

广义自回归条件异方差模型加速模拟定价理论

马俊美^{1,2,3}, 卓金武⁴, 张 建¹, 陈 淦¹

(1. 上海财经大学 数学学院, 上海 200433; 2. 上海市金融信息技术研究重点实验室, 上海 200433;

3. 应用数学福建省高校重点实验室(莆田学院), 福建 莆田 351100; 4. 上海财经大学 信息管理与工程学院, 上海 200433)

摘要: 研究了广义自回归条件异方差(GARCH)模型下方差衍生产品的加速模拟定价理论. 基于 Black-Scholes 模型下的产品价格解析解以及对两类标的过程的正矩分析, 提出了一种 GARCH 模型下高效控制变量加速技术, 并给出最优控制变量的选取方法. 数值计算结果表明, 提出的控制变量加速模拟方法可以有效地减小 Monte Carlo 模拟误差, 提高计算效率. 该算法可以方便地解决 GARCH 随机波动率模型下其他复杂产品的计算问题, 如亚式期权、篮子期权、上封顶方差互换、Corridor 方差互换以及 Gamma 方差互换等计算问题.

关键词: GARCH; 随机波动率; 加速; 控制变量; 方差衍生产品

中图分类号: F830.9, O211.5

文献标志码: A

Pricing Accelerated Simulation Theory of Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model

MA Junmei^{1,2,3}, ZHUO Jinwu⁴, ZHANG Jian¹, CHEN Lu¹

(1. School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China; 2. Shanghai Key Laboratory of Financial Information Technology, Shanghai 200433, China; 3. Key Laboratory of Applied Mathematics, Fujian Province University (Putian University), Putian 351100, China; 4. School of Information Management and Engineering, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: The accelerated simulation pricing theory of variance derivatives under generalized auto regressive conditional heteroskedasticity (GARCH) stochastic volatility model was studied. Based on the analytical solution under the Black-Scholes model and their moments analysis of these two kinds of processes, a more efficient acceleration technique of control variate was proposed and the method of selecting optimal control variate was also given. The numerical results show that the proposed accelerated simulation method of

control variate effectively reduce the simulation error and improve the computational efficiency. The algorithm can also be used to solve the computational problems of other complex products under GARCH stochastic volatility model, such as Asian option, Basket option, Capped variance swap, Corridor variance swap and Gamma variance swap, etc.

Key words: GARCH; stochastic volatility; accelerate; control variate; variance derivatives

波动率是金融资产最重要的特征之一, 特别是在定价中起决定因素. 波动率通常定义为标的资产投资回报率的标准差, 通常用来度量标的资产的风险或者不确定性. 经典的 Black-Scholes 模型假设波动率是常数, 这与实际金融市场得到的数据不一致. 金融实证研究表明: 波动率最显著的一个特点就是具有“微笑”或者偏斜的曲线^[1]. 此外, 除了具有“微笑”曲线外, 人们还发现波动率具有集聚性与时变性, 分布呈尖峰厚尾性, 还具有杠杆效应、日历效应等特性^[2]. 针对市场波动率的这些特性, 研究者们提出了一系列随机波动率模型来改进 Black-Scholes 模型, 期望更好地刻画随机波动率特征. 估量波动性的模型在过去的半个世纪里成为计量经济学和实证金融学中较为活跃的研究领域之一. 概括起来主流的随机波动率模型主要有两类, 一类是连续时间的随机波动率模型(SV 模型), 一类是离散时间的随机波动率模型(GARCH 模型). 这两类模型被认为是最集中反映全球金融数据时间序列方差波动特点的模式, 也是研究现代经济计量学的一个重点. 在金融实务操作中, 交易都是离散进行的, GARCH 模型描述离散时间经济情形, 更能反映实务中股票价格运行的实际情况.

收稿日期: 2018-06-07

基金项目: 国家自然科学基金(11271243, 11226252); 上海优秀青年基金(ZZCD12007); 应用数学福建省高校重点实验室(莆田学院)开放课题(SX201704)

第一作者: 马俊美(1983—), 女, 讲师, 理学博士, 主要研究方向为金融数学与计算. E-mail: ma.junmei@mail.shufe.edu.cn

GARCH 模型是将波动率视为过去信息集的函数,是 Bollerslev^[3]在 Engle^[4]在 ARCH 模型基础上发展起来的. GARCH 模型考虑了扰动项的滞后值和扰动项条件方差的滞后值,克服了 ARCH 模型无法反映波动率的持续性以及不能保证参数非负的缺点,被广泛用于描述金融市场上资产收益的波动变化. 1987 年, Bollerslev 在考虑分布有偏和放宽假设的前提下,使用 t 分布代替正态分布描述时间序列的偏度和峰度问题,建立了 AGARCH 模型^[4]. 基于这些研究,考虑到该模型的应用性和扩展性,此后 20 多年,许多学者针对不同问题构建出多种变形模型,构成 GARCH 族模型,使条件异方差结构得到完善的诠释. 例如, Robert 等为解决高风险高收益问题,将风险加入收益方程,建立了 MGARCH 模型^[5]. 针对冲击非对称效应, Nelson 提出了指数模型 EGARCH^[6], Zakoian 提出了门限模型 TGARCH^[7]. 大量实证证明 GARCH 模型对金融时间序列有较好的描述,它充分体现了金融数据的特征,这些 GARCH 族模型的应用与实证领域双向作用,使得模型在分析波动性和表征宏观、金融高频数据等方面体现出巨大的价值和意义.

GARCH 模型描述的是离散时间经济情形,在进行产品定价研究时,不能象连续时间经济情形那样,可以建立期权价格满足的偏微分方程,所以, Monte Carlo 模拟方法被普遍用来解决 GARCH 模型下金融产品的计算问题. Duan 等^[8]在 1995 年第一次提出了一个在 GARCH 模型框架下欧式期权定价的完整理论,运用均衡定价原理证明了当投资者的效用函数满足一定的条件时,就存在一个满足局部风险中性定价关系的概率测度 Q ,用传统的 Monte Carlo 模拟算法计算了 GARCH 模型欧式期权的定价问题^[8-9];邵斌和丁娟研究了 GARCH 模型下美式亚式期权价值的 Monte Carlo 模拟算法,在 Longstaff 等的美式期权定价的最小二乘算法的基础上,开发了 GARCH 模型下美式亚式期权定价的最小二乘模拟算法^[10].

波动率衍生产品是一类基于波动率远期水平的特殊金融衍生品,主要代表是方差互换. 波动率衍生产品是在 1998 年经济危机之后顺时而出的产品,它代表了一种新的交易思路——交易波动率,是现今金融工程的热门方向,也是研究的前沿,它的出现为国际资本市场的拓展和融资技术的创新带来了巨大的变化,衍生出了方差和波动率互换市场. 1998 年,市场开始出现股票指数波动率互换和波动率变动互

换的交易;同年,德国出现了波动率指数期货的交易;2001 年,基于 Nasdaq-100 期权的纳斯达克波动率指数(VXN)波动率指数被开发出来;2003 年,基于 SP500 期权的新 VIX 波动率指数被开发出来;2004 年,VIX 波动率指数期货与波动率指数变动期货开始交易;2008 年,VIX 波动率指数期权开始交易. 交易波动率除了将不同市场连接起来,同时对于整个资本市场也存在重大的意义,这代表了一种新的研究方向. 国内,目前关于波动率衍生产品的关注度也越来越高,上海期货所和上海纽约大学就波动率衍生产品的运用与交易策略已展开多次高层论坛,上海纽约大学专门成立波动研究所(V-Lab),通过对各类金融资产的波动性、相关度及其他风险维度的实时度量、建模和预测,为学界、业界及监管和决策部门提供实时的市场动态资讯及分析,为日后波动率产品的推行做准备. 所以,关于波动率及波动率产品的定价和风险管理研究有着重要的现实意义.

方差互换是一种合约,且是期限较长的. 买方取得的利润取决于实际资产指数波动率减去敲定波动率,以上各项均应该在签订方的合约中有限制,包括限定期限等. 在合约到期时签订方的偿付额为名义本金与此差值的乘积,即

$$P = M \cdot (\sigma^2 - K^2)$$

式中: M 是名义本金; σ^2 是事实资产指数的方差; K^2 是方差互换中的敲定方差.

关于波动率衍生产品的定价研究,前人研究思路主要有 2 个方面:一个方面是在着重刻画产品的性质特征上,如文献[11-12],以期权定价理论为基础,通过一系列标准期权的组合来复制相应的互换^[11-12]. 另一方面是在某些特殊条件下,研究产品价格的半解析解,如文献[13-15],但求半解析解的过程亦是一复杂的数值过程. Ma 等^[16]使用 Monte Carlo 技术研究了连续型 Hull-White 随机波动率模型下波动率衍生产品的定价问题.

本文着重研究 GARCH 随机波动率模型下金融衍生产品的加速模拟定价问题,并以方差衍生产品的定价问题为例.

1 Monte Carlo 方法及控制变量技术

Monte Carlo 方法是以概率论为基础,通过计算机生成符合一定概率分布随机数的一种数值计算方法. 当要求解的问题是某一事件的概率,或某个随机

变量的数学期望时,可以利用 Monte Carlo 方法求解,假设要估计随机变量 V 的期望 $E(V)$,利用 Monte Carlo 法,根据随机变量 V 的概率分布得到 n 次重复抽样 V_1, V_2, \dots, V_n ,它们独立同分布且有有限期望值 $E(V)$ 和有限方差值 $\sigma^2, V_1, V_2, \dots, V_n$ 的算术平均值 \bar{V} ,它是 $E(V)$ 的无偏估计值,即 $\bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_j$,且 $E[\bar{V}] = E[V], \text{Var}[\bar{V}] = \frac{\sigma^2}{n}$. 由强大数定理可知,当样本数 n 充分大时,估计值 \bar{V} 以概率 1 收敛到目标值 $E[V]$.

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{V} = E[V]) = 1$$

由中心极限定理,可以得到估计值的误差为

$$P\left(|\bar{V} - E[V]| < \frac{\lambda_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx \Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$$

式中: α 为显著水平; λ_α 为分位数; $\Phi(\lambda_\alpha)$ 为正态分布分布函数,这表明不等式 $|\bar{V} - E[V]| < \frac{\lambda_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$ 以概率 $1 - \alpha$ 成立, \bar{V} 收敛到 $E[V]$ 速度的阶为 $O(n^{-\frac{1}{2}})$.

如果标准差 $\sigma \neq 0$,那么 Monte Carlo 法的误差为 $\frac{\lambda_\alpha \sigma}{\sqrt{n}}$,它受 σ 和 \sqrt{n} 共同影响,即在固定的 σ 下,想要提高一个单位的精度,需要增加 100 倍的工作量,换言之,若 σ 减小到原来的 1/10,工作量就可以降到原来的 1/100. 因此,很多研究学者提出了很多技巧减小模拟误差 σ ,如对偶变量技术、控制变量技术、重要抽样技术等. 控制变量加速技术的思想简介如下.

假设每次仿真的过程中都存在另一个随机变量 X ,形成一对独立同分布的随机变量 (X_j, V_j) ,且 X_j 的期望 $E(X)$ 是已知的,则对任意确定的常数 b ,第 j 次重复试验的结果为

$$V_j(b) = V_j - b[X_j - E(X)]$$

那么 m 次模拟之后,期权价格的控制变量估计值为

$$\bar{V}(b) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (V_j - b(X_j - E(X)))$$

可以看到此时随机变量 X 的估计值与它的期望值的偏差 $\bar{X} - E(X)$ 作为控制变量. 显然 $\bar{V}(b)$ 是产品价格的一个无偏估计且

$$\text{Var}(V_j(b)) = \text{Var}(V) + b^2 \text{Var}(X) - 2b \sqrt{\text{Var}(V)} \sqrt{\text{Var}(X)} \rho_{XV}$$

式中: ρ_{XV} 为变量 X 与 V 的相关系数. 欲使上式方差达到最小,需要取到一个最优的控制系数 $b^* = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$,此时最小方差为

$$\frac{\text{Var}(V_i(b^*))}{\text{Var}(V_i)} = 1 - \rho_{XV}^2$$

关于控制变量技术的方差分解原理及其他几种方差减小理论可参考文献[17].

2 GARCH 模型下方差衍生产品的控制变量加速模拟理论

2.1 GARCH 随机波动率模型介绍

在风险中性测度 Q 下,资产收益率过程由式(1)给出^[8]:

$$\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} = r - \frac{1}{2} \sigma_{t+1}^2 + \sigma_{t+1} \epsilon_{t+1} \quad (1)$$

式中: r 为无风险利率; S_t 表示 t 时刻的资产价格; S_{t+1} 为下一个时刻的资产价格. 在测度 Q 下, $\epsilon_{t+1} | \Phi_t \sim N(0, 1)$,即在风险中性测度 Q 下, ϵ_{t+1} 是一个在时间 t 时的条件分布为标准正态分布的随机变量,因而时间 t 时资产收益率的条件方差为 σ_{t+1}^2 ,其变化规则满足下面的 GARCH 过程:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\epsilon_{t-1} - (\lambda + \gamma))^2 \sigma_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

式中: $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ 和 γ 都是 GARCH 模型中的参数, $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \beta_1 > 0; \lambda$ 是风险溢价率.

设 $0 = T_0 < T_1 < \dots < T_N = T$ 是 $[0, T]$ 上的 N 个观察日,记 $S_i = S_{T_i}$ 是第 i 个观察日的收盘价, K_{strike}^2 表示敲定方差,该金融衍生产品的到期收益函数也为

$$V(S_T, T) = M \times \left(\sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)^2 - K_{\text{strike}}^2 \right) \triangleq h(S_0, S_1, \dots, S_N)$$

产品的收益函数记为 $h(S_0, S_1, \dots, S_N)$,产品的发行时刻价格为

$$V(S_0, 0) = E[e^{-rT} h(S_0, S_1, \dots, S_N)]$$

方差衍生产品的定价属于高维的路径依赖型问题,而在 GARCH 模型下,此类路径依赖问题的解析表达式很难得到,一般情况下只能用数值估计方法估计,若用有限差分方法或者二叉树方法直接求解,计算量极大,因此考虑用 Monte Carlo 加速模拟技术来研究此定价问题.

2.2 Black-Scholes 框架下方差互换产品价格的解析解

考虑使用 Black-Scholes 框架下的辅助方差互换产品,标的资产价格过程服从下面的扩散过程:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma_c dB_t \quad (2)$$

式中: σ_c 为波动率常数; B_t 为标准布朗运动.

记此时产品的价格为 $W=W(S, t)$, 到期日的收益函数仍为 $h(S_0, S_1, \dots, S_N)$, 使用概率论方法求其解析解. 因为

$$S_{T_i} = S_{T_{i-1}} \exp\left(r - \frac{1}{2}\sigma_c^2\right)\Delta T_i + \sigma_c \sqrt{\Delta T_i} X_i$$

式中: $X_i \sim N(0, 1), i=1, 2, \dots, N$, 且 X_i 和 Y_j 相互独立, 所以

$$h(S_0, S_1, \dots, S_N) = h\left(S_0, S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_c^2)T_1 + \sigma_c \sqrt{T_1} X_1}, \dots, S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_c^2)T_N + \sigma_c \sqrt{T_N} X_N}\right)$$

则

$$W(S_0, 0) = E[e^{-rT} h(S_0, S_1, \dots, S_N)] =$$

$$\int \dots \int h\left(S_0, S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_c^2)T_1 + \sigma_c \sqrt{T_1} X_1}, \dots,$$

$$S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_c^2)T_N + \sigma_c \sqrt{T_N} X_N}\right) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^N e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

将收益函数 $h(S_0, S_1, \dots, S_N)$ 的表达式代入上式即可求出解析解为

$$W(S_0, 0) = e^{-rT} M[\sigma_c^2 T + (r^2 - r\sigma_c^2 + \frac{1}{4}\sigma_c^4) \sum_{i=1}^N \Delta t_i^2 - K_{\text{Var}}^2]$$

2.3 GARCH 波动率模型产品定价的控制变量加速模拟算法

将上述 Black-Scholes 框架下的辅助方差互换产品的价格作为控制变量来求解 GARCH 随机波动率模型下方差互换的价格. 控制变量 Monte Carlo 加速模拟算法如下.

(1) 步骤 1. n 等分时间段 $[0, T]$, 等分间隔 $\Delta t = \frac{T}{n}$, 把每一个间隔都作为观察点, 基于常数波动率的收益率变化过程有式(3):

$$\begin{cases} S_{(1)}(t_{i+1}) = S_{(1)}(t_i) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_c^2)\Delta t + \sigma_c \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,i}} \\ S_{(1)}(t_0) = S_0 \end{cases} \quad (3)$$

式中: $\varepsilon_{1,i}$ 是符合标准正态分布的随机数, 每个间隔点产生一个, 这样就可以模拟出基于常数波动率下方差互换产品价格的一条路径 j .

(2) 步骤 2. 运用方差互换产品定价模型和步骤 1 中模拟路径 j , 可求出控制变量在零时刻的价格为

$$X_j = M e^{-rT} \left[\frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{S_{1,j}(t_i)}{S_{1,j}(t_{i-1})} \right)^2 - K_{\text{Var}}^2 \right] \quad (4)$$

(3) 步骤 3. n 等分时间段 $[0, T]$, 基于 GARCH 模型的收益率变化过程(在于步骤 1 中相同的随机序列 ε_1 下生成), 有式(5):

$$\begin{cases} S_{(2)}(t_{i+1}) = S_{(2)}(t_i) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma_c^2(t_i))\Delta t + \sigma(t_i)\sqrt{\Delta t}\varepsilon_{1,i}} \\ S_{(2)}(t_0) = S_0 \end{cases} \quad (5)$$

式中的波动率 $\sigma(t_i)$ 满足式(6):

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{2,i} - (\lambda + \gamma))^2 \sigma_i^2 + \beta \sigma_i^2 \quad (6)$$

式中: $\varepsilon_{2,i}$ 取为一个与 $\varepsilon_{1,i}$ 相互独立的服从标准正态分布的随机变量. 这样便可以模拟出基于 GARCH 模型下方差互换产品价格的另一条路径.

(4) 步骤 4. 运用方差互换产品定价模型和步骤 3 中模拟的路径推导出方差互换产品初始时刻价格为

$$V(S_0, 0) = M e^{-rT} \left[\sum_{i=1}^N \left(\ln \frac{S_{(2)i}}{S_{(2)i-1}} \right)^2 - K_{\text{Var}}^2 \right]$$

(5) 步骤 5. 计算 $V(b) = V - b(X - E(X))$, b 为一个可以估计出的常数, 其中 $E(X)$ 由下式给出:

$$W(S_0, 0) = e^{-rT} M[\sigma_c^2 T + (r^2 - r\sigma_c^2 + \frac{1}{4}\sigma_c^4) \sum_{i=1}^N \Delta t_i^2 - K_{\text{Var}}^2]$$

(6) 步骤 6. 模拟 m 次(重复步骤 1 至 5 m 次), 并对每一次模拟所得的 $V(b)$ 取平均得到 GARCH 模型下方差互换产品价格的控制变量估计为

$$\bar{V}(b) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m V_j(b) = \bar{V} - b(\bar{X} - E(X)) \quad (7)$$

其中最优化系数 b^* 可用样本点估计.

$$b^* \approx \hat{b}_m = \sum_{j=1}^m (V_j - \bar{V})(X_j - \bar{X}) \left[\sum_{j=1}^m (X_j - \bar{X})^2 \right]^{-1}$$

该 Monte Carlo 控制变量算法的误差减小效果关键在于要使控制变量与所求 GARCH 问题模型具有较高的相关性 ρ_{XV} . 加速的效果用 2 种算法的误差减小倍数 R 来衡量.

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{XV}^2}}$$

数值结果表明: 控制变量技术的加速效果高度依赖于模型参数 σ_c 的选取, σ_c 选取的不同, 误差减小效果差别很大. 图 1 描述了 R 与不同的波动率常数的关系.

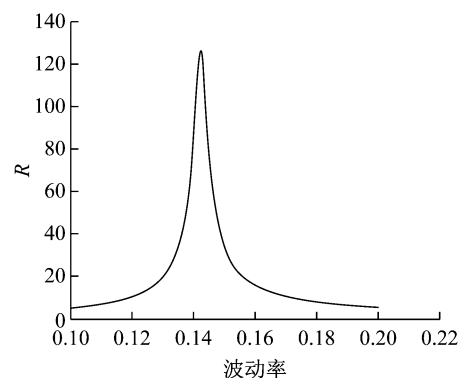


图 1 R 与波动率的关系 ($N=1, m=5\ 000$)

Fig.1 Relation between the ratio and control variate parameter σ_c ($N=1, m=5\ 000$)

如何选取高效有代表性的常数波动率 σ_c 是该控制变量算法设计的关键问题,使模拟的效果能达到最好.通过对 GARCH 离散标的过程和 Black-Scholes 连续标的资产过程的一阶矩和二阶矩的分析,得到下面定理.

定理 1 当波动率常数满足

$$\sigma_c = E(\sigma(t_{i,j})) = \frac{1}{m \times n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma(t_{i,j})$$

时,过程(3)与(5)所描述的两股票价格的前两阶矩在 T 时刻近似相等,其中, $\sigma(t_{i,j})$ 表示第 i 条路径上 t_j 时刻对应的波动率.

证明 考虑对 $[0, T]$ 时间段进行 n 等分, $\Delta t = \frac{T}{n}$, 欲证明过程(3)与过程(5)在 T 时刻的一阶矩和二阶矩相等,即要证明其期望与方差相等.

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$E(e^X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\text{Var}(e^X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$$

所以,对于过程(3)有

$$E(S_{(1)T}) = E(S_0 e^{\sum_{i=1}^n (r - \frac{1}{2}\sigma_c^2)\Delta t + \sigma_c \sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}}) =$$

$$S_0 e^{rT} e^{-\frac{1}{2}\sigma_c^2 T} E(e^{\sum_{i=1}^n \sigma_c \sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}}) =$$

$$S_0 e^{rT} e^{-\frac{1}{2}\sigma_c^2 T} e^{\frac{1}{2}\sigma_c^2 T} = S_0 e^{rT}$$

$$\text{Var}(S_{(1)T}) = \text{Var}(S_0 e^{\sum_{i=1}^n (r - \frac{1}{2}\sigma_c^2)\Delta t + \sigma_c \sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}}) =$$

$$S_0^2 e^{2rT} \text{Var}(e^{\sum_{i=1}^n \sigma_c \sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}}) =$$

$$S_0^2 e^{2rT} (e^{\sigma_c^2 T} - 1)$$

对于过程(5)有

$$E(S_{(2)T}) = E(S_0 e^{\sum_{i=1}^n (r - \frac{1}{2}\sigma^2(t_i))\Delta t + \sigma(t_i)\sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}}) =$$

$$S_0 e^{rT} E(e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}\sigma^2(t_i)\Delta t + \sigma(t_i)\sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}})$$

$$\text{Var}(S_{(2)T}) = \text{Var}(S_0 e^{\sum_{i=1}^n (r - \frac{1}{2}\sigma^2(t_i))\Delta t + \sigma(t_i)\sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}}) =$$

$$S_0^2 e^{2rT} \text{Var}(e^{\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2}\sigma^2(t_i)\Delta t + \sigma(t_i)\sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}})$$

如果 $E(\sum_{i=1}^n (r - \frac{1}{2}\sigma^2(t_i))\Delta t + \sigma(t_i)\sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i})$ 可以用

$$E(\sum_{i=1}^n (r - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2)\Delta t + \sigma^* \sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i})$$
 近似,其中,

$$\sigma^* = E(\sigma(t_{i,j})) = \frac{1}{m \times n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma(t_{i,j})$$

则有

$$E(S_{(2)T}) = E(S_0 e^{\sum_{i=1}^n (r - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2)\Delta t + \sigma^* \sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}}) =$$

$$S_0 e^{rT} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^*)^2 T} E(e^{\sum_{i=1}^n \sigma^* \sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}}) =$$

$$S_0 e^{rT} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^*)^2 T} e^{\frac{1}{2}(\sigma^*)^2 T} = S_0 e^{rT}$$

$$S_0 e^{rT} = E(S_{(1)T})$$

$$\text{Var}(S_{(2)T}) = \text{Var}(S_0 e^{\sum_{i=1}^n (r - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2)\Delta t + \sigma^* \sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}}) =$$

$$S_0^2 e^{2rT} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^*)^2 T} \text{Var}(e^{\sum_{i=1}^n \sigma^* \sqrt{\Delta t} \epsilon_{1,i}}) =$$

$$S_0^2 e^{2rT} (e^{(\sigma^*)^2 T} - 1)$$

即当 $\sigma_c^2 = (\sigma^*)^2$ 时有

$$\begin{cases} E(S_{(1)T}) = E(S_{(2)T}) \\ \text{Var}(S_{(1)T}) = \text{Var}(S_{(2)T}) \end{cases}$$

把满足上面结论的 σ_c 所确定的控制变量视为“最优控制”,对应的控制变量估计作为 GARCH 模型下方差互换产品的价格,此时的误差作为控制变量算法的误差.

3 数值计算模拟结果

对算控制变量算法进行数值实现,并验证定理 1 的最优化结果:即在 σ_c 的一个局部区域进行搜索,搜索出满足最优化问题

$$\max_{\sigma_c} \left\{ \frac{\text{Var}[V_j]}{\min\{\text{Var}[V_j(b)]\}} \right\}$$

的最优的常数波动率 σ_c^* , 比较 σ_c^* 与定理 1 所确定的 σ_c , 其中 $b^* = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Var}(X)}$, 用对应的样本点估计 \hat{b}_m .

根据方差互换的条款以及 GARCH 期权定价模型,取下列参数值进行数值实验: $M=1\ 000$, $r=0.05$, $n=1\ 000$, $T=1$, $S_0=10$, $\sigma_0^2=Y_0=0.15^2$, $\alpha_0=0.01$, $\alpha_1=0.005$, $\beta_1=0.5$, $\lambda=0.04$, $\gamma=0.3$.

由于敲定波动率 K_{Var} 是一个常数,对实验结果没有影响,所以假设 $K_{\text{Var}}=0$;对时间 $[0, T]$ 做 $n=1\ 000$ 次的离散,模拟 m 次数依次取 $1\ 000$ 、 $2\ 000$ 、 $5\ 000$ 、 $10\ 000$ 、 $15\ 000$ 、 $20\ 000$,进行 Monte Carlo 模拟计算;同时在常数波动率 σ_c 附近进行最优化搜索,取最优化搜索区间为 $[0.15-0.05, 0.15+0.05]$,以 $0.000\ 1$ 为步长,经过最优化搜索,得出一个使误差减小倍数最大时所对应的最优常数波动率 σ_c^* ,并与定理 1 计算推导所得的常数波动率进行比较.表 1 记录了当观察次数 $N=1$ 时,由 MATLAB 软件编程所得的一系列数值分析结果.

表中 σ_{cl} 表示由定理 1 推导所得的常数波动率, σ_c^* 表示经最优化搜索后所得的最优常数波动率, V 表示模拟出的方差互换产品的价格, S_{id} 表示蒙特卡洛模拟的误差, R 表示经过控制变量算法模拟加速之后的误差减小倍数, R^* 表示简单搜索得到的最优

波动率对应的模拟误差减小倍数.

表 1 $N=1$ 时的模拟结果

Tab.1 Simulation results for the case of $N=1$

m	σ_{c1}	σ_c^*	V	$S_{td}/10^{-3}$	R	R^*
1 000	0.142 4	0.142 2	20.77	0.216 1	126.23	126.54
2 000	0.142 4	0.142 2	20.77	0.108 7	135.68	136.31
5 000	0.142 4	0.142 3	20.77	0.044 6	129.95	130.07
10 000	0.142 4	0.142 3	20.77	0.022 3	127.66	127.77
15 000	0.142 4	0.142 3	20.77	0.015 0	126.61	126.71
20 000	0.142 4	0.142 3	20.77	0.011 2	126.98	127.08

由表中数据看出, Monte Carlo 控制变量法对于模型的加速效果相当明显, 加速后误差减小倍数在 126 左右, 大幅度减小模拟误差; 若不使用控制变量法要达到相同的误差减小倍数, 模拟次数需要增加到原来的 126^2 倍, 所以大幅提高了模拟效率. 而随着模拟次数的增加, 方差互换产品定价模型的模拟误差逐渐降低, 模拟出的标的资产价格 V 相对稳定 (误差小于 0.001), 这表明 Monte Carlo 模拟是有效、合理并且稳定的.

关于最优常数波动率的数值分析: σ_c^* 与 σ_{c1} 基本相等, 相差在 0.002 左右, 差距较小. 如当模拟次数 $m=1\ 000$ 时, 简单搜索得到的最优波动率 $\sigma_c^*=0.142\ 2$ 对应的误差减小倍数为 126.234 7, 本文推导出的波动率 $\sigma_{c1}=0.142\ 4$ 的误差减小倍数为 126.542 7, 差别很小, 几乎可以忽略不计. 因此可以认为经推导得出的常数波动率属于最优常数波动率的范畴.

此外, 根据实验模拟结果, 还发现了一些其他的结论. 如图 2 所示为模拟次数 $m=2\ 000$ 时方差减小倍数随着常数波动率 σ_c 设定值的变化而产生变化的函数图像. 可以看到, 函数图像是单峰对称分布的, 当常数波动率约为 0.142 2 时, 误差减小倍数最大, 在对称轴两侧快速递减; 当常数波动率以 0.142 2 为初始点减小或增大时, 方差减小倍数下降得很快, 常数波动率 ± 0.02 的变化引起误差减小倍数下降了 100 左右. 由此可见, 在 GARCH 模型下的方差互换产品定价模型中, 用控制变量法进行 Monte Carlo 模拟时, 常数波动率的取值对模拟加速效果影响很大, 微小的变化就能使方差减小倍数发生大变, 因此在模拟加速时应提升常数波动率取值的精度, 提高控制变量法的效率, 减小 Monte Carlo 模拟的模拟误差.

为更好进行比较, 表 2 记录了当观察次数 $N=10$ 时该 Monte Carlo 模拟控制变量法的 MATLAB 数值计算结果.

数值实验分析的结果表明: $N=10$ 时的模型变

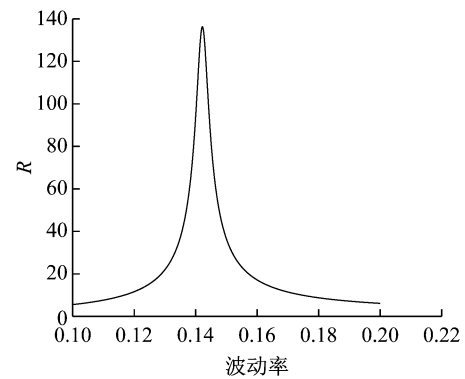


图 2 R 与波动率的关系 ($N=1, m=2\ 000$)

Fig.2 Relation between R and volatility ($N=1, m=2\ 000$)

表 2 $N=10$ 时的模拟结果

Tab.2 Simulation results for $N=10$

m	σ_{c1}	σ_c^*	V	$S_{td}/10^{-3}$	R	R^*
1 000	0.142 4	0.142 3	19.41	0.749 5	107.41	107.42
2 000	0.142 4	0.142 2	19.41	0.373 7	107.99	108.04
5 000	0.142 4	0.142 2	19.41	0.153 9	106.90	106.92
10 000	0.142 4	0.142 2	19.41	0.078 6	104.33	104.34
15 000	0.142 4	0.142 2	19.41	0.052 7	103.69	103.70
20 000	0.142 4	0.142 3	19.41	0.039 5	103.40	103.41

化规律与 $N=1$ 时的模型变化规律基本保持一致, 最优波动率均在 0.142 2 附近取到, 且经过推导得出的波动率和最优常数波动率都十分接近, 在可接受误差范围内. 在 $N=10$ 时, 模拟次数 m 分别为 1 000 和 2 000 时, 误差减小与常数波动率取值关系中, 和 $N=1$ 时的情况基本相同, 呈单峰对称分布且存在一个最优的常数波动率, 使得误差减小倍数达到最大, 见图 3.

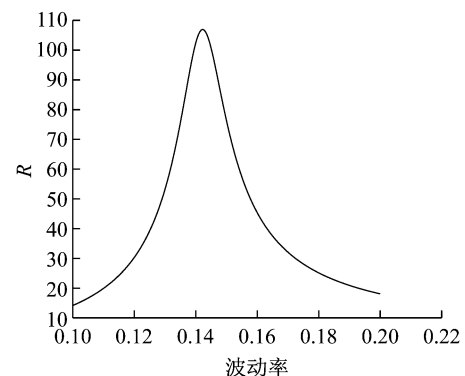


Fig.3 R 与波动率关系 ($N=10, m=2\ 000$)

Fig.3 Relation between R and volatility ($N=10, m=2\ 000$)

4 进一步的讨论

由上述可见, 使用 Black-Scholes 框架下的确定

常数波动率条件下的方差互换的价格作为控制变量,为 GARCH 模型下的方差互换产品进行加速模拟定价,取得了很好的效果.继续对上述算法进行改进,考虑使用分段常数波动率框架下的产品价格作为控制变量,对原 GARCH 随机波动率模型下的产品进行加速模拟定价.

考虑式(8)模型:

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_{ic} dB_t \quad (8)$$

式中: σ_{ic} 为在第 i 段时间点的波动率常数.同样考虑 n 等分时间段 $[0, T]$, $\Delta t = \frac{T}{n}$, $p = \frac{n}{N}$, 等分为 N 段, $k=1, 2, \dots, N$, 此时,在分段常数波动率模型下,标的资产的价格变化过程为

$$\begin{cases} S_{(1)}(t_0) = S_0 \\ S_{(1)}(t_{i+1}) = S_{(1)}(t_i) e^{\sum_{k=i+1}^{p(i+1)} (r - \frac{1}{2}\sigma_{i+1,c}^2)\Delta t} \cdot e^{\sum_{k=i+1}^{p(i+1)} \sigma_{i+1,c} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,i+1,k}} \end{cases} \quad (9)$$

GARCH 模型的价格变化过程为

$$\begin{cases} S_{(2)}(t_0) = S_0 \\ S_{(2)}(t_{i+1}) = S_{(2)}(t_i) e^{\sum_{k=i+1}^{p(i+1)} (r - \frac{1}{2}\sigma^2(t_i+k\Delta t))\Delta t} \cdot e^{\sum_{k=i+1}^{p(i+1)} \sigma(t_i+k\Delta t) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,i+1,k}} \end{cases} \quad (10)$$

式中: t_i 表示第 i 个观测点对应的时刻.

为确保原定价问题与模型(8)下的产品定价问题有较高的相关性,尽量使得两类标的过程(9)和(10)有较高的“相似性”,同样对两类标的过程的一阶矩和二阶矩进行分析,使得它们在任意观测点 t_i 上相等,得到下面的定理.

定理 2 当每一段的常数波动率满足

$$\sigma_{i,c}^2 = \frac{(E(\sigma(t_{j,i}))^2 t_i - (E(\sigma(t_{j,i-1})))^2 t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

时,可以保证过程(9)和(10)在 N 个观测点 $\{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ 的前两阶矩相等.其中 $\sigma(t_{j,i})$ 表示过程(10)的第 j 条路径上 $0 \sim t_i$ 之间所有时刻对应的波动率,且

$$E(\sigma(t_{j,i})) = \frac{1}{m \times ip} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{ip} \sigma(t_0 + k\Delta t)$$

证明 现证明过程(9)与(10)在每一个观测点的一阶矩和二阶矩相等,即期望与方差相等.

因为,若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$E(e^X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\text{Var}(e^X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$$

在观测点 t_1 , 过程(9)的前两阶矩为

$$E(S_{(1)}(t_1)) = E(S_0 e^{\sum_{k=1}^p (r - \frac{1}{2}\sigma_{1,c}^2)\Delta t + \sum_{k=1}^p \sigma_{1,c} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,1,k}}) =$$

$$S_0 e^{r t_1} E(e^{\sum_{k=1}^p (-\frac{1}{2}\sigma_{1,c}^2)\Delta t + \sum_{k=1}^p \sigma_{1,c} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,1,k}}) = S_0 e^{r t_2} E(e^{-\frac{1}{2}\sigma_{1,c}^2 t_1 + \sigma_{1,c} \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^p \varepsilon_{1,1,k}})$$

因为 $\varepsilon_{1,i,k} \sim N(0, 1)$, 所以 $\sigma_{1,c} \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^p (\varepsilon_{1,1,k}) \sim N(0, \sigma_{1,c}^2 t_1)$, 即

$$E(S_{(1)}(t_1)) = S_0 e^{r t_1} E(e^{-\frac{1}{2}\sigma_{1,c}^2 t_1 + \sigma_{1,c} \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^p \varepsilon_{1,1,k}}) = S_0 e^{r t_1} e^{-\frac{1}{2}\sigma_{1,c}^2 t_1} e^{\frac{1}{2}\sigma_{1,c}^2 t_1} = S_0 e^{r t_1}$$

$\text{Var}(S_{(1)}(t_1)) =$

$$\text{Var}(S_0 e^{\sum_{k=1}^p (r - \frac{1}{2}\sigma_{1,c}^2)\Delta t + \sum_{k=1}^p \sigma_{1,c} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,1,k}}) = S_0^2 e^{2r t_1} \text{Var}(e^{\sum_{k=1}^p (-\frac{1}{2}\sigma_{1,c}^2)\Delta t + \sum_{k=1}^p \sigma_{1,c} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,1,k}}) =$$

$$S_0^2 e^{2r t_1} e^{-\sigma_{1,c}^2 t_1} \text{Var}(e^{\sigma_{1,c} \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^p \varepsilon_{1,1,k}}) = S_0^2 e^{2r t_1} e^{-\sigma_{1,c}^2 t_1} e^{\sigma_{1,c}^2 t_1} (e^{\sigma_{1,c}^2 t_1} - 1) =$$

$$S_0^2 e^{2r t_1} (e^{\sigma_{1,c}^2 t_1} - 1)$$

在观测点 t_1 , 过程(10)的两阶矩为

$$E(S_{(2)}(t_1)) = E(S_0 e^{\sum_{k=1}^p (r - \frac{1}{2}\sigma^2(t_0+k\Delta t))\Delta t} \cdot$$

$$e^{\sum_{k=1}^p (\sigma(t_0+k\Delta t) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,1,k})}) =$$

$$S_0 E(e^{\sum_{k=1}^p r\Delta t + \sum_{k=1}^p (-\frac{1}{2}\sigma^2(t_0+k\Delta t))\Delta t} \cdot$$

$$e^{\sum_{k=1}^p (\sigma(t_0+k\Delta t) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,1,k})}) =$$

$$S_0 e^{r t_1} E(e^{\sum_{k=1}^p (-\frac{1}{2}\sigma(t_0+k\Delta t))\Delta t} \cdot$$

$$e^{\sum_{k=1}^p (\sigma(t_0+k\Delta t) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,1,k})}) =$$

$$\text{Var}(S_{(2)}(t_1)) = S_0^2 e^{2r t_1} \text{Var}(e^{\sum_{k=1}^p (-\frac{1}{2}\sigma^2(t_0+k\Delta t))\Delta t} \cdot$$

$$e^{\sum_{k=1}^p (\sigma(t_0+k\Delta t) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,1,k})})$$

如果期望 $E(e^{\sum_{k=1}^p (-\frac{1}{2}\sigma^2(t_0+k\Delta t))\Delta t} \cdot e^{\sum_{k=1}^p (\sigma(t_0+k\Delta t) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,1,k})})$

可以用 $E(e^{\sum_{k=1}^p (-\frac{1}{2}(E(\sigma(t_{j,1})))^2)\Delta t} \cdot e^{\sum_{k=1}^p (E(\sigma(t_{j,1})) \sqrt{\Delta t} \varepsilon_{1,1,k})})$ 近似,其中 $E(\sigma(t_{0,1}))$ 表示在 $0 \sim t_1$ 时刻之间所有时间点的波动率的期望,即

$$E(\sigma(t_{0,1})) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sigma(t_0 | k\Delta t)$$

此时有

$$E(S_{(2)}(t_1)) = S_0 e^{r t_1} E(e^{-\frac{1}{2}(E(\sigma(t_{j,1})))^2 t_1} \cdot$$

$$e^{E(\sigma(t_{j,1})) \sqrt{\Delta t} \sum_{k=1}^p \varepsilon_{1,1,k}}) =$$

$$S_0 e^{r t_1} e^{-\frac{1}{2}(E(\sigma(t_{j,1})))^2 t_1} e^{\frac{1}{2}(E(\sigma(t_{j,1})))^2 t_1} =$$

$$S_0 e^{r t_1} = E(S_{(1)}(t_1))$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_{(2)}(t_1)) &= S_0^2 e^{2r_1} \text{Var}\left(e^{\sum_{k=1}^p (-\frac{1}{2}\sigma^2(t_0+k\Delta)) \Delta} \cdot \right. \\ &\quad \left. e^{\sum_{k=1}^p (\sigma(t_0+k\Delta)\sqrt{\Delta\epsilon_{1,1,k}})}\right) = \\ &= S_0^2 e^{2r_1} \text{Var}\left(e^{\sum_{k=1}^p (-\frac{1}{2}E(\sigma(t_{j,1})))^2 \Delta} \cdot \right. \\ &\quad \left. e^{\sum_{k=1}^p (E(\sigma(t_{j,1}))\sqrt{\Delta\epsilon_{1,1,k}})}\right) = \\ &= S_0^2 e^{2r_1} e^{-E(\sigma(t_{j,1}))^2 t_1} \cdot \\ &\quad \text{Var}(e^{E(\sigma(t_{j,1}))\sqrt{\Delta\epsilon_{1,1,k}}} \sum_{k=1}^p \epsilon_{1,1,k}) = \\ &= S_0^2 e^{2r_1} e^{-E(\sigma(t_{j,1}))^2 t_1} \cdot \\ &\quad e^{-E(\sigma(t_{j,1}))^2 t_1} (e^{E(\sigma(t_{j,1}))^2 t_1} - 1) = \\ &= S_0^2 e^{2r_1} (e^{E(\sigma(t_{j,1}))^2 t_1} - 1) \end{aligned}$$

此时,当初始条件相等,且 $\sigma_{1,c} - E(\sigma(t_{j,1}))$ 时,可以保证

$$\begin{cases} E(S_{(2)}(t_1)) = E(S_{(1)}(t_1)) \\ \text{Var}(S_{(2)}(t_1)) = \text{Var}(S_{(1)}(t_1)) \end{cases}$$

同理,考虑观测点 t_2 , 有

$$\begin{cases} E(S_{(1)}(t_2)) = S_0 e^{r_2} \\ \text{Var}(S_{(1)}(t_2)) = S_0^2 e^{2r_2} (e^{-\sigma_{1,c}^2 t_1 - \sigma_{2,c}^2 (t_2 - t_1)} - 1) \end{cases}$$

且

$$\begin{cases} E(S_{(2)}(t_2)) = S_0 e^{r_2} E\left(e^{\sum_{k=1}^{2p} (-\frac{1}{2}\sigma^2(t_0+k\Delta)) \Delta} \cdot \right. \\ \quad \left. e^{\sum_{k=1}^{2p} (\sigma(t_0+k\Delta)\sqrt{\Delta\epsilon_{1,1,k}})}\right) \\ \text{Var}(S_{(2)}(t_2)) = S_0^2 e^{2r_2} \text{Var}\left(e^{\sum_{k=1}^{2p} (-\frac{1}{2}\sigma^2(t_0+k\Delta)) \Delta} \cdot \right. \\ \quad \left. e^{\sum_{k=1}^{2p} (\sigma(t_0+k\Delta)\sqrt{\Delta\epsilon_{1,1,k}})}\right) \end{cases}$$

如果期望 $E\left(e^{\sum_{k=1}^{2p} (-\frac{1}{2}\sigma^2(t_0+k\Delta)) \Delta} \cdot e^{\sum_{k=1}^{2p} (\sigma(t_0+k\Delta)\sqrt{\Delta\epsilon_{1,1,k}})}\right)$

可以用 $E\left(e^{\sum_{k=1}^{2p} (-\frac{1}{2}E(\sigma(t_{j,2})))^2 \Delta} \cdot e^{\sum_{k=1}^{2p} (E(\sigma(t_{j,2}))\sqrt{\Delta\epsilon_{1,1,k}})}\right)$ 近似,其中 $\sigma(t_{j,2})$ 表示第 j 条路径,在 $0 \sim t_2$ 时刻之间所有时间点的波动,即

$$E(\sigma(t_{j,2})) = \frac{1}{m \times 2p} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{2p} \sigma(t_0 + k\Delta t)$$

此时有

$$\begin{aligned} E(S_{(2)}(t_2)) &= S_0 e^{r_2} E\left(e^{\sum_{k=1}^{2p} (-\frac{1}{2}\sigma^2(t_0+k\Delta)) \Delta} \cdot \right. \\ &\quad \left. e^{\sum_{k=1}^{2p} (\sigma(t_0+k\Delta)\sqrt{\Delta\epsilon_{1,1,k}})}\right) = \\ &= S_0 e^{r_2} E\left(e^{\sum_{k=1}^{2p} (-\frac{1}{2}E(\sigma(t_{j,2})))^2 \Delta} \cdot \right. \\ &\quad \left. e^{\sum_{k=1}^{2p} (E(\sigma(t_{j,2}))\sqrt{\Delta\epsilon_{1,1,k}})}\right) = \\ &= S_0 e^{r_2} e^{-\frac{1}{2}E(\sigma(t_{j,2}))^2 t_2} \cdot e^{\frac{1}{2}E(\sigma(t_{j,2}))^2 t_2} = S_0 e^{r_2} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(S_{(2)}(t_2)) = S_0^2 e^{2r_2} \text{Var}\left(e^{\sum_{k=1}^{2p} (-\frac{1}{2}\sigma^2(t_0+k\Delta)) \Delta} \cdot \right.$$

$$\left. e^{\sum_{k=1}^{2p} (\sigma(t_0+k\Delta)\sqrt{\Delta\epsilon_{1,1,k}})}\right) =$$

$$S_0^2 e^{2r_2} (e^{-E(\sigma(t_{j,2}))^2 t_2} - 1)$$

当初始条件相等,为了保证在观测点 t_2 时刻前两阶矩相等,即

$$\begin{cases} E(S_{(2)}(t_2)) = E(S_{(1)}(t_2)) \\ \text{Var}(S_{(2)}(t_2)) = \text{Var}(S_{(1)}(t_2)) \end{cases}$$

则要求

$$-\sigma_{1,c}^2 t_1 - \sigma_{2,c}^2 (t_2 - t_1) = -E(\sigma(t_{0,2}))^2 t_2$$

即

$$\begin{aligned} \sigma_{2,c}^2 (t_2 - t_1) &= (E(\sigma(t_{j,2})))^2 t_2 - \sigma_{1,c}^2 t_1 = \\ &= (E(\sigma(t_{j,2})))^2 t_2 - (E(\sigma(t_{j,1})))^2 t_1 \end{aligned}$$

依此类推,继续考虑 N 个观测点,当满足

$\sigma_{i,c}^2 (t_i - t_{i-1}) = (E(\sigma(t_{j,i})))^2 t_i - (E(\sigma(t_{j,i-1})))^2 t_{i-1}$ 则可以保证在 N 个观测点的前两阶矩相等. 证毕.

再次利用与前文相同的初始条件进行数值模拟,并与常数波动率情形进行对比,另外模拟参数 $\alpha_1 = 0.005$.

在表 3 中, σ_c 表示分段最优常数波动率(考虑了分 $N=2$ 段和 $N=3$ 段的情况), R_c 表示分段最优常数波动率下误差减小倍数(相对于原始的 Monte Carlo 方法). 当 $m=1\ 000$ 时,分 $N=2$ 段的话,求出的两段最优波动率常数为:0.142 4 和 0.142 2,此时控制变量的误差减小倍数为 126.68;同样的,当 $m=1\ 000$ 时,分 $N=3$ 段的话,求出的三段最优波动率常数为:0.142 5,0.142 2 和 0.142 2,此时控制变量的误差减小倍数为 127.27. 从表 3 的结果比较中可以看出,分段波动率常数情形下的误差减小倍数相

表 3 常数波动率与分段常数波动率对比 ($\alpha_1 = 0.005$)

Tab.3 Constant volatility vs. piecewise constant volatility variance reduction comparison ($\alpha_1 = 0.005$)

m	σ_c^*	R_c^*	最优波动率常数	R_c
1 000	0.142 3	120.04	0.142 4	126.68
			0.142 2	
			0.142 5	127.27
			0.142 2	
			0.142 2	
			0.142 2	
5 000	0.142 3	127.45	0.142 4	129.46
			0.142 2	
			0.142 5	133.13
			0.142 2	
			0.142 2	
			0.142 2	
10 000	0.142 3	128.28	0.142 4	129.63
			0.142 2	
			0.142 5	132.20
			0.142 2	
			0.142 2	
			0.142 2	

比常数波动率情形有一定的改进,但改进的幅度并不是很大.分析其主要原因为:从 GARCH 模型产生的波动率序列的自相关函数逐渐趋于零,当分段考虑不同的波动率时,随着波动率序列的增多,每一段都相当于一个独立的满足过程,即每一段的序列期望值趋于相等,所以针对 GARCH 模型考虑分段常数波动率时,相比单个常数波动率情形时效果差别不是很大.

5 结论

通过使用 Monte Carlo 控制变量法对 GARCH 模型下的方差互换产品的定价问题进行了模拟,讨论了如何选取一个最优常数波动率.借助 Black-Scholes 模型下的解,选取控制变量使其与所求变量的相关度尽量高,推导出了一个选取最优常数波动率的公式: $\sigma_c = \frac{1}{m \times n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma(t_{i,j})$, 并使用最优化搜索法验证了所求得的常数波动率与最优的常数波动率误差很小,可以使 Monte Carlo 模拟的误差进一步减小,方差减小得尽可能大,达到了引进控制变量减小方差的目的.

数值分析的结果也表明:利用常数波动率下产品价格符合几何布朗运动的一个衍生品的价格作为控制变量,对 GARCH 模型下的方差互换产品定价是有成效的,推导出的公式也是合理且符合实际的.并且发现:控制变量模型中常数波动对方差减小的影响具有鲜明的数学特点,方差减小随常数波动率变化的图像呈单峰对称分布.这也为其他模型下对 Monte Carlo 控制变量法在期权定价中的运用提供了思路.最后,对常数波动率的情形进行了改进,用分段波动率常数的 Black-Scholes 模型去近似原 GARCH 模型,并给出了最优分段常数波动率的选取方法.

参考文献:

[1] RUBINSTEIN M. Nonparametric tests of alternative option pricing models using all reported trades and quotes on the 30 most active CBOE option classes from August 23 [J]. The

Journal of Finance, 1985, 40(2):455.

- [2] ANDERSEN L, ANDERSEN J. Jump diffusion processes: Volatility smile fitting and numerical methods for option pricing [J]. Review of Derivatives Research, 2000, 4(3):231.
- [3] BOLLERSLEV T. A conditionally heteroscedastic time series model for speculative prices and rates of return [J]. Review of Economics and Statistics, 1987, 69(3):542.
- [4] ENGLE F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation [J]. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1982, 50(4):987.
- [5] ROBERT E, DAVID L, RUSSELL P. Estimating time varying risk premia in the term structure: The Arch-M model [J]. Econometrica, 1987, 55(2):391.
- [6] NELSON B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach [J]. Econometrica, 1991, 59:347.
- [7] ZAKOIAN M. Threshold heteroscedastic models [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 1994, 18:931.
- [8] DUAN J. The GARCH option pricing model [J]. Mathematical Finance, 1995, 5:13.
- [9] DUAN J, SIMONATO J. Empirical martingale simulation for asset prices [J]. Management Science, 1998, 44:1218.
- [10] 邵斌,丁娟. GARCH 模型中美式亚式期权价值的蒙特卡罗模拟算法[J]. 经济数学, 2004, 2:141.
- SHAO Bin, DING Juan. Monte Carlo method for pricing American Asian option under GARCH model [J]. Economic Mathematics, 2004, 2:141.
- [11] DERMAN E, KAMAL M, ZHOU J, et al. A guide to volatility and variance swaps [J]. The Journal of Derivatives, 1999, 6(4):9.
- [12] CARR P, LEE R. Robust replication of volatility derivatives. [EB/OL]. [2018-03-01]. <http://www.math.nyu.edu/research/carrp/papers>.
- [13] SWISHCHUK A. Modeling of variance and volatility swaps for financial markets with stochastic volatilities [J]. [EB/OL]. [2018-05-01]. <http://math.ucalgary.ca/aswish/StochVolatSwap.pdf>.
- [14] ZHU S, LIAN G. A closed-form exact solution for pricing variance swaps with stochastic volatility [J]. Mathematical Finance, 2011, 21(2):233.
- [15] ZHU S, LIAN G. Analytically pricing volatility swaps under stochastic volatility [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2015, 288(2):332.
- [16] MA J, XU C. An efficient control variate method for pricing variance derivatives [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 235(1):108.
- [17] GLASSERMAN P. Monte Carlo methods in financial engineering[M]. [S.l.]: Springer, 2004.