

在粘性解框架下的企业碳减排技术最佳引进时间模型

陈亦令, 黄文琳, 梁 进

(同济大学 数学科学学院, 上海 200092)

摘要: 运用实物期权理论, 在碳排放率和技术成本双重不确定性因素下, 考虑技术维护成本, 探究了企业碳减排技术最佳引进时间问题, 并将优化问题转为求解一个 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程的变分不等式问题。在粘性解框架下, 证明了值函数是该问题的唯一粘性解。展示了数值模拟结果, 并讨论了不同参数下的最佳引进时间。

关键词: 碳减排; 最佳引进时间; Hamilton-Jacobi-Bellman 方程; 粘性解

中图分类号: X22; F124.5

文献标志码: A

Optimal Introduction Timing Model of Enterprise Carbon Emission Reduction Technology Under Viscosity Solution Framework

CHEN Yiling, HUANG Wenlin, LIANG Jin

(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: By use of the theory of real options and under the uncertainty of carbon emission rate and technology cost, the optimal introduction timing of carbon emission reduction technology for enterprises was explored, with the consideration of the cost of technology maintenance. And the optimization problem was transformed into a variational inequality problem for solving the HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) equation. Under the framework of viscosity solution, it was proved that the value function was the unique viscosity solution of the problem. The numerical simulation results were presented, and the optimal introduction timing with different parameters was also discussed.

Key words: carbon reduction; the optimal introduction timing; Hamilton-Jacobi-Bellman equation; viscosity solution

近年来, 温室效应和气候变化越来越引起人们关注。日益恶化的气候严重危害了生态系统的平衡, 例如造成气候变暖, 海平线上升与极端天气等, 对人类活动产生深远的影响。碳减排已经成为世界上日益紧迫和重要的问题。2005年《京都协议书》与2016年《巴黎协定》的推出是全世界对碳减排采取的行动。

我国高能耗工业面临着日益严格的减排环境的巨大挑战。因此使用新型能源(风能、太阳能、核能)和其他新技术来减少二氧化碳的排放成为政府和企业关注的焦点。例如, 解决化石燃料和减排压力之间关系的一个有效办法是碳捕获和储存技术(CCS)的引进。它能够进一步利用丰富的煤炭资源, 同时减少燃烧产生的排放量。然而, 新技术的引进或者新清洁能源的使用, 在较少二氧化碳排放的同时, 也伴随着高新减排技术发展的不均衡、投资回报的不确定性、高额的技术成本投入和持续的设备维护费用。故此, 企业如何选择投资减排技术时间成了迫在眉睫的问题。

企业碳减排技术最佳引进时间问题可以借鉴实物期权的理论^[1]。一个投资方案其产生的现金流量所创造的利润, 来自于截止到目前所拥有资产的使用, 再加上一个对未来投资机会的选择。实物期权就是处理这样具有不确定性投资结果的非金融资产的一种投资决策工具, 其理论通过 Black-Scholes 期权理论对最优决策时间点的选择。Zhang 等^[2]在碳价与技术成本不确定性下, 假设碳捕获技术的进步满足 Poisson 过程, 探究了碳捕获技术投资优化模型。Zhou 等^[3]在实物期权模型框架下, 考虑碳价与高新技术发展不确定性, 探究了投资 CCS 技术的最佳策略以及气候政策对碳减排技术投资决策过程的影响。Fuss 等^[4]建立了一个具有随机技术变化和随

收稿日期: 2019-11-07

基金项目: 国家自然科学基金(11671301)

第一作者: 陈亦令(1992—), 男, 博士生, 主要研究方向为偏微分方程与随机优化。E-mail: ylchen@tongji.edu.cn

通信作者: 梁进(1958—), 女, 教授, 博士生导师, 理学博士, 主要研究方向为金融数学及信用风险管理。

E-mail: liang_jin@tongji.edu.cn



论文
拓展
介绍

机化石燃料价格的实物期权模型,并说明减排技术的更新换代将推迟引进时间。早期有Murto^[5]考虑收益和技术的不确定性下,在实物期权模型下探究了最优碳减排投资时刻问题,并通过降维方式得到一个简化模型,进行了求解。杨晓丽与梁进^[6-7],郭华英与梁进^[8-9]针对碳减排和碳交易费用问题,即控制碳减排率与碳交易等手段来降低碳减排成本,做了大量细致的研究。郭华英^[10]在博士论文中,考虑碳排放率和技术成本两个随机过程,建立了一个数学模型,探究最优投资时刻问题,并在特殊情况下得到了相关方程的显解。这些研究重心在模型建立和实证研究,需要对数学模型进行更合理的构建和更深刻的理论研究。而相应的数学模型在数学上可以归结为一种变形的HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman)微分方程的理论,其研究具有很强的理论意义和现实意义。

本文在郭^[10]模型的基础上,运用随机微分方程来描述企业碳排放率和技术成本的不确定性,考虑技术的维护费用,运用实物期权理论,在碳排放率和技术成本双重不确定性因素下,探究了企业碳减排技术最佳引进时间问题,并将问题转为求解一个HJB方程的变分不等式问题,证明了值函数是该HJB方程的唯一粘性解。最后进行了数值模拟与结果分析,给出减排技术投资意见。

除了引言部分,第1节讲述具体模型的构建与目标函数的探讨。第2节给出了目标函数的基本性质,动态规划原理和粘性解的介绍。第3节证明了目标函数是对应HJB方程的唯一粘性解,并给出了一些数值模拟与结果分析,以此给出碳减排技术投资的指导意见。第4节进行全文总结。

1 模型建立

以发电厂为代表的高能耗企业在生产过程中排放二氧化碳,且需缴纳碳排放税。为了减少碳排放税的支出,企业需要引进碳减排技术(CCS技术为代表)来减少碳排放。假设企业 t 时刻的二氧化碳排放率 Q ,满足随机过程:

$$\frac{dQ_t}{Q_t} = \mu^* dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

式中: σ 为波动率参数,表示企业的二氧化碳排放率的不确定性; W_t 为标准布朗运动,表示企业未来碳排放的不确定性,由生产过程、产品需求的不确定性造成,几何布朗运动描述企业碳排放率见文献[11]。

$$\mu^* = \begin{cases} \mu_1, & t \leq \tau \\ \mu_2, & t > \tau \end{cases} \quad (2)$$

式中: τ 为企业安装引进减排技术的时间; μ_1 和 μ_2 为漂移参数,即排放率的长期增长率。假设 $\mu_1 > \mu_2$,表示引进减排技术后,公司的排放率增长率将降低,显示新技术的减排效果。同时假设初始碳排放率 $Q_0 = Q$,在引进减排技术前后二氧化碳排放率连续,即 $Q_{\tau-} = Q_{\tau+}$ 。

企业在引进减排技术后, $\mu^* = \mu_2$,因此企业未来所支付的碳排放税在 t 时刻的价值可表示为

$$E \left[\int_t^{\infty} D(s) C Q_s ds \right] = \frac{C Q_t}{r - \mu_2} D(t) \quad (3)$$

式中: $D(t) = \exp(-rt)$,表示 t 时刻贴现因子; $C > 0$,表示政府规定的碳税率; r 为贴现率(市场无风险利率),且满足 $r > \mu_1 > \mu_2$,即减排后的排放率低于市场无风险利率。

企业引进减排技术后,需要支出维护减排技术的管理成本。企业未来支付的管理费在 t 时刻的价值可表示为

$$\int_t^{\infty} D(s) M ds = \frac{M}{r} D(t) \quad (4)$$

式中: M 为设管理费率。

企业通过投资碳减排技术来降低自身的二氧化碳排放。通常,技术进步以及新技术的普及率的提高,将导致碳减排技术的投资成本降低。假设企业在 t 时刻碳减排技术的投资成本 I_t ,满足指数递减模型^[12]如下:

$$dI_t = -\kappa I_t dt \quad (5)$$

式中: κ 为技术更新率,随着技术的发展,减排技术成本降低。 $I_0 = I > 0$,表示引进减排技术所需要的成本的初值大于零。进一步假设碳减排技术投资是一个不可逆过程,一旦经过技术改造,企业今后的生产方式不再改变。

企业考虑自身当下的二氧化碳排放水平以及减排技术投资成本,选择最佳的碳减排技术引进时间,使得所支出的总预期碳减排成本最低。企业的总期望减排成本 $V(Q, I)$ 可表示为

$$V(Q, I) = \inf_{\tau \in \Gamma} E \left[\int_0^{\tau} D(s) C Q_s ds + D(\tau) \left(I_{\tau} + \frac{C Q_{\tau}}{r - \mu_2} + \frac{M}{r} \right) \middle| Q_0 = Q, I_0 = I \right] \quad (6)$$

式中: Γ 表示在 $[0, \infty]$ 中取值的所有停时集合。注意到, Γ 包含正无穷,公司可能选择永远不引进碳减排技术。式(6)包含4个部分:

(1) $\int_0^{\tau} D(s)CQ_s ds$, 表示从0时刻到引进新技术前, 企业所需要支付的碳税;

(2) $D(\tau)I_{\tau}$, 表示减排技术在 τ 时刻的投资成本, 包括设备购买的费用和安装的费用等;

(3) $D(\tau)CQ_{\tau}/(r - \mu_2)$, 表示引进减排技术后, 企业从 τ 时刻开始所需支付的碳税;

(4) $D(\tau)M/r$, 表示引进减排技术后, 对维护减排技术支出的设备管理和运营费用。

根据动态规划原理, 对于任意 $(Q, I) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$, $V(Q, I)$ 满足 HJB 方程:

$$\max \left\{ -\Delta V + \kappa I \frac{\partial V}{\partial I}, V - F(Q, I) \right\} = 0 \quad (7)$$

式中:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \sigma^2 Q^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Q^2} + \mu_1 Q \frac{\partial V}{\partial Q} - rV + CQ \quad (8)$$

$$F(Q, I) = I + \frac{CQ}{r - \mu_2} + \frac{M}{r} \quad (9)$$

狄利克雷边界条件如下:

$$\begin{cases} V(0, I) = 0 \\ V(Q, I) = F(Q, I) \rightarrow \infty, \text{当 } Q \rightarrow \infty \\ V(Q, \infty) = \frac{CQ}{r - \mu_1} \end{cases} \quad (10)$$

当 $Q=0$ 时, 企业没有碳排放, 故也没有减排成本。当 Q 非常大时, 企业应该立即引进碳减排技术来降低成本。故当 $\tau=0$ 时, 企业的碳减排成本期望值为 $F(Q, I)$ 。当 I 非常大时, 减排技术引进成本过高, 企业将无限延长引进技术的时间, 此时碳排放率的漂移项一直为 μ_1 , 减排成本为 $CQ/(r - \mu_1)$ 。

观察到, 定解问题(7)~(10)在数学上称为自由边界问题。决定最优技术引进时刻的本质是确定自由边界。自由边界将引进决策分为等候区域与实施区域。数值结果部分将做进一步探讨。

2 预备知识

本小节给出了值函数(6)的一些基本性质, 并为了后续研究, 介绍了随机控制理论的动态规划原理和粘性解定义。

命题1 值函数(6)满足:

$$0 \leq V(Q, I) \leq F(Q, I) \quad (11)$$

$V(Q, I)$ 关于 Q 和 I 连续, 且是 Q 和 I 的增函数。

证明: 式(11)的第一个不等号自然成立。当最优引进时间 $\tau=0$, 立即引进新技术, 有:

$$V(Q, I) \leq I + \frac{CQ}{r - \mu_2} + \frac{M}{r} = F(Q, I) \quad (12)$$

故式(11)成立, 由此可知 V 关于 Q, I 都是一阶线性增长。

对于任意 $h > 0$, 假设 τ^h 是初始状态 $(Q+h, I)$ 的最优引进时刻, 有 $V(Q+h, I) = V_{\tau^h}(Q+h, I)$ 。对于初始状态 (Q, I) , 实施同样的引进时刻 τ^h , 经过计算有:

$$\begin{aligned} & V(Q+h, I) - V(Q, I) \\ & \geq V_{\tau^h}(Q+h, I) - V_{\tau^h}(Q, I) \\ & \geq \frac{h}{r - \mu_1} (1 - \exp((\mu_1 - r)\tau^h)) + \\ & \quad h \cdot \exp(\mu_1 \tau^h) > 0 \end{aligned} \quad (13)$$

故 V 是 Q 的增函数。同理, 对于任意 $k > 0$, 假设 τ^k 是公司在初始状态 $(Q, I+k)$ 时的最优引进时刻, 有 $V(Q, I+k) = V_{\tau^k}(Q, I+k)$ 。对于初始状态 (Q, I) , 实施同样的引进时刻 τ^k , 经过计算有:

$$V(Q, I+k) - V(Q, I) \geq k \exp(-\kappa \tau^k) > 0 \quad (14)$$

故 V 是 I 的增函数。同时取 h, k 任意小, 由式(13), (14)容易得到 $V(Q, I)$ 关于 Q 和 I 连续。

接下来给出本文优化问题的动态规划原理。详细证明过程类似于文献[13]。

命题2 假设最优引进时刻为 τ^* 。

当 $\tau^* = 0$, 有:

$$V(Q, I) = F(Q, I) \quad (15)$$

当 $\tau^* \neq 0$, 对于任意 $t > 0$, 有:

$$\begin{aligned} V(Q, I) &= \inf_{\tau \in \Gamma} E \left[\int_0^{\tau \wedge t} D(s)CQ(s) ds + \right. \\ & \quad \left. D(\tau \wedge t)V(Q(\tau \wedge t), I(\tau \wedge t)) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

由于 HJB 方程(7)是一个非线性的退化的变分不等方程, 目标函数的光滑性很难在经典解的意义下满足 HJB 方程(7)。因此, 介绍一种由 Crandall 和 Lions^[14]提出的一种弱解: 粘性解。

定义1 连续函数 \underline{u} 是 HJB 方程(7)的粘性下解, 当且仅当任意二次连续可微函数 φ 都有:

$$\max \left\{ -\Delta \varphi + \kappa I \frac{\partial \varphi}{\partial I}, \varphi - F(Q, I) \right\} \leq 0 \quad (17)$$

式中, $\underline{u}(Q, I) = \varphi(Q, I)$ 使得 $\underline{u} - \varphi$ 在 (Q, I) 达到局部最大值。连续函数 \bar{u} 是 HJB 方程(7)的粘性上解, 当且仅当任意二次连续可微函数 ψ 都有:

$$\max \left\{ -\Delta \psi + \kappa I \frac{\partial \psi}{\partial I}, \psi - F(Q, I) \right\} \geq 0 \quad (18)$$

式中, $\bar{u}(Q, I) = \psi(Q, I)$ 使得 $\bar{u} - \psi$ 在 (Q, I) 达到局

部最小值。连续函数 u 是 HJB 方程(7)的粘性解,当且仅当 u 是 HJB 方程(7)的粘性上解和粘性下解。

3 主要结果

3.1 理论结果

命题3 目标函数 $V(Q, I)$ 是 HJB 方程(7)的粘性下解。

证明:对于任意初始状态 (Q_0, I_0) 和任意引进时刻 τ , 令 φ 是任意二次连续可微函数, 满足 $V(Q_0, I_0) = \varphi(Q_0, I_0)$, 使得 $V - \varphi$ 在 (Q_0, I_0) 达到局部最大值。假设最优引进时刻为 τ^* , 当 $\tau = \tau^* = 0$, 则有: $\varphi(Q_0, I_0) = V(Q_0, I_0) = F(Q_0, I_0)$ 。则对于任意 $(Q, I) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, 由下确界性质有:

$$V(Q, I) \leq F(Q, I) \tag{19}$$

当 $\tau^* \neq 0$, 由动态规划原理和伊藤公式可以得到:

$$\begin{aligned} 0 &\leq E \left[\int_0^{\tau \wedge t} D(s) CQ(s) ds + \right. \\ &D(\tau \wedge t) V(Q(\tau \wedge t), I(\tau \wedge t)) - V(Q, I) \left. \right] \\ &\leq E \left[\int_0^{\tau \wedge t} D(s) CQ(s) ds + \right. \\ &D(\tau \wedge t) \varphi(Q(\tau \wedge t), I(\tau \wedge t)) - \varphi(Q, I) \left. \right] \\ &\leq E \left[\frac{1}{t} \int_0^{\tau \wedge t} D(s) \left(\Delta \varphi - \kappa I \frac{\partial \varphi}{\partial I} \right) (Q_s, I_s) ds + \right. \\ &\left. \frac{1}{t} \int_0^{\tau \wedge t} D(s) \sigma Q(s) dW_s \right] \end{aligned} \tag{20}$$

令 $t \rightarrow 0$, 则 $\tau \wedge t \rightarrow 0$, 在 (Q_0, I_0) 处, 有:

$$-\Delta \varphi + \kappa I \frac{\partial \varphi}{\partial I} \leq 0 \tag{21}$$

由于算子 Δ 的上半连续性, 对于任意 τ , 式(21)成立。故由式(19)和(21), 得到式(17), 命题得证。

命题4 目标函数 $V(Q, I)$ 是 HJB 方程(7)的粘性上解。

证明:对于任意初始状态 (Q_0, I_0) 和任意引进时刻 τ , 令 ψ 是任意二次连续可微函数, 满足 $V(Q_0, I_0) = \psi(Q_0, I_0)$, 使得 $V - \psi$ 在 (Q_0, I_0) 达到局部最小值。当 $\tau^* = 0$, 有 $\psi(Q_0, I_0) = V(Q_0, I_0) = F(Q_0, I_0)$, 则式(18)一定成立。当 $\tau^* \neq 0$, 由式(19)与局部最小性质, 得到 $\psi(Q, I) < V(Q, I) < F(Q, I)$, 故命题成立只需要证明:

$$-\Delta \psi + \kappa I \frac{\partial \psi}{\partial I} \geq 0 \tag{22}$$

对于任意正整数 m , 令 $t^m = \frac{1}{m}$, 由动态规划原理可知, 存在一个引进时间 $\tau^1 > 0$, 令 $\alpha = \tau^1 \wedge t^m$, 使得:

$$\begin{aligned} V(Q, I) + \frac{1}{m^2} &\geq E \left[\int_0^\alpha D(s) CQ_s^m ds + \right. \\ &D(\alpha) V(Q_\alpha^m, I(\alpha)) \left. \right] \end{aligned} \tag{23}$$

式中: Q_s^m 是控制 τ^1 (τ^1 与 m 有关) 下式(1)的解。由局部最小性 $V \geq \psi$, 得到:

$$\begin{aligned} 0 &\geq E \left[\int_0^\alpha D(s) CQ_s^m ds + \right. \\ &D(\alpha) \psi(Q_\alpha^m, I(\alpha)) - \psi(Q, I) \left. \right] - \frac{1}{m^2} \end{aligned} \tag{24}$$

由伊藤公式, 有:

$$\begin{aligned} 0 &\geq E \left[\int_0^\alpha D(s) [(\Delta \psi)(Q_s^m, I(s)) - \right. \\ &\left. \kappa I \frac{\partial \psi}{\partial I}(Q_s^m, I(s))] ds \right] - \frac{1}{m^2} \end{aligned} \tag{25}$$

两边乘 m , 有:

$$\begin{aligned} 0 &\geq m E \left[\int_0^\alpha D(s) [(\Delta \psi)(Q_s^m, I(s)) - \right. \\ &\left. \kappa I \frac{\partial \psi}{\partial I}(Q_s^m, I(s))] ds \right] - \frac{1}{m} \\ &\geq \Delta \psi(Q, I) - \kappa I \frac{\partial \psi}{\partial I}(Q, I) \end{aligned} \tag{26}$$

注意到当 $\tau^* \neq 0$, 故当 $m \rightarrow \infty, \tau^1 > 0$, 则 $\alpha \rightarrow 0$ 。所以, 任意 $s \in (0, \alpha]$, 有:

$$\sup_{s \in (0, \alpha]} E[Q_s^m] \rightarrow Q_0 = Q, \text{ 当 } \alpha \rightarrow 0$$

故当 $m \rightarrow \infty$, 式(26)的最后一个不等号成立。因此, 式(22)得证, 命题得证。

由命题3和命题4可以得到以下定理。

定理1 目标函数(6)是 HJB 方程(7)的粘性解。

下面证明目标函数(6)是 HJB 方程(7)的唯一粘性解。为了证明解的唯一性, 建立以下比较原理。

定理2 如果 \underline{u} 与 \bar{u} 分别是 HJB 方程(7)的粘性下解和上解, 且满足:

- (1) 存在正常 K , 使得 $\underline{u}, -\bar{u} \leq K(1 + Q + I)$;
- (2) \underline{u} 与 \bar{u} 满足边界条件(10)。

则对任意 $(Q, I) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, 有 $\underline{u}(Q, I) \leq \bar{u}(Q, I)$ 。

证明:反证法。假设存在 $Z^* = (Q^*, I^*) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, 存在 $\delta > 0$ 使得:

$$\underline{u}(Z^*) - \bar{u}(Z^*) \geq 2\delta > 0 \tag{27}$$

令 $Z_i = (Q_i, I_i), i = 1, 2$, 定义辅助函数:

$$\begin{aligned} \Phi(Z_1, Z_2) &= \underline{u}(Z_1) - \bar{u}(Z_2) - \omega(Z_1, Z_2) \\ \omega(Z_1, Z_2) &= k|Z_1 - Z_2|^2 + \epsilon(|Z_1|^2 + |Z_2|^2) \end{aligned}$$

由于 Φ 连续性和条件(1),有:

$$\sup \Phi(Z_1, Z_2) = \Phi(Z_1^k, Z_2^k) \triangleq G^k < \infty \quad (28)$$

式中, (Z_1^k, Z_2^k) 是 Φ 的最大值点。这里将 ϵ 固定,强调最大值点 (Z_1^k, Z_2^k) 依赖于 k 。

由 $\Phi(Z_1^k, Z_2^k) \geq \Phi(Z^*, Z^*)$,取 ϵ 足够小,有:

$$G^k \geq \underline{u}(Z^*) - \bar{u}(Z^*) - 2\epsilon |Z^*|^2 > \delta > 0 \quad (29)$$

故有:

$$\infty > \underline{u}(Z_1^k) - \bar{u}(Z_2^k) > \delta > 0 \quad (30)$$

从 $\Phi(Z_1^k, Z_2^k) \geq \Phi(Z^*, Z^*)$ 和增长性条件(1),有:

$$\begin{aligned} & k|Z_1^k - Z_2^k|^2 + \epsilon(|Z_1^k|^2 + |Z_2^k|^2) \\ & \leq \underline{u}(Z_1^k) - \bar{u}(Z_2^k) - \underline{u}(Z^*) + \bar{u}(Z^*) + 2\epsilon |Z^*|^2 \\ & \leq C_\epsilon(1 + |Z_1^k| + |Z_2^k|) \end{aligned} \quad (31)$$

因此有 $|Z_1^k|, |Z_2^k| \leq C_\epsilon$ (存在常数 $C_\epsilon > 0$),故当 $k \rightarrow \infty$,存在子序列 (Z_1^k, Z_2^k) ,有 $Z_1^k \rightarrow Z_1^\epsilon, Z_2^k \rightarrow Z_2^\epsilon$ (仍用 k 指代)。观察到 $k|Z_1^k - Z_2^k|^2 \leq C_\epsilon$,有 $Z_1^\epsilon = Z_2^\epsilon = Z^\epsilon$ 当 $k \rightarrow \infty$ 。此时, $Z^\epsilon = (Q^\epsilon, I^\epsilon)$ 依赖于 ϵ 。根据 $\Phi(Z_1^k, Z_2^k) \geq \Phi(Z^\epsilon, Z^\epsilon)$,有:

$$\begin{aligned} & k|Z_1^k - Z_2^k|^2 \leq \underline{u}(Z_1^k) - \bar{u}(Z_2^k) - \\ & \quad \underline{u}(Z^\epsilon) + \bar{u}(Z^\epsilon) \end{aligned} \quad (32)$$

令 $k \rightarrow \infty$,有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k|Z_1^k - Z_2^k|^2 = 0 \quad (33)$$

接下来,证明最大值点 (Z_1^k, Z_2^k) 不在边界取到。

如果 Z^ϵ 在定解问题边界上,例如 $Z^\epsilon = (0, I^\epsilon)$,从狄利克雷边界条件(2)和式(30),有:

$$\begin{aligned} & 0 = \underline{u}(0, I^\epsilon) - \bar{u}(0, I^\epsilon) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}(Z_1^k) - \bar{u}(Z_2^k) \geq \delta > 0 \end{aligned} \quad (34)$$

得到矛盾。同理,当 $Z^\epsilon = (Q^\epsilon, \infty), Z^\epsilon = (\infty, I^\epsilon)$,也能得到类似式(34)的矛盾。

根据 Ishii's Lemma^[14],经过计算,有:

$$(D_{Z_1}(\omega), Y_1) \in D^{2,+}(\underline{u}(Z_1^k)) \quad (35a)$$

$$(-D_{Z_2}(\omega), -Y_2) \in D^{2,-}(\bar{u}(Z_2^k)) \quad (35b)$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & -Y_2 \end{pmatrix} \leq (10k + 8\epsilon) \begin{pmatrix} L & -L \\ -L & L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\epsilon + \frac{4\epsilon^2}{k} & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \quad (36)$$

式中: Y_1, Y_2 属于二阶导数矩阵集 $D_{Z_1}^2(\underline{u}), D_{Z_2}^2(\bar{u})$; L 为单位矩阵。 $D^2(u)$ 具体定义见文献[10]。

由于 \underline{u}, \bar{u} 在点 (Z_1^k, Z_2^k) 分别是HJB方程(7)的粘性下解和上解,运用式(35)和(36),得到:

$$\max \{A_1, B_1\} \leq 0 \quad (37)$$

$$\max \{A_2, B_2\} \geq 0 \quad (38)$$

其中:

$$\begin{aligned} A_1 = & -\mu_1 Q_1^k [2k(Q_1^k - Q_2^k) + 2\epsilon Q_1^k] - \\ & \frac{1}{2} \sigma_1^2 Y_1 + r \underline{u}(Z_1^k) - C Q_1^k + \\ & \kappa I_1^k (2k(I_1^k - I_2^k) + 2\epsilon I_1^k) \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} A_2 = & -\mu_1 Q_2^k [2k(Q_1^k - Q_2^k) - 2\epsilon Q_2^k] - \\ & \frac{1}{2} \sigma_1^2 Y_2 + r \bar{u}(Z_2^k) - C Q_2^k + \\ & \kappa I_2^k (2k(I_1^k - I_2^k) - 2\epsilon I_2^k) \end{aligned} \quad (40)$$

$$B_1 = \underline{u}(Z_1^k) - F(Q_1^k, I_1^k) \quad (41)$$

$$B_2 = \bar{u}(Z_2^k) - F(Q_2^k, I_2^k) \quad (42)$$

式(37)减去式(38)得到:

$$\max \{A_1 - A_2, B_1 - B_2\} \leq 0 \quad (43)$$

令 $k \rightarrow \infty$,运用式(30)和式(33),有:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} A_1 - A_2 \geq & \delta r + 4\kappa \epsilon (I^\epsilon)^2 - \\ & \left(\mu_1 + \frac{\sigma^2}{2} \right) 4\epsilon (Q^\epsilon)^2 > 0 \end{aligned} \quad (44)$$

由式(34)及其分析可知,最大值点 (Q^ϵ, I^ϵ) 不可能在无穷远处取到,故当 ϵ 足够小,式(44)成立,这与 $A_1 - A_2 \leq 0$ 矛盾。同理,有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} B_1 - B_2 = \underline{u}(Z^\epsilon) - \bar{u}(Z^\epsilon) \geq \delta > 0 \quad (45)$$

与 $B_1 - B_2 \leq 0$ 矛盾。故式(43)不成立,定理得证。

根据定理2(比较原理),可以得到以下定理:

定理3任意 $(Q, I) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,目标函数(6)是HJB方程(7)的唯一粘性解。

3.2 数值结果

接下来对HJB方程(7)进行差分数值求解,并给出目标函数与企业最佳减排技术引进边界的数值结果。HJB方程的差分格式建立参考Forsyth^[15]的方法。大致思路如下:将 I 看作抛物方程的 t 方向,构建隐式差分格式,倒向逐层求解。

基本参数设置如下: $\mu_1 = 0.007, \mu_2 = 0.002, \sigma = 0.15, \kappa = 0.02, C = 10, M = 10$ 。考虑带状区域 $\{Q \in [0, 50], I \in [0, 3500]\}$,构建如下网格: $h_q = 0.1, h_i = 50$,

$$Q_i = i^* h_q, i = 0, 1, \dots, N, I_j = j^* h_i, j = 0, 1, \dots, M$$

$$H = \{(Q_i, I_j) | i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M\}$$

$$V_{i,j} = V(Q_i, I_j), F_{i,j} = F(Q_i, I_j)$$

定解问题(7)~(10)的离散形式:

$$a_i V_{i-1,j} + b_{i,j} V_{i,j} + c_i V_{i+1,j} \leq d_{i,j}$$

$$V_{i,j} \leq F_{i,j}$$

$$[a_i V_{i-1,j} + b_{i,j} V_{i,j} + c_i V_{i+1,j} - d_{i,j}][V_{i,j} - F_{i,j}] = 0$$

其中:

$$a_i = -\frac{1}{2}\sigma^2 i^2 + \frac{1}{2}\mu_1 i$$

$$b_{i,j} = \sigma^2 i^2 + r - \kappa j$$

$$c_i = -\frac{1}{2}\sigma^2 i^2 - \frac{1}{2}\mu_1 i$$

$$d_{i,j} = -\kappa j V_{i,j+1} + Ch_q i$$

相应的边界条件(10)的离散形式为

$$V_{0,j} = 0, V_{N,j} = \frac{Ch_q}{r - \mu_2} V_{N-1,j}$$

$$V_{i,M} = \min \left\{ \frac{CQ_i}{r - \mu_1}, I_M + \frac{CQ_i}{r - \mu_2} + \frac{M}{r} \right\}$$

注意到,当二氧化碳排放率非常大时,企业倾向于立即引进技术,结合二阶导数在无穷远处为零的假设,令 $\frac{\partial V}{\partial Q} = \frac{C}{r - \mu_2}$, 得到 V_{N,j_0} 。同时,当碳减排技术初始成本非常大时,企业选择不引进新技术,故 $V_{i,M}$ 为企业选择不引进新技术与立即引进新技术的企业减排总成本中的较小者。

首先,构建隐式差分格式求解 $-\Delta \tilde{V} + \kappa I \frac{\partial \tilde{V}}{\partial I} = 0$, 得到 \tilde{V}_{i,j_0} 。 V 与 \tilde{V} 有相同的边界条件。矩阵形式如下:

$$H_j S_j = U_j$$

$$H_j = \begin{bmatrix} b_{1,j} & c_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_{2,j} & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{N-2} & b_{N-2,j} & c_{N-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & b_{N-1,j} \end{bmatrix}$$

$$S_j = \begin{bmatrix} \tilde{V}_{1,j} \\ \vdots \\ \tilde{V}_{N-1,j} \end{bmatrix}$$

$$U_j = \begin{bmatrix} d_{1,j} - a_1 \tilde{V}_{0,j} \\ d_{2,j} \\ \vdots \\ d_{N-2,j} \\ d_{N-1,j} - c_{N-1} \tilde{V}_{N,j} \end{bmatrix}$$

采用高斯消去法求解得到 \tilde{V}_{i,j_0} 。故根据式(7), 得到:

$$V_{i,j} = \max \{ \tilde{V}_{i,j}, F_{i,j} \}$$

图1展示了在最优时刻引进碳减排技术下的企

业碳减排成本三维图。可以观察到,成本 V 是碳排放率 Q 和技术成本 I 的增函数,这与命题1中的理论结果相符合。

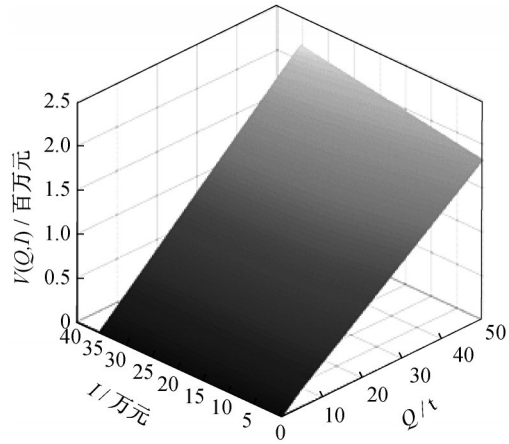


图1 值函数三维图

Fig.1 Three dimensional graph of value function

图2中的曲线是数学问题(7)~(10)的自由边界,即企业的最佳减排技术引进边界。令企业最佳减排技术引进边界(最优实施边界)为 $\rho: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, 任意 Q^* 都存在 $I^* = \rho(Q^*)$ 。它将平面分为两部分。给定企业现在碳排放率 Q^* 和技术成本 I , 就能决定现在是否引进减排技术。当 $I \geq I^*$, 暂时不引进技术, 等候投资; 当 $I < I^*$, 立即引进技术。

最佳引进边界数值求解方法如下: 给定 $I^* = I_j$, 寻找 $Q^* = Q_{i^*}$ 满足 $\tilde{V}_{i^*,j} = F_{i^*,j}$, 故 $I^* = \rho(Q_{i^*})$ 。当找不到 $i^* = 0, 1, \dots, N$ 满足 $\tilde{V}_{i^*,j} = F_{i^*,j}$ 时, $i^* = N, Q^* = Q_N$ 。数值结果显示, 任意 I^* , 存在至多一个 Q^* 满足 $I^* = \rho(Q^*)$, 这由函数 V 和 F 都是 Q 的增函数保证。

从图2可以看出,企业的最佳实施边界将平面分为两部分,边界的左侧为等待区域,当企业的碳排放率和技术成本落在边界左侧,企业不引进新技术。边界的右侧为立即实施区域。当企业的碳排放率和技术成本落在边界右侧,企业立即投资新技术降低减排成本。同时最优实施边界 ρ 是 Q 的增函数。也就是说,当其碳排放率非常大时,企业将在技术成本更大的时候才会选择等待,否则立即引进。站在企业的角度,希望等候区域面积大,此时不需要引进新技术且减排成本较小。而站在政府的角度,希望实施面积大,让大部分企业都投资新技术,降低二氧化碳排放。

图2也展示了企业最佳减排技术引进边界(最

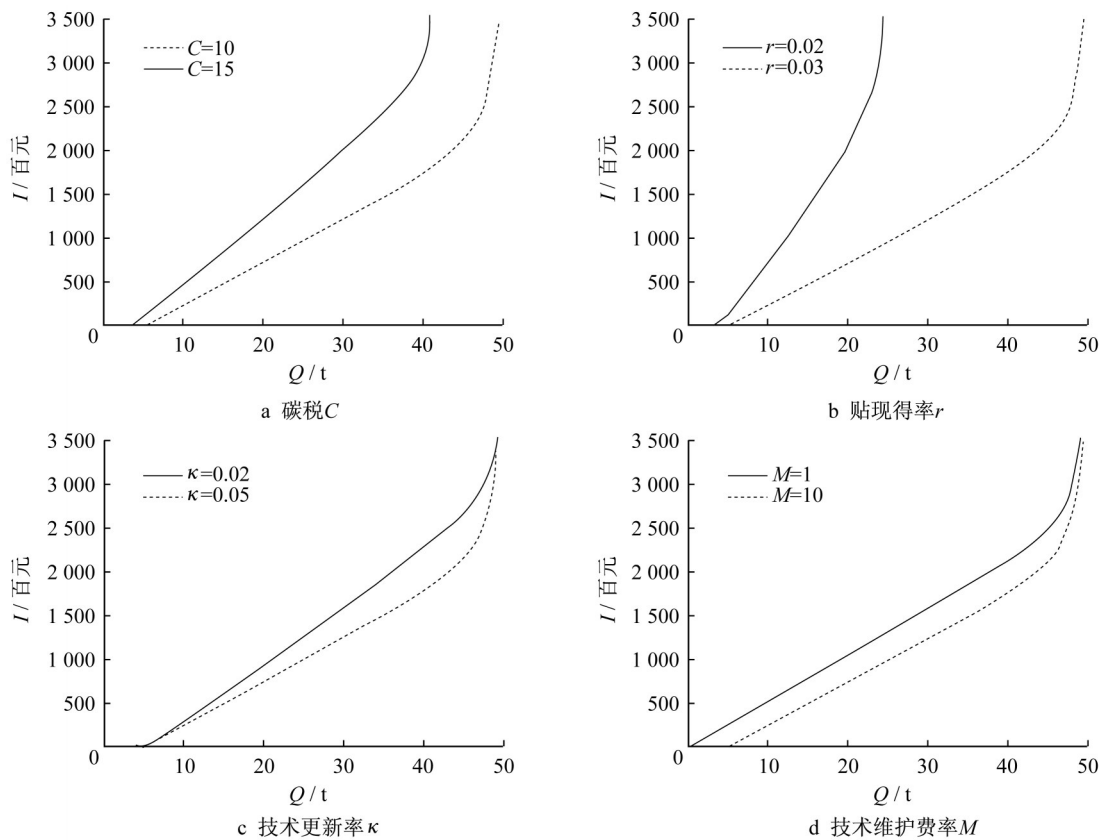


图2 企业最佳碳减排技术引进边界与碳税率、贴现利率、技术更新率和技术维护费率的关系

Fig.2 The relationship between the introduction boundary of the optimal carbon emission reduction technology for enterprises and the carbon tax rate, discount rate, technology renewal rate as well as technology maintenance rate

优实施边界)与碳税率、贴现利率、技术更新率和技术维护费率的关系。图2a展示了企业等待区域是政府碳税率 C 的减函数。即如果碳税率 C 较大,投资新技术带来的节省成本效果更好,企业将考虑在较低排放率时引进新技术,则等待区域变小。故政府可以提高碳税迫使企业引进新技术降低碳排放。图2b说明等待区域是贴现利率 r 的增函数。当贴现利率比较大时候,即无风险利率较大时,企业倾向于在碳排放 Q 较大时引进技术,企业待在等候区域更久,让引进技术成本的贴现值更低。故此,政府可以降低利率加快企业碳减排进程,而企业在利率较高时推迟投资新技术。图2c表明等待区域是技术更新率 κ 的减函数。当减排技术发展较快时,引进成本降低快,企业选择等待引进时间更少,更容易碰到自由实施边界,选择引进新技术。图2d表明等待区域是技术维护费率 M 的增函数。当技术维护费率较大时,引进技术后的维护成本较高,企业在碳排放率 Q 较大时才会引进减排技术,以此增加等待时间减少维护成本。所以,当碳排放率高时,政府与企业都希

望碳减排技术能快速发展,降低引进成本与维护成本。

4 结语

高能耗企业面临碳减排政策的压力日益严峻。运用实物期权理论,在郭^[10]模型的基础上,考虑碳排放率和技术成本双重不确定性因素,建立了企业碳减排技术最佳引进时间的数学模型。运用最优随机控制理论,将问题转化为求解一个HJB方程的变分不等式问题。在粘性解的框架下,探究了目标函数的基本性质,证明了目标函数是相应HJB方程的唯一粘性解。对模型进行了数值分析。从数值结果可以看出,政府可以通过提高碳税率和降低利率迫使企业引进碳减排技术来降低碳排放。而当利率较高时,企业应该推迟引进技术,将资本投资于其他市场。当碳减排技术快速发展时,企业应尽早引进新技术,较少碳排放成本。

参考文献:

- [1] DIXIT A K, DIXIT R K, PINDYCK R S. Investment under uncertainty [M]. New Jersey: Princeton University Press, 1994.
- [2] ZHANG Xinhua, LI Wei. Power producer's carbon capture investment timing under price and technology uncertainties[J]. Energy Procedia, 2011, 5: 1713.
- [3] ZHOU W, ZHU B, FUSS S, *et al.* Uncertainty modeling of CCS investment strategy in China's power sector[J]. Applied Energy, 2010, 87(7): 2392.
- [4] FUSS S, SZOLGAYOVÁ J. Fuel price and technological uncertainty in a real options model for electricity planning[J]. Applied Energy, 2010, 87(9): 2938.
- [5] MURTO P. Timing of investment under technological and revenue-related uncertainties [J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2007, 31(5): 1473.
- [6] 杨晓丽,梁进. 一国碳减排的最小费用研究[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(3): 640.
YANG Xiaoli, LIANG Jin. Minimization of the national cost due to carbon emission [J]. System Engineering —Theory & Practice, 2014, 34(3): 640.
- [7] YANG Xiaoli, LIANG Jin, HU Bei. Minimization of carbon abatement cost: modeling, analysis and simulation[J]. Discrete and Continuous Dynamical System Series B, 2017, 22(7): 2939.
- [8] GUO Huaying, LIANG Jin. An optimal control model for reducing and trading of carbon emissions [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2016, 446: 11.
- [9] GUO Huaying, LIANG Jin. An optimal control model of carbon reduction and trading [J]. Mathematical Control & Related Fields, 2016, 6(4): 535.
- [10] 郭华英. 与碳减排和碳贸易相关的随机优化模型的研究[D]. 上海: 同济大学, 2018.
GUO Huaying. Stochastic optimal control model for carbon reduction and trading[D]. Shanghai: Tongji University, 2018.
- [11] CHESNEY M, TASCINI L. The endogenous price dynamics of emission allowances and an application to CO₂ option pricing [J]. Applied Mathematical Finance, 2012, 19(5): 447.
- [12] ABADIE L M, CHAMORRO J M. European CO₂ prices and carbon capture investments [J]. Energy Economics, 2008, 30(6): 2992.
- [13] PHAM H. Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications [M]. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2009.
- [14] CRANDALL M G, ISHII H, LIONS P L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1992, 27(1): 1.
- [15] FORSYTH P A, LABAHN G. Numerical methods for controlled Hamilton-Jacobi-Bellman PDEs in finance [J]. Journal of Computational Finance, 2007, 11(2): 1.