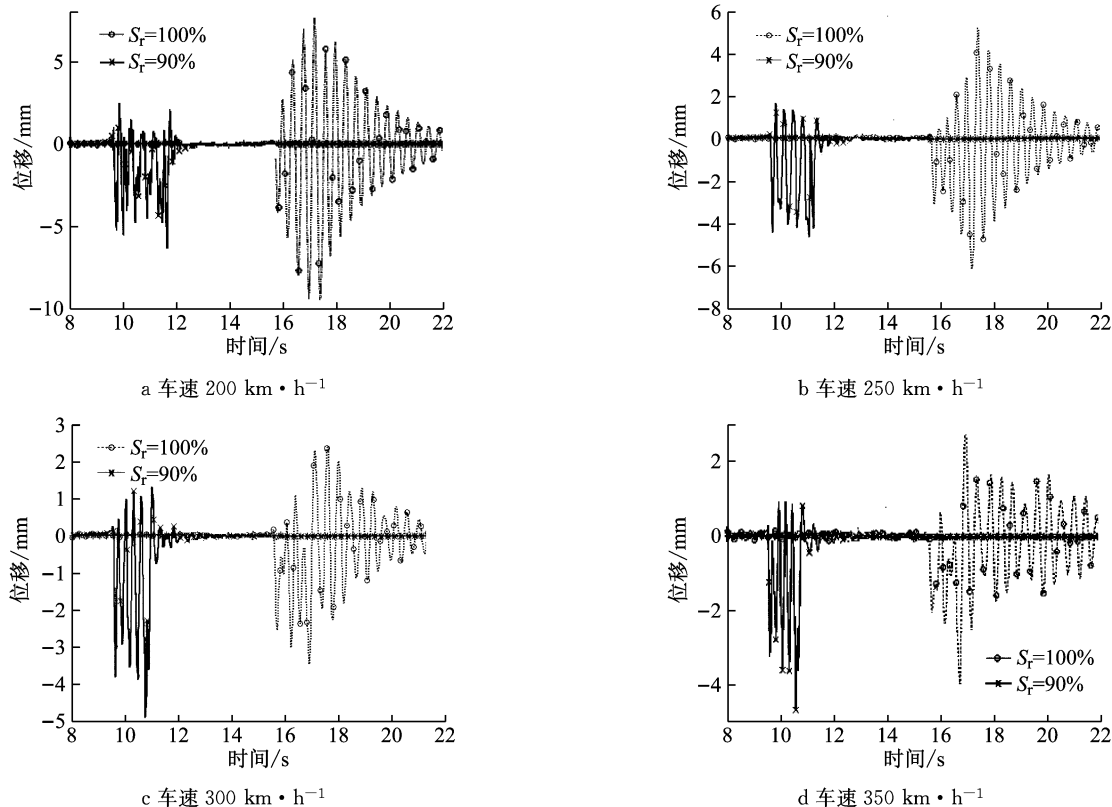


图 3 不同速度和饱和度下轨道中心处地面竖向位移时程图

Fig.3 Time history curve of ground vertical displacement at track center at different saturations and train speeds

与速度低于 $250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时情况相反, $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 和 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时饱和度的减小对位移幅值的增大作用有限,随饱和度的降低路基地面振动位移幅值稍有增大,但 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时饱和度的改变对振动位移幅值的影响已不明显:车速为 $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时,饱和度为 100% 和 90% 时地面振动峰值为 3.5 mm 和 4.7 mm;车速为 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时,饱和度为 100% 和 90% 时地面振动峰值为 4.0 mm 和 4.7 mm,此时随速度增大,饱和和非饱和路基地面振动位移幅值接近相等。从时程图上也可以看到,相比于 $S_r=100\%$ 的饱和土, $S_r=90\%$ 的非饱和土地面振动位移随时间衰减地更快;并且随车速增大,非饱和路基地面振动位移持时变短。

3.2 轨道中心 8 m 远处时程分析

图 4 为不同车速和饱和度下距轨道中心 8 m 远处地面振动位移时程曲线。各车速下,饱和路基地面位移振幅峰值在 0.7~1.2 mm 之间,饱和度为 90%

的路基地面振动位移幅值相近,约为 1~1.5 mm;与 3.1 节中轨道中心处的情况相反,在车速未超过 $250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时,距轨道中心 8 m 远处非饱和路基地面振动位移幅值大于饱和路基,这可能是由于非饱和路基中孔隙气的存在增加了振动波在传播过程中的散射和折射,孔隙气增大了非饱和路基远处的地面振动加速度;对于饱和路基,车速从 $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 增大到 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 其地面振动位移幅值逐渐增大,但增大的幅度越来越小(车速为 200、250、300 和 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时,饱和路基地面位移振幅峰值为 0.70、0.78、1.0 和 1.2 mm)。车速高于 $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 后,随车速提高饱和及非饱和路基地面振动位移幅值均增大且两者逐渐趋于相等,且 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时饱和路基振动位移幅值有超过非饱和土路基的趋势。在同一速度下,饱和路基地面位移振动持时大于非饱和路基;不同速度下,随着车速提高,非饱和土振动持时变短,而饱和土地面振动持续时间变长。

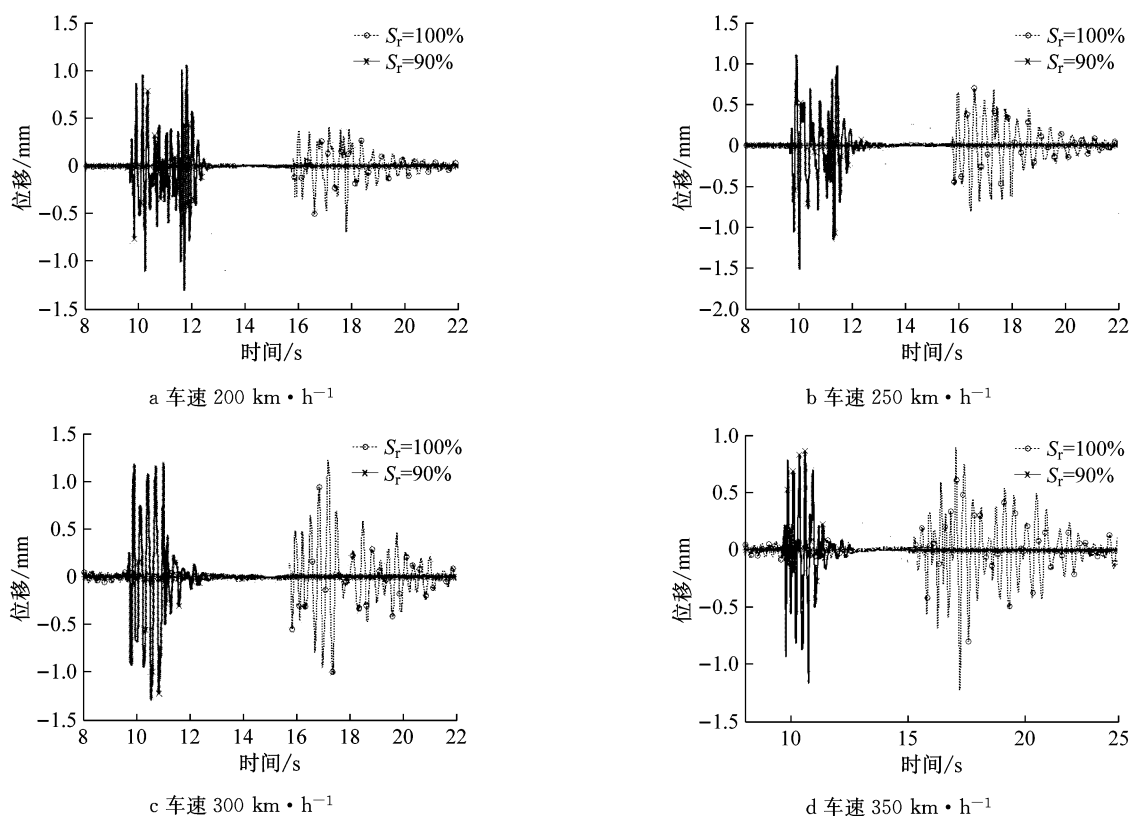


图4 不同车速和饱和度下距轨道中心8 m处地面振动位移时程曲线

Fig.4 Time history curve of ground vertical acceleration at 8m away from track center at different saturations and train speeds

4 不同车速下非饱和土路基地面振动衰减特性

图5为饱和度为90%路基地面振动位移幅值(图5a)和加速度幅值(图5b)随轨道中心距离衰减曲线,车速取200、250、300和350 km·h⁻¹. 200 km·h⁻¹车速下的地面振动位移峰值在近轨道处(距离小于5 m时)大于其余速度. 近轨道处各速度下地面

振动位移峰值均快速衰减且衰减速度相当;远轨道处(距离超过5 m)200 km·h⁻¹车速下衰减最快,其余车速下地面振动位移振幅大小相当且几乎不衰减. 由图5b可以看出,同一位置处低速下的加速度级大于高速下的加速度级,且距轨道中心2 m以内均快速衰减. 距轨道中心2 m以外车速为300 km·h⁻¹时地面振动加速度衰减曲线平缓,衰减最慢,而200 km·h⁻¹车速下衰减最快. 地面振动加速度级在某些列车速度下的衰减会出现反弹增大现象,250

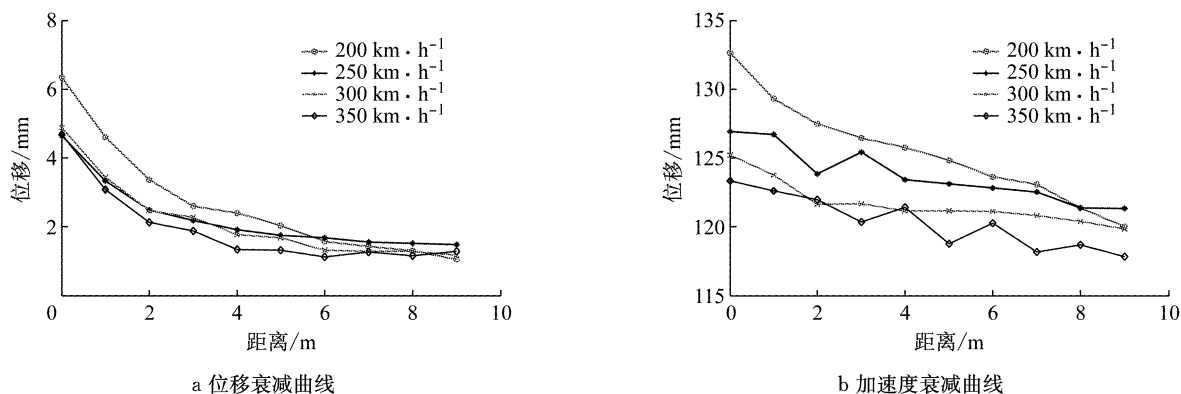


图5 不同车速下饱和度为90%路基地面振动位移幅值和加速度幅值随轨道中心距离衰减曲线

Fig.5 Attenuation curves with distance from track center of ground vertical displacement and acceleration of $S_r = 90\%$ at different train speeds

$\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时地面振动加速度反弹增大现象出现在距轨道中心约 3 m 远处, $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时出现多次地面振动加速度衰减的反弹增大现象, 距轨道中心约 4、6 和 8 m. 可见加速度级的反弹增大现象出现与否及其位置与车速密切相关.

5 不同车速下非饱和土路基超静孔隙水压力

图 6 为不同速度下轨道中心处超静孔隙水压力随深度变化曲线, 车速为 200、250、300 和 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, 路基土饱和度取 100% 和 90%. 可以发现不同车速下饱和土与非饱和土超静孔压变化规律类似, 均在轨道中心下 1.5~2.0 m 之间达最大值, 之后再 3.5~4 m 之间迅速减小, 4.5 m 之下超静孔隙水压

力已经很小. 即超静孔隙水压力主要在浅层分布, 分布深度约为 0~4.5 m. 同一车速下饱和度对超静孔隙水压力具有较大影响, 饱和土超静孔隙水压力明显大于饱和度为 90% 情况, 随路基饱和度下降超静孔隙水压力峰值显著降低. 饱和度 90% 的路基轨道中心下超静孔隙水压力峰值约为 1 kPa, 因此对于饱和度和较低的路基, 高铁荷载产生的超静孔隙水压力可以略去不计. 饱和度为 100% 时随车速增大超静孔隙水压力有稍减小的趋势. 4.5 m 以下车速对超静孔隙水压力影响较小, 各车速下饱和度 100% 路基轨道中心 4.5 m 深处孔压约为 0.6 kPa, 10 m 深处约为 0.2 kPa; 饱和度 90% 路基 4.5 m 深处孔压约为 0.1 kPa, 10 m 处仅约为 0.02 kPa (分别为同一深度处饱和土路基的 17% 和 10%).

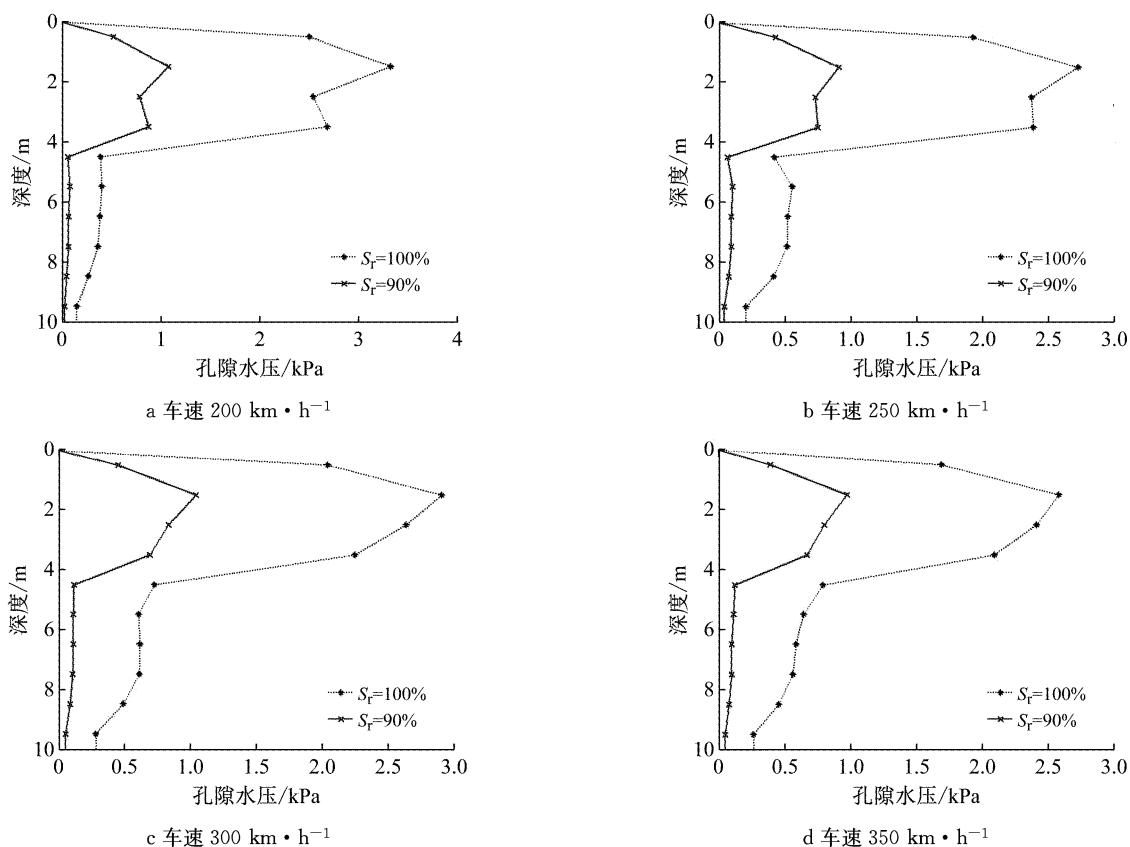


图 6 不同速度和饱和度下轨道中心下超静孔隙水压力随深度变化曲线

Fig. 6 Excess pore water pressure distribution with depth under track center at different saturations and train speeds

6 结论

本文利用非饱和路基 2.5 维有限单元方法研究了高速列车移动荷载引起的非饱和路基地面振动, 主要结论如下:

(1) 在轨道中心处: 列车速度不超过 $250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时, 非饱和土路基地面位移振动幅值明显小于饱和和路基, 路基从完全饱和到非饱和状态轨道中心处地面振动位移显著减小, 完全饱和是振动最不利状态; 在车速小于等于 $250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时, 随着车速增大, 饱和与非饱和路基地面位移幅值差值呈减小趋

势;车速为 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时位移幅值几近相等. 相比于饱和路基,非饱和路基地面振动随时间衰减更快,持时更短.

(2) 距离轨道中心 8 m 远处:车速不超过 $250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时非饱和路基振动位移幅值明显大于饱和路基,车速高于 $300 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 后随车速提高饱和与非饱和路基地面振动位移幅值增大且两者逐渐趋于接近,在 $350 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 时饱和路基地面振动位移幅值有超过非饱和土路基的趋势. 在同一速度下,距离轨道中心 8 m 远处饱和路基路面振动持时大于非饱和路基;车速高于 $250 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 后随车速增大非饱和土振动持续时间变短,而饱和土地面振动持时变长.

(3) 近轨道处(距离小于 5 m)位移幅值低速大于高速且均以大小相当的速率快速衰减;远轨道处(距离超过 5 m) $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ 车速下衰减最快,其余车速下地面振动位移振幅大小相当且几乎不衰减. 同一位置处低速下地面振动加速度级大于高速下的加速度级,且距轨道中心 2 m 以内均快速衰减. 地面振动加速度级在某些列车速度下的衰减会出现反弹增大现象,反弹增大现象的出现与否及其位置与车速密切相关.

(4) 轨道中心下饱和与非饱和路基超静孔隙水压力分布深度约为 $0 \sim 4.5 \text{ m}$,在轨道中心下 $1.5 \sim 2.0 \text{ m}$ 之间达最大值,在 $3.5 \sim 4 \text{ m}$ 深度内急剧减小;同一车速下土体由饱和变为非饱和时超静孔隙水压力峰值显著减小,对于饱和度较低的路基,高铁荷载产生的超静孔隙水压力可以略去不计.

参考文献:

- [1] 夏禾. 交通环境振动工程[M]. 北京:科学出版社, 2010.
XIA He. Traffic environment vibration engineering [M]. Beijing: Science Press, 2010.
- [2] COEL J, HUTH J. Stresses produced in a half space by moving loads [J]. Journal of Applied Mechanics, 1958, 25: 433.
- [3] EASON G. The stresses produced in a semi-infinite solid by a moving surface force [J]. International Journal of Engineering Sciences, 1965(2): 581.
- [4] XIA H, CAO Y M, De ROECK G. Theoretical modeling and characteristic analysis of moving-train induced ground vibrations [J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(7): 819.
- [5] 王永刚,钱建固. 移动荷载下三维半空间动力安定性下限分析[J]. 岩土力学, 2016, 37(S1): 570.
WANG Yonggang, QIAN Jiangu. Dynamic shakedown lower-bound analysis of three-dimensional half-space under moving load [J]. Rock and Soil Mechanics, 2016, 37(S1): 570.
- [6] 周凤玺,曹永春,赵王刚. 移动荷载作用下非均匀地基的动力响应分析[J]. 岩土力学, 2015, 36(7): 2027.
ZHOU Fengxi, CAO Yongchun, ZHAO Wanggang. Analysis of dynamic response of inhomogeneous subgrade under moving loads [J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(7): 2027.
- [7] BURKE M, KINGSBURY H B. Response of poroelastic layers to moving loads [J]. International Journal of Solids and Structures, 1984, 20(5): 499.
- [8] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. 1. low-frequency range [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1956; 28(2): 168.
- [9] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media [J]. Journal of Applied Physics, 1962, 33(4): 1482.
- [10] THEODORAKOPOULOS D D. Dynamic analysis of a poroelastic half-plane soil medium under moving loads [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003, 23: 521.
- [11] THEODORAKOPOULOS D D, CHASSIAKOS A P, BESKOS D E. Dynamic effects of moving load on a poroelastic soil medium by an approximate method [J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41: 1801.
- [12] JIN B, YUE Z Q, THAM L Z. Stresses and excess pore pressure induced in saturated poroelastic half space by moving line load [J]. Soil Dynamic and Earthquake Engineering, 2004, 24: 25.
- [13] LEFEUVE-MESGOUEZ G, MESGOUEZ A. Ground vibration due to a high-speed moving harmonic rectangular load on a poroviscoelastic half-space [J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45(11/12): 3353.
- [14] CAI Yuanqiang, SUN Honglei, XU Changjie. Response of railway track system on poroelastic half-space soil medium subjected to a moving train load [J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45: 5015.
- [15] CAI Yuanqiang, CAO Zhigang, SUN Honglei, et al. Dynamic response of pavements on poroelastic half-space soil medium to a moving traffic load [J]. Computers and Geotechnics, 2009, 36: 52.
- [16] 孙宏磊,蔡袁强,徐长节. 高速列车荷载作用下路轨系统及饱和地基的动力响应[J]. 浙江大学学报(工学版), 2008, 42(11): 2002.
SUN Honglei, CAI Yuanqiang, XU Changjie. Dynamic responses of track system and poroelastic soil under high-speed train load [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science Edition), 2008, 42(11): 2002.
- [17] 高广运,何俊锋,李佳. 地铁运行引起的饱和地基动力响应[J]. 浙江大学学报(工学版), 2010, 44(10): 1925.
GAO Guangyun, HE Junfeng, LI Jia. Dynamic response induced by running subway in saturated ground [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science Edition), 2010, 44(10): 1925.
- [18] 高广运,何俊锋,李宁,等. 饱和地基上列车运行引起的地面振动隔振分析[J]. 岩土力学, 2011, 32(7): 2191.
GAO Guangyun, HE Junfeng, LI Ning, et al. Analysis of isolating ground vibration induced by trains running on saturated ground [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(7): 2191.
- [19] 高广运,陈功奇,李佳. 高速列车荷载作用下横观各向同性

- 饱和地基动力特性的数值分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2014, 33(1):189.
- GAO Guangyun, CHEN Gongqi, LI Jia. Numerical analysis of dynamic characteristic of transversely isotropic saturated soil foundation subjected to high-speed train load [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2014, 33(1): 189.
- [20] 高广运, 李宁, 何俊锋, 等. 列车移动荷载作用下饱和地基的地面振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2011, 30(6):86.
- GAO Guangyun, LI Ning, HE Junfeng, *et al.* Analysis of ground vibration generated by train moving loads on saturated soil [J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30(6): 86.
- [21] 高广运, 何俊锋, 李志毅, 等. 饱和地基上列车运行引起的地面振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2010, 23(2):179.
- GAO Guangyun, HE Junfeng, LI Zhiyi, *et al.* Analysis of ground vibration generated by a moving train on saturated ground [J]. Journal of Vibration Engineering, 2010, 23(2): 179.
- [22] 高广运, 赵宏, 张博, 等. 饱和分层地基上列车运行引起的地面振动分析[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2013, 41(12): 1805.
- GAO Guangyun, ZHAO Hong, ZHANG Bo, *et al.* Analysis of ground vibration induced by trains on saturated layered ground [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2013, 41(12): 1805.
- [23] 弗雷德隆德, 拉哈尔佐. 非饱和土土力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1997.
- FREDLUND D G, RAHARDJO H. Soil mechanics for unsaturated soils [M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1997.
- [24] WU Shiming, GRAY D H, RICHART F E. Capillary effects on dynamic modulus of sands and silts [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1984, 110(9):1188.
- [25] YANG Jun. Saturation effects of soils on ground motion at free surface due to incident SV waves[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002, 128(12): 1295.
- [26] YANG Y B, HUNG H H. A 2. 5D finite/infinite element approach for modeling visco-elastic bodies subjected to moving loads [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 51: 1317.
- [27] TAKEMIYA H, BIAN X C. Substructure simulation of inhomogeneous track and layered ground dynamic interaction under train passage [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2005, 131(7): 699.
- [28] GAO Guangyun, CHEN Qingsheng, HE Junfeng. Investigation of ground vibration due to trains moving on saturated multi-layered ground by 2. 5D finite element method [J]. Soil Dynamic and Earthquake Engineering, 2012, 40(3):87.
- [29] 高广运, 何俊锋, 杨成斌. 2.5 维有限元分析饱和地基列车运行引起的地面振动[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(2): 234.
- GAO Guangyun, HE Junfeng, YANG Chengbin. Ground vibration induced by trains moving on saturated ground using 2. 5D FEM [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(2): 234.
- [30] 李佳, 高广运, 赵宏. 基于 2.5 维有限元法分析横观各向同性地基上列车运行引起的地面振动[J]. 岩石力学与工程学报, 2013, 32(1): 78.
- LI Jia, GAO Guangyun, ZHAO Hong. Study of ground vibration induced by train load in transversely isotropic soil using 2. 5d finite element method [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2013, 32(1): 78.
- [31] 徐明江, 魏德敏. 非饱和土地基的三维非轴对称动力响应[J]. 工程力学, 2011, 28(3):78.
- XU Mingjiang, WEI Demin. 3D non-axisymmetrical dynamic response of unsaturated soils [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(3): 78.
- [32] 边学成, 陈云敏, 胡婷. 基于 2.5 维有限元方法模拟高速列车产生的地基振动[J]. 中国科学, 2008, 38(5):600.
- BIAN Xuecheng, CHEN Yunmin, HU Ting. Numerical simulation of high speed train induced ground vibrations using 2. 5D finite element approach [J]. Science in China Press, 2008, 38(5): 600.