

常方差弹性系数模型下波动率指数期权定价

马长福, 许 威

(同济大学 数学科学学院, 上海 200092)

摘要: 作为对冲市场波动率变动风险的波动率指数期权, 其定价问题一直受到广泛的关注. 为了对其进行定价, 首先构建服从常方差弹性系数模型的指数价格柳树, 然后根据指数价格柳树确定柳树节点上相应波动率指数的值从而得到波动率指数柳树, 最后在波动率指数柳树上运用倒向递归的方法得到波动率指数期权的价格. 所给出柳树法定价波动率指数期权的方法, 其结果随着柳树空间节点数的增加快速逼近嵌套蒙特卡罗模拟的结果, 当柳树空间节点数超过 200 时, 柳树法给出的结果具有相当高的精度.

关键词: 期权定价; 柳树法; 波动率指数; 常方差弹性系数模型

中图分类号: F830.9

文献标志码: A

Pricing Volatility Index Option in Constant Elasticity of Variance Model

MA Changfu, XU Wei

(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: As one of the most important tools to manage the risk of volatility, a lot of attention has been paid to volatility index options. In order to price these options, a willow tree of underlying index was built in the constant elasticity of variance model. Then, the value of volatility index at each node in the willow tree of underlying index was determined. Next, the willow tree of volatility index was used to price volatility index options by backward induction. Finally, an efficient way to price volatility index options was proposed. Numerical results show that the pricing results given by the willow tree are consistent with the results obtained from nested Monte Carlo simulation when the number of nodes on each time period in the willow tree is bigger than 200.

Key words: option pricing; willow tree method; volatility index; constant elasticity of variance model

波动率指数(volatility index, VIX)用于度量市场未来 1 个月的波动率, 又称为市场恐慌性指数, 指数值越高, 市场看空情绪越高. 1993 年, 芝加哥期权交易所首先公布了美股市场的波动率指数, 并联合高盛在 2003 年改进了波动率指数的计算方法. 随后, 芝加哥期权交易所在 2004 年 3 月 26 日推出波动率指数期货, 并在 2006 年 2 月 24 日推出波动率指数期权. 由于我国金融市场起步较晚, 直到 2015 年 2 月 9 日, 上海证券交易所才推出上证 50ETF 期权, 接着联合中证指数公司在 2016 年 11 月 28 日正式发布上证 50ETF 波动率指数(简称“中国波指”). 但是, 在中国波指发布 1 年后, 从 2018 年 2 月 14 日起, 中证指数公司停止发布中国波指. 目前国内投资者面对市场上的波动率风险只能通过构建上证 50ETF 期权投资组合的方式来跟踪波动率变化. 这一方式的跟踪误差较大且投资成本高. 同时中国的波动率产品主要在场外交易, 场内并不活跃. 随着市场的不断完善, 针对波动率指数衍生品的定价研究意义重大.

波动率指数的概念在研究文献中的首次出现要比 1993 年芝加哥期权交易所首次正式公布波动率指数要早得多. 1987 年全球金融危机后, Brenner 等^[1]指出投资者因为缺乏对冲市场波动率变化的工具而依旧暴露在市场波动率变化的风险中, 并且首次提出了波动率指数的概念. 1993 年, Whaley^[2]指出通过波动率指数衍生品可以有效对冲市场波动率风险. 2006 年, Carr 等^[3]分析了芝加哥期权交易所在 2003 年给出的新波动率指数和 1993 年的旧波动率指数的不同之处. 随着研究的进一步深入, 许多文献开始研究任意时刻 t 及任意期限 τ 的波动率指数. 将 t 时刻期限为 τ 的波动率指数记为 $VIX_{t,\tau}$, 其满足^[4-6]

$$VIX_{t,\tau}^2 = -\frac{2}{\tau} E_t^Q \left[\ln \frac{S_{t+\tau}}{S_t} - r\tau \right] \times 100^2 \quad (1)$$

收稿日期: 2019-12-24

第一作者: 马长福(1990—), 男, 博士生, 主要研究方向为金融数学. E-mail: 1410551@tongji.edu.cn

通信作者: 许 威(1978—), 男, 副教授, 博士生导师, 理学博士, 主要研究方向为金融数学. E-mail: wdxu@tongji.edu.cn

式中: S_t 是标普 500 指数在 t 时刻的值, $E_t^Q[\cdot]$ 表示在风险中性测度下基于 t 时刻信息求期望. 在此基础上对以 $VIX_{t,\tau}$ 为标的物的波动率指数期权定价问题受到了广泛的关注.

为了定价波动率指数期权, 研究者们建立了大量定价模型^[7-14]. 这些模型大致可以分为两类: 第一类, 直接从波动率指数出发构建模型^[7-10]; 第二类, 从指数价格出发构建指数价格服从的随机波动率模型, 再由式(1)确定波动率指数^[11-14]. 在第一类模型中, 由于直接对波动率指数建模并没有用到指数价格信息, 所以构建的模型无法保证波动率指数期权市场同相应的股票市场的一致性. 在第二类模型中, 间接建模保证了两个市场的一致性, 但为了刻画模型波动率的随机性, 往往需要构建双因子模型, 如 Heston 随机波动率模型^[11], 3/2 随机波动率模型^[12] 以及 4/2 随机波动率模型^[13]. 这些双因子模型无不面临模型参数难以估计的难题, Lin 等^[13] 用市场历史数据检验根据极大似然估计得到的参数估计值时发现, 均方误差均在 10% 以上.

本文在构建波动率指数期权定价模型时, 采用第二种类型的建模方法, 同时为了降低参数估计的难度, 采用 CEV 模型(constant elasticity of variance model)^[15] 来刻画指数价格, 其主要两大优势: 第一, 保证建立的模型能够反映波动率指数期权市场同对应股票市场的一致性; 第二, 其属于一维随机波动率模型, 在刻画波动率的随机性时, 不需要引进额外的过程, 同时也便于数值处理. 由于波动率指数期权的解析解难以求得, 本文将采用数值方法定价波动率指数期权. 常用的数值方法有蒙特卡罗模拟、有限差分及树方法. 由于 $VIX_{t,\tau}$ 是路径相关的, 采用蒙特卡罗模拟需要嵌套模拟, 这将带来庞大的计算量, 而有限差分方法并不适合这类强路径相关问题, 所以本文将采用柳树法对波动率指数期权定价. 通过柳树结构估计期权到期时刻的 $VIX_{t,\tau}$ 值, 解决了波动率指数的估计中涉及基于未来时刻的信息计算条件期望的难题. 数值实验部分给出柳树法和蒙特卡罗模拟的比较, 结果显示柳树法给出的价格能够很快收敛到蒙特卡罗模拟的结果, 且其计算效率要明显高于蒙特卡罗模拟.

1 指数价格柳树的构建

假设指数价格 S_t 服从如下 CEV 模型:

$$dS_t = rS_t dt + \alpha S_t^\gamma dW_t \quad (2)$$

式中: r 为无风险利率; σ 为波动项系数; γ 为方差弹性系数; dW_t 为标准布朗运动增量. 在构建指数价格柳树前, 先简单介绍柳树法.

柳树法最初由 Curran^[16] 提出, 并经由 Xu 等^[17] 进一步改进并推广, 如 CIR 模型(Cox-Ingersoll-Ross model)^[18], Merton 跳扩散模型^[19] 等. 构建柳树有两个步骤: 确定柳树中每个节点的值和计算任意两个相邻节点间的转移概率. 图 1 是一个 3 时段 4 节点的柳树结构示意图. 从图中可以看到时间区间 $[0, t_3]$ 被划分为 3 个时间子区间, 除 0 时刻外, 每个时刻柳树都有 4 个节点. 以 t_2 时刻从上至下第 3 个节点为例, S_3^2 表示 t_2 时刻第 3 个节点的指数价格(下文用 S_i^n 代表 t_n 时刻从上至下第 i 个节点的指数价格). 图中相邻节点间的连线表示前一个节点可以向后一个节点转移.

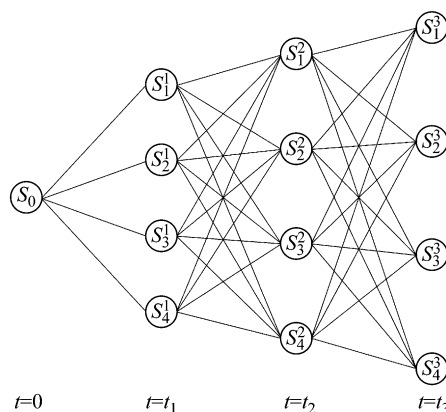


图 1 3 时段 4 节点指数价格柳树示意图

Fig.1 A willow tree structure with 3 time steps and 4 possible index prices at each time step

构建 CEV 模型下的 S_t 柳树需要确定柳树在每个节点的值以及相邻节点间的转移概率. 首先将时间区间 $[0, T]$ 等分成 N 个子区间, 时间节点记为 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$, 满足 $t_i = i\Delta t, \Delta t = T/N$. 由于过程(2)无法直接得到 S_t 的解析式, 故先做变换, 令

$$X_t = S_t^{2(1-\gamma)} \quad (3)$$

根据伊藤引理, 易得

$$dX_t = 2(1-\gamma) \left(rX_t + \frac{(1-2\gamma)\sigma^2}{2} \right) dt + 2(1-\gamma)\sigma \sqrt{X_t} dW_t$$

即 X_t 服从 CIR 模型, 其柳树节点的确定方法可以参考文献[18]. 首先在标准正态分布上选取 m 个离散样本点^[17], 记为 $Z_i (i=1, 2, \dots, m)$. 记 t_n 时刻 X_{t_n} 分布的离散取值点为 $X_i^n (i=1, 2, \dots, m)$, 根据 Johnson Curve 逆变换^[20], 将 Z_i 转换成 X_{t_n} 的离散取值点

X_i^n , 即

$$X_i^n = k_3 + k_4 g^{-1} \left(\frac{Z_i - k_1}{k_2} \right)$$

式中: k_1, k_2, k_3, k_4 、函数 g^{-1} 由 X_{i_n} 的一到四阶矩确定^[18,21]. 确定 X_i^n 的值后, 由式(3)可得

$$S_i^n = (X_i^n)^{\frac{1}{2-\gamma}}$$

式中: $i=1, 2, \dots, m; n=1, 2, \dots, N$. 确定指数价格柳树节点值后, 还需要确定柳树的转移概率.

根据 Ingber 的结果^[22], 假设 S_t 服从如下过程:

$$dS_t = f(S_t)dt + g(S_t)dW_t$$

当 Δt 足够小时, 在给定 S_t 的条件下, $S_{t+\Delta t}$ 的条件密度函数如下:

$$p(S_{t+\Delta t} | S_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi g^2(S_t)\Delta t}} e^{-\frac{(S_{t+\Delta t} - S_t - f(S_t)\Delta t)^2}{2g^2(S_t)\Delta t}}$$

记 S_i^n 向 S_j^{n+1} 转移的概率为 p_{ij}^n . p_{ij}^n 可由在 $S_{i_n} = S_i^n$ 的条件下, $S_{i_{n+1}}$ 落在 S_j^{n+1} 附近一定区域的概率估计. 本文取 $S_{i_{n+1}}$ 落在 S_j^{n+1} 同相邻两个节点的中点构成区间的概率估计 p_{ij}^n , 即

$$p_{ij}^n = P\{C_j^{n+1} < S_{i_{n+1}} \leq C_{j+1}^{n+1} | S_i = S_i^n\} = \int_{C_j^{n+1}}^{C_{j+1}^{n+1}} p(x | S_i = S_i^n) dx$$

式中: $C_j^{n+1} = (S_{j-1}^{n+1} + S_j^{n+1})/2, j=2, \dots, m$. 特别地, $C_1^{n+1} = 0, C_m^{n+1} = +\infty$. 故 t_n 时刻柳树的转移概率矩阵为 $\mathbf{P}^n = [p_{ij}^n]_{m \times m}$.

同理, t_0 时刻 S_0 到 S_j 的转移概率 p_j^0 为

$$p_j^0 = P\{C_j^1 < S_{i_1} \leq C_{j+1}^1 | S_0\} = \int_{C_j^1}^{C_{j+1}^1} p(x | S_0) dx$$

故 t_0 时刻柳树的转移概率矩阵为 $\mathbf{P}^0 = [p_j^0]_{1 \times m}$.

2 波动率指数估计及其期权定价

2.1 通过指数价格柳树估计波动率指数

由式(1)可知, 为了计算 $VIX_{t,\tau}$ 需要计算条件期望 $E_t^Q[\ln S_{t+\tau} - \ln S_t - r\tau]$. 通过上文构建的指数价格柳树来估计这一条件期望. 将时间区间 $[0, t+\tau]$ 等分成 N_2 个时间子区间, 则时间子区间长度为 $\Delta t = (t+\tau)/N_2$, 子区间节点记为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_1} = t < t_{N_1+1} < \dots < t_{N_2} = t+\tau$, 满足 $t_i = i\Delta t$. 首先构建具有 N_2 个时段, 每个时段有 m 个节点的指数价格柳树. 由建立的指数价格柳树, 在 t 时刻, S_t 共有 m 个可能的取值, 为 $S_i^{N_1} (i=1, 2, \dots, m)$. 任取 i , 考虑 S_t 取第 i 个可能值 $S_i^{N_1}$ 的条件下, $E_t^Q[\ln S_{t+\tau} - \ln S_t - r\tau]$ 的估计, 易得

$$E_t^Q[\ln S_{t+\tau} - \ln S_t - r\tau] =$$

$$E^Q[\ln S_{t+\tau} - \ln S_t - r\tau | S_t = S_i^{N_1}] =$$

$$E^Q[\ln S_{t+\tau} | S_t = S_i^{N_1}] - \ln S_i^{N_1} - r\tau \quad (4)$$

由式(4), 计算 $E_t^Q[\ln S_{t+\tau} - \ln S_t - r\tau]$ 只需要计算 $E^Q[\ln S_{t+\tau} | S_t = S_i^{N_1}]$. 在 $t+\tau$ 时刻, $S_{t+\tau}$ 共有 m 个可能的取值, 即 S_t 从节点 $S_i^{N_1}$ 演化会有 m 种可能, 分别为 $S_i^{N_1} \rightarrow \dots \rightarrow S_j^{N_2} (j=1, 2, \dots, m)$. 记 $P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} | S_t = S_i^{N_1}\}$ 为 $S_i^{N_1} \rightarrow \dots \rightarrow S_j^{N_2}$ 发生的条件概率, 则 $E^Q[\ln S_{t+\tau} | S_t = S_i^{N_1}]$ 满足

$$E^Q[\ln S_{t+\tau} | S_t = S_i^{N_1}] =$$

$$\sum_{j=1}^m P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} | S_t = S_i^{N_1}\} \ln S_j^{N_2} \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 可得在 t 时刻 $S_t = S_i^{N_1}$ 条件下

$$E_t^Q[\ln S_{t+\tau} - \ln S_t - r\tau] =$$

$$\sum_{j=1}^m P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} | S_t = S_i^{N_1}\} \ln S_j^{N_2} - \ln S_i^{N_1} - r\tau \quad (6)$$

故在 $S_t = S_i^{N_1}$ 条件下 $E_t^Q[\ln S_{t+\tau} - \ln S_t - r\tau]$ 只与 $P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} | S_t = S_i^{N_1}\} (j=1, 2, \dots, m)$ 有关.

首先, 对 $S_i^{N_1} \rightarrow \dots \rightarrow S_j^{N_2}$ 任意一条可能的路径计算其概率, 例如考虑这样一条演化路径: $S_i^{N_1} \rightarrow S_{k_1}^{N_1+1} \rightarrow S_{k_2}^{N_1+2} \rightarrow \dots \rightarrow S_{k_l}^{N_1+l} \rightarrow S_j^{N_2}$, 其中 $l = N_2 - N_1 - 1$. 由指数价格柳树的转移概率矩阵可得

$$P\{S_i^{N_1} \rightarrow S_{k_1}^{N_1+1} \rightarrow S_{k_2}^{N_1+2} \rightarrow \dots \rightarrow S_{k_l}^{N_1+l} \rightarrow S_j^{N_2}\} =$$

$$p_{ik_1}^{N_1} \left(\prod_{n=1}^{l-1} p_{k_n k_{n+1}}^{N_1+n} \right) p_{k_l j}^{N_1+l}$$

考虑 S_t 从 $S_i^{N_1}$ 出发到节点 $S_j^{N_2}$ 所有可能路径, 并将每一条路径的概率相加即得到

$$P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} | S_t = S_i^{N_1}\} =$$

$$\sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \dots \sum_{k_l=1}^m p_{ik_1}^{N_1} \left(\prod_{n=1}^{l-1} p_{k_n k_{n+1}}^{N_1+n} \right) p_{k_l j}^{N_1+l} \quad (7)$$

在 t_n 时刻, 给定 $S_{i_n} = S_i^n, S_{i_n}$ 由 S_i^n 向 t_{n+1} 时刻的 m 个节点转移的概率为转移概率矩阵 \mathbf{P}^n 的第 i 行, 令 m 维列向量 \mathbf{p}_i^n 为转移概率矩阵 \mathbf{P}^n 的第 i 行的转置, 即 $\mathbf{p}_i^n = (p_{i1}^n, p_{i2}^n, \dots, p_{im}^n)^T$. 在 t_{n+1} 时刻, 给定 $S_{i_{n+1}} = S_j^{n+1}, S_{i_n}$ 由 t_n 时刻的 m 个节点向 S_j^{n+1} 转移的概率为转移概率矩阵 \mathbf{P}^n 的第 j 列, 令 m 维列向量 \mathbf{q}_j^n 为转移概率矩阵 \mathbf{P}^n 的第 j 列, 即 $\mathbf{q}_j^n = (p_{1j}^n, p_{2j}^n, \dots, p_{mj}^n)^T$. 则有

定理 1 在具有 N_2 个时段, 每个时段有 m 个节点的指数价格柳树上, $t=t_{N_1}$ 时刻 S_t 从节点 $S_i^{N_1}$ 转移到 $t+\tau$ 时刻节点 $S_j^{N_2}$ 的概率可由下式计算:

$$P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} | S_t = S_i^{N_1}\} = (\mathbf{p}_i^{N_1})^T \left(\prod_{k=1}^{l-1} \mathbf{P}^{N_1+k} \right) \mathbf{q}_j^{N_1+l} \quad (8)$$

证明 由式(7)提取最内层求和项的公因式,可得

$$P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} \mid S_t = S_i^{N_1}\} = \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \cdots \sum_{k_{l-1}=1}^m p_{ik_1}^{N_1} \left(\prod_{n=1}^{l-2} p_{k_n k_{n+1}}^{N_1+n} \right) \sum_{k_l=1}^m p_{k_{l-1} k_l}^{N_1+l-1} p_{k_l j}^{N_1+l} \quad (9)$$

又

$$\sum_{k_l=1}^m p_{k_{l-1} k_l}^{N_1+l-1} p_{k_l j}^{N_1+l} = (\mathbf{p}_{k_{l-1}}^{N_1+l-1})^T \mathbf{q}_j^{N_1+l} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)得

$$P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} \mid S_t = S_i^{N_1}\} = \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \cdots \sum_{k_{l-1}=1}^m p_{ik_1}^{N_1} \left(\prod_{n=1}^{l-2} p_{k_n k_{n+1}}^{N_1+n} \right) (\mathbf{p}_{k_{l-1}}^{N_1+l-1})^T \mathbf{q}_j^{N_1+l} \quad (11)$$

提取式(11)最内层求和项的公因式,可得

$$P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} \mid S_t = S_i^{N_1}\} = \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \cdots \sum_{k_{l-2}=1}^m p_{ik_1}^{N_1} \left(\prod_{n=1}^{l-3} p_{k_n k_{n+1}}^{N_1+n} \right) \cdot \sum_{k_{l-1}=1}^m p_{k_{l-2} k_{l-1}}^{N_1+l-2} (\mathbf{p}_{k_{l-1}}^{N_1+l-1})^T \mathbf{q}_j^{N_1+l} \quad (12)$$

又

$$\sum_{k_{l-1}=1}^m p_{k_{l-2} k_{l-1}}^{N_1+l-2} (\mathbf{p}_{k_{l-1}}^{N_1+l-1})^T \mathbf{q}_j^{N_1+l} = (\mathbf{p}_{k_{l-2}}^{N_1+l-2})^T \mathbf{P}^{N_1+l-1} \mathbf{q}_j^{N_1+l} \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)

$$P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} \mid S_t = S_i^{N_1}\} = \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \cdots \sum_{k_{l-2}=1}^m p_{ik_1}^{N_1} \left(\prod_{n=1}^{l-3} p_{k_n k_{n+1}}^{N_1+n} \right) (\mathbf{p}_{k_{l-2}}^{N_1+l-2})^T \mathbf{P}^{N_1+l-1} \mathbf{q}_j^{N_1+l}$$

同理,不断提取最内层求和项的公因式,可得

$$P\{S_{t+\tau} = S_j^{N_2} \mid S_t = S_i^{N_1}\} = \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \cdots \sum_{k_{l-3}=1}^m p_{ik_1}^{N_1} \left(\prod_{n=1}^{l-4} p_{k_n k_{n+1}}^{N_1+n} \right) \sum_{k_{l-2}=1}^m p_{k_{l-3} k_{l-2}}^{N_1+l-3} \cdot (\mathbf{p}_{k_{l-2}}^{N_1+l-2})^T \mathbf{P}^{N_1+l-1} \mathbf{q}_j^{N_1+l} = \sum_{k_1=1}^m \sum_{k_2=1}^m \cdots \sum_{k_{l-3}=1}^m p_{ik_1}^{N_1} \left(\prod_{n=1}^{l-4} p_{k_n k_{n+1}}^{N_1+n} \right) (\mathbf{p}_{k_{l-3}}^{N_1+l-3})^T \cdot \mathbf{P}^{N_1+l-2} \mathbf{P}^{N_1+l-1} \mathbf{q}_j^{N_1+l} \cdots = \sum_{k_1=1}^m p_{ik_1}^{N_1} (\mathbf{p}_{k_1}^{N_1+1})^T \left(\prod_{k=2}^{l-1} \mathbf{P}^{N_1+k} \right) \mathbf{q}_j^{N_1+l} = (\mathbf{p}_i^{N_1})^T \left(\prod_{k=1}^{l-1} \mathbf{P}^{N_1+k} \right) \mathbf{q}_j^{N_1+l}$$

根据定理 1 将式(8)代入式(6),在 $S_t = S_i^{N_1}$ 条件下,有

$$E_t^Q[\ln S_{t+\tau} - \ln S_t - r\tau] = \sum_{j=1}^m (\mathbf{p}_i^{N_1})^T \left(\prod_{k=1}^{l-1} \mathbf{P}^{N_1+k} \right) \mathbf{q}_j^{N_1+l} \ln S_j^{N_2} - \ln S_i^{N_1} - r\tau \quad (14)$$

令 $\mathbf{s}^{N_2} = (\ln S_1^{N_2}, \ln S_2^{N_2}, \dots, \ln S_m^{N_2})^T$ 为 m 维列向量,则式(14)可以整理为

$$E_t^Q[\ln S_{t+\tau} - \ln S_t - r\tau] = (\mathbf{p}_i^{N_1})^T \left(\prod_{k=1}^l \mathbf{P}^{N_1+k} \right) \mathbf{s}^{N_2} - \ln S_i^{N_1} - r\tau \quad (15)$$

根据式(1)给出的波动率指数的定义,记 $S_i^{N_1}$ 对应的波动率指数为 $VIX_i^{N_1}$,则在 $S_t = S_i^{N_1}$ 条件下

$$VIX_i^{N_1} = \sqrt{-\frac{2}{\tau} E_t^Q \left[\ln \frac{S_{t+\tau}}{S_t} - r\tau \right]} \times 100 \quad (16)$$

将式(15)代入式(16),可得

$$VIX_i^{N_1} = \sqrt{-\frac{2}{\tau} \left((\mathbf{p}_i^{N_1})^T \left(\prod_{k=1}^l \mathbf{P}^{N_1+k} \right) \mathbf{s}^{N_2} - \ln S_i^{N_1} - r\tau \right)} \times 100 \quad (17)$$

遍历指数价格柳树,即可得到波动率指数柳树。

2.2 柳树法定价波动率指数期权

假设需要定价的波动率指数期权是以 $VIX_{t,\tau}$ 为标的物的敲定价为 K 的欧式看涨(看跌)期权,且期权的到期日为 T 时刻.将时间区间 $[0, T+\tau]$ 等分成 N_2 个时间子区间,则每个时间子区间的长度为 $\Delta t = (T+\tau)/N_2$,时间子区间的节点为 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_1} = T < t_{N_1+1} < \dots < t_{N_2} = T+\tau$,满足 $t_i = i\Delta t$,根据前面介绍的方法构建 $[0, T]$ 的波动率指数柳树.然后采用倒向递归的方式计算波动率指数期权的价格.

在 T 时刻期权到期,在节点 $VIX_i^{N_1}$ 的支付为

$$V_i^{N_1} = \begin{cases} (VIX_i^{N_1} - K)^+, & \text{看涨} \\ (K - VIX_i^{N_1})^+, & \text{看跌} \end{cases}$$

在 t_n ($n = N_1 - 1, N_1 - 2, \dots, 1$) 时刻,波动率指数期权在节点 VIX_i^n 的价值 V_i^n 可由 t_{n+1} 时刻期权价值 V_k^{n+1} 根据转移概率 p_{ik}^n 加权平均并贴现得到

$$V_i^n = e^{-r\Delta t} \sum_{k=1}^m p_{ik}^n V_k^{n+1}$$

易得,在 t_0 时刻,波动率指数期权的价值为

$$V_0 = e^{-r\Delta t} \sum_{k=1}^m p_k^0 V_k^1$$

3 数值实验

由于没有解析解,故采用嵌套蒙特卡罗模拟的结果进行对比.在蒙特卡罗模拟时需要进行嵌套模拟,首先模拟生成 10 000 条从 0 时刻到期权到期日 T 时刻的指数价格路径,接着对生成的每一条路径进行内层蒙特卡罗模拟,生成 100 000 条从期权到期日 T 到时刻 $T+\tau$ 的指数价格路径.内层模拟的路

径将用于估计 $E_T^Q[\ln(S_{T+\tau}/S_T) - r\tau]$, 然后由式(1)计算出相应路径的 $VIX_{T,\tau}$. 根据内层模拟得到的 $VIX_{T,\tau}$, 可以计算该条路径上波动率指数期权的价格, 对外层模拟的 10 000 条路径的波动率指数期权的价格取平均值, 将平均值作为嵌套蒙特卡罗模拟得到的波动率指数期权价格. 将嵌套蒙特卡罗模拟(10 000 次外层模拟和 100 000 次内层模拟)得到的波动率指数期权价格作为参照基准.

数值实验只对欧式看涨波动率指数期权进行定价. 假设需要定价的波动率指数期权是以 $VIX_{t,\tau}$ 为标的物的敲定价为 K 、到期日为 T 的欧式看涨波动率指数期权. 在接下来的所有数值实验中, 令欧式看涨波动率指数期权的到期日 $T=0.5$, 敲定价为 $K=20$, 波动率指数的期限 $\tau=1/12$, 且将时间步长定为 $\Delta t=1/360$. 表 1 给出了数值实验中的一组模型参数的设定.

表 1 CEV 模型参数

Tab.1 Parameters in CEV model

参数	取值	描述
r	0.03	无风险利率
S_0	100	初始指数值
σ	2	CEV 过程波动率系数
γ	0.6	CEV 过程方差弹性系数

为了研究 m 取值对定价的影响, 图 2 给出了在 m 取不同值时柳树法定价结果和运算时间. 当 m 取值超过 200 时, 柳树法给出的期权价格在 11.82 附近波动, 随着 m 的增大而趋于 11.82. 固定嵌套蒙特卡罗模拟的外层模拟次数为 10 000 次, 图 3 给出了不同的内层模拟路径数下的模拟结果. 随着内层模拟次数的增加模拟结果逐渐趋于稳定, 在内层模拟次数超过 70 000 次时, 期权价格在 11.80 附近波动. 结合图 2 和图 3, 可以发现, 当柳树的空间节点数足够大以及嵌套蒙特卡罗内层模拟的次数足够大时, 两种定价方法给出的结果相当接近. 如当 m 取 250 时, 柳树法的定价结果为 11.828, 计算时间为 3.191 s, 当内层模拟次数设为 100 000 时, 嵌套蒙特卡罗模拟的结果为 11.813, 模拟的标准差为 0.032, 计算时间为 2 408.671 s. 以嵌套蒙特卡罗模拟的结果 11.813 为标准, 其 99% 的置信区间为 [11.731, 11.895], 当 m 取 250 时, 柳树法给出的期权价格落在嵌套蒙特卡罗模拟结果的 99% 置信区间内, 且其定价误差仅为 0.13%, 而运算时间约为嵌套蒙特卡罗模拟的 0.1%. 通过对比发现, 柳树法定价波动率指数期权的效率相比嵌套蒙特卡罗模拟有大幅提高. 同时, 由图 2 可以发现, 当 m 取 250 时, 柳树法给

出的波动率指数期权的价格已经相当接近嵌套蒙特卡罗模拟的结果, 具有相当高的精度. 所以在接下来的数值实验中, 令 m 取 250.

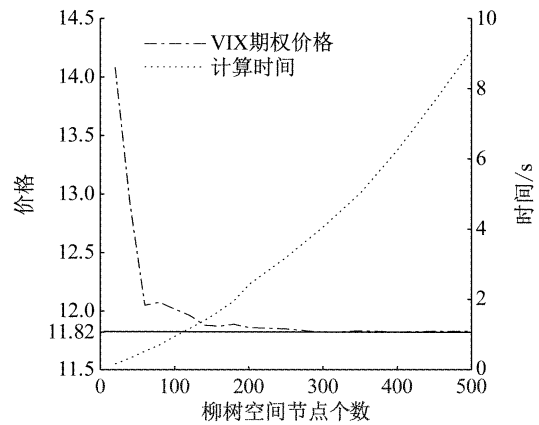


图 2 m 取不同值时柳树法定价结果

Fig.2 Pricing results at different values of m of the willow tree

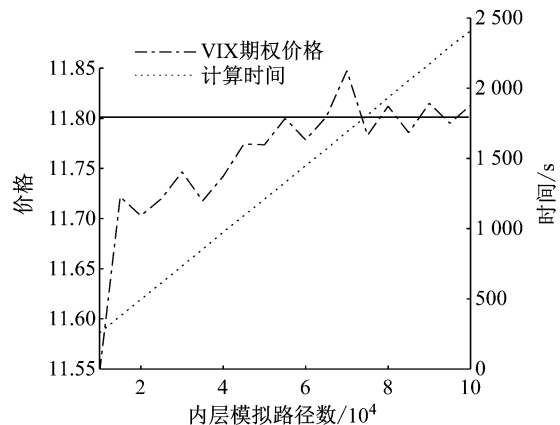


图 3 内层模拟路径数取不同值时嵌套蒙特卡罗模拟的定价结果

Fig.3 Pricing results of nested Monte Carlo at different numbers of nested paths

接下来, 将给出在 4 组不同的参数设定下柳树法的定价结果, 同时也给出嵌套蒙特卡罗模拟的定价结果, 并将其作为参照标准. 4 组参数的设定见表 2. 在参数的设计中, 考虑了不同的初始价格、波动率系数和方差弹性系数的组合. 表 3 给出了这 4 组参数设定下柳树法和嵌套蒙特卡罗模拟得到的期权价格, 其中嵌套蒙特卡罗模拟的结果中也给出了模拟的标准差(括号内数值). 表 3 给出的结果显示两种方法给出的价格非常接近, 相对误差(以嵌套蒙特卡罗模拟结果为标准)保持在 1% 以内, 柳树法给出的期权价格落在嵌套蒙特卡罗模拟结果的 99% 置信区间内(蒙特卡罗模拟结果加减 2.576 个标准差). 而表 3 给出的计算时间显示, 柳树法所需时间不到嵌

套蒙特卡罗模拟需要时间的 0.2%,柳树法的计算效率要远远优于嵌套蒙特卡罗模拟。

表 2 4 组 CEV 模型参数设定

Tab.2 Four groups of parameters for CEV model

组号	CEV 参数设定			
	S_0	γ	σ	r
第 1 组	100	0.60	2.0	0.03
第 2 组	100	0.85	0.6	0.03
第 3 组	200	0.70	1.5	0.03
第 4 组	50	0.75	0.8	0.03

表 3 4 组 CEV 模型参数下的定价结果

Tab.3 Pricing results of four groups of parameters in CEV model

组号	期权价格		计算时间/s		相对误差/%
	柳树法	蒙特卡罗模拟	柳树法	蒙特卡罗模拟	
第 1 组	11.828	11.778(0.031)	3.498	2 413.207	0.42
第 2 组	10.005	9.960(0.024)	3.254	2 400.446	0.45
第 3 组	10.625	10.582(0.023)	3.038	2 396.534	0.40
第 4 组	10.084	10.030(0.019)	3.055	2 401.415	0.54

4 结论

本文给出了 CEV 模型下波动率指数期权的柳树法定价方法。通过 CEV 模型刻画指数价格保证了建立的模型能够保持股票市场和波动率指数期权市场的一致性,同时相比二维随机波动率模型,CEV 模型的方差弹性系数使模型的波动率保持随机性的前提下可以简化参数估计问题,且更易于运用。

首次将数值方法柳树法运用于 CEV 模型下波动率指数期权定价问题。在无法得到波动率指数期权解析解的情况下,给出了一种定价波动率指数期权的高效数值算法。同嵌套蒙特卡罗模拟相比,柳树法定价波动率指数期权的效率大大提高。本文创新性地提出根据柳树结构估计波动率指数的方法,解决了在估计未来某时刻波动率指数时需要基于该时刻信息计算条件期望的问题,大大提高了计算效率,避免了蒙特卡罗模拟时需要嵌套模拟的问题。

参考文献:

[1] BRENNER M, GALAI D. New financial instruments for hedging changes in volatility [J]. *Financial Analysts Journal*, 1989, 45(4):61.

[2] WHALEY R E. Derivatives on market volatility: hedging tools long overdue [J]. *The Journal of Derivatives*, 1993, 1(1):71.

[3] CARR P, WU L. A tale of two indices [J]. *The Journal of Derivatives*, 2006, 13(3):13.

[4] LIN Y N. Pricing VIX futures: evidence from integrated physical and risk-neutral probability measures [J]. *The Journal of Futures Markets*, 2007, 27(12):1175.

[5] DUAN J C, YEH C Y. Jump and volatility risk premiums implied by VIX [J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2010, 34(11):2232.

[6] LUO X G, ZHANG J. The term structure of VIX [J]. *Journal of Futures Markets*, 2012, 32(12):1092.

[7] MENCÍA J, SENTANA E. Valuation of VIX derivatives [J]. *Journal of Financial Economics*, 2013, 108(2):367.

[8] GOARD J, MAZUR M. Stochastic volatility models and the pricing of VIX options [J]. *Mathematical Finance*, 2013, 23(3):439.

[9] LIU H K. Properties of American volatility options in the mean-reverting 3/2 volatility model [J]. *Siam Journal on Financial Mathematics*, 2015, 6(1):53.

[10] DETEMPLE J, KITAPBAYEV Y. On American VIX options under the generalized 3/2 and 1/2 models [J]. *Mathematical Finance*, 2018, 28(2):550.

[11] LIAN G H, ZHU S P. Pricing VIX options with stochastic volatility and random jumps [J]. *Decisions in Economics & Finance*, 2013, 36(1):71.

[12] BALDEAUX J, BADRAN A. Consistent modelling of VIX and equity derivatives using a 3/2 plus jumps model [J]. *Applied Mathematical Finance*, 2014, 21(4):299.

[13] LIN W, LI S H, LUO X G, *et al.* Consistent pricing of VIX and equity derivatives with the 4/2 stochastic volatility plus jumps model [J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2017, 447(2):778.

[14] GUO I, LOEPER G. Pricing bounds for VIX derivatives via least squares Monte Carlo [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2018, 179:598.

[15] COX J. Notes on option pricing I: constant elasticity of variance diffusions [J]. *Journal of Portfolio Management*, 1996, 22:15.

[16] CURRAN M. Willow power: optimizing derivative pricing trees [J]. *Algo Research Quarterly*, 2001, 4(4):15.

[17] XU W, HONG Z W, QIN C X. A new sampling strategy willow tree method with application to path-dependent option pricing [J]. *Quantitative Finance*, 2013, 13(6): 861.

[18] WANG G G, XU W. A unified willow tree framework for one-factor short-rate models [J]. *The Journal of Derivatives*, 2018, 25(3):33.

[19] XU W, YIN Y F. Pricing American options by willow tree method under jump-diffusion process [J]. *The Journal of Derivatives*, 2014, 22(1):46.

[20] JOHNSON N L. Systems of frequency curves generated by methods of translation [J]. *Biometrika*, 1949, 36: 149.

[21] HILL I D, HILL R, HOLDER R L. Algorithm as 99: fitting Johnson curves by moments [J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 1976, 25(2):180.

[22] INGBER L, CHEN C, MONDESCU R P, *et al.* Probability tree algorithm for general diffusion processes [J]. *Physical Review E*, 2001, 64(5):056702.