文章编号：0253-374X(2020)08-1232-09　　DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.19541

Variance Gamma模型下欧式与美式期权的柳树法定价

姚　怡，许　威

(同济大学 数学科学学院，上海 200092)

摘要：现有的Variance Gamma模型下期权定价方法计算复杂，工作量大，因此提出了欧式与美式期权的快速定价柳树法。在构建过程中，使用Johnson曲线构造服从VG过程的资产价格节点，并用傅里叶余弦级数近似的方法计算资产价格节点之间的转移概率。最后，从理论上证明柳树法定价欧式期权的收敛性。通过数值实验，表明柳树法与现有方法相比有相同的精度，但计算速度更快。

关键词：欧式期权；美式期权；柳树法；Variance Gamma模型

中图分类号：O29　　**文献标志码**：A

Willow Tree Method for European and American Option Pricing Under Variance Gamma Model

YAO Yi, XU Wei

(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Existing methods for European and American option pricing under the VG model are quite complex and time consuming in calculation. Thus, an efficient and accurate Willow tree method is proposed in this paper. Johnson curve is used to construct the asset price nodes in the VG process and the FFT-COS method is used to calculate the transfer probability between asset price nodes. Besides, the theoretical convergence of the Willow tree method for European options is analyzed. Moreover, some numerical experiments are conducted to demonstrate the efficiency and accuracy of the proposed method.

Key words: European option; American option; willow tree method; Variance Gamma process

现今，期权是金融市场上一种重要的衍生品对冲工具，在欧美国家已被广泛使用，在中国国内也发展迅速。决定期权定价的关键因素是股票的价格分布。Black Scholes期权定价模型假定股票的收益率服从几何布朗运动，因其简单实用是目前应用最广泛的模型。但是长期市场验证表明，该模型存在诸如“波动率微笑”的定价偏差，真实的股票价格的分布在短时间内具有尖峰厚尾的特点，是Black Scholes期权定价模型不能刻画的。1987年Madan和Seneta[1]首先提出了Variance Gamma过程，以此过程来描述股票价格的波动。Variance Gamma过程以Gamma独立增量过程作为时变过程来构造布朗运动，增加了控制峰度的参数，能更好地吻合短时间上股票收益分布比正态分布高峰厚尾、长时间上趋于正态分布的实证结果。

在Madan和Seneta提出Variance Gamma过程后，大量学者研究了基于Variance Gamma(VG)模型的金融衍生品定价问题。1990年，Madan和Seneta[2]给出了基于VG模型的期权定价方法，并与Black Scholes期权定价模型进行比较。1998年，Chang等[3]刻画了VG过程的特征函数，给出了标准欧式期权价格的闭形解，并验证了基于VG模型模拟股票价格，能很好解决Black Scholes模型中的“波动率微笑”问题。1999年，Carr和Madan[4]提出了使用快速傅里叶变换方法解决VG模型下的期权定价问题。Fiorani[5]给出了PIDE的显隐式差分数值求解方法。2004年，Hirsa和Madan[6]将其推广到美式期权的定价中。2008年，Fang和Oosterlee[7]使用傅里叶余弦级数展开方法定价欧式期权。2018年，Pachón[8]使用切比雪夫级数近似的方法定价VG模

收稿日期：2019-12-25
基金项目：国家自然科学基金面上项目(71771175)
第一作者：姚　怡(1993—)，女，博士生，主要研究方向为金融数学. E-mail：1510543@tongji.edu.cn
通信作者：许　威(1978—)，男，副教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为金融数学.
E-mail：wdxu@tongji.edu.cn

论文拓展介绍

型下的欧式期权。近年来,国内学者也对VG模型下期权的定价进行了研究。奚炜[9]给出了VG期权定价模型的一种完备解析表达形式。肖爽[10]将鞅方法和特征函数法相结合求得欧式期权的解析解。李畅[11]做了期权定价实证分析,证明了VG模型下期权价格与市场价格趋势一致,拟合程度良好,优于传统Black Scholes模型。但是上述方法都较为复杂,理解与实现不易,特别是在定价VG过程下的美式期权时有一定的困难,且计算运行时间较长。

本文在VG模型下,提出了基于柳树结构的定价欧式与美式期权的方法。柳树法[12]最初通过构造离散的马尔科夫过程来刻画几何布朗运动对欧式期权定价。柳树结构的优点是每个时刻上的资产价格数是常数,因此,随着时间步数的增加,柳树上节点的总个数是线性增长的,而不是二叉树中的平方增长,提高了数值方法的效率。柳树法的简单结构示意图可参见文献[13]。

在VG模型下,本文提出柳树的构造过程主要分为两步:首先在计算对数资产价格四阶矩的基础上,利用Johnson曲线转换公式的逆变换,将服从标准正态分布的离散节点转换成服从VG过程的价格节点,得到标的资产价格的估计;然后由于VG模型满足的条件概率函数复杂的特性,使用傅里叶余弦近似的方法,计算得到资产价格节点相邻时刻间的转移概率,从而完整构造基于VG模型的柳树。在已构建柳树的基础上,使用倒推的方法对欧式与美式期权定价。另外,还对使用该算法计算欧式期权价格时产生的截断误差进行分析,证明定价欧式期权时柳树法的收敛性质。最后,对柳树法定价VG模型下欧式期权的结果与蒙特卡洛方法、傅里叶余弦级数展开方法[7]的结果进行比较。

1　VG模型下期权的柳树法定价

1.1　资产价格估计

VG过程由Madan和Seneta提出,是纯跳跃Levy过程中最为典型的一种。VG过程X_t是将布朗运动置于Gamma过程的时变下获得:

$$\begin{aligned}X_t(t;\sigma,\upsilon,\theta)=b(\gamma(t;1,\upsilon);\theta,\sigma)=\\\theta\gamma(t;1,\upsilon)+\sigma W(\gamma(t;1,\upsilon))\end{aligned}\tag{1}$$

其中$\mathrm{b}(t;\theta,\sigma)=\theta t+\sigma W(t)$是漂移项为$\theta$、波动率为$\sigma$的布朗运动,$W(t)$是标准布朗运动;$\gamma(t;\mu,\upsilon)$是均值为$\mu$、方差为$\upsilon$的Gamma过程。由文献[3]可知,参数$\sigma$控制VG过程的波动率,参数$\upsilon$控制VG过程的峰度,参数$\theta$控制VG过程的偏度。

在VG指数模型下,股票价格基于方程

$$S_t=S_0\mathrm{e}^{(r+\omega)t+X_t}\tag{2}$$

其中$\omega=\frac{t}{v}\ln(1-v\theta-\frac{\sigma^2 v}{2})$,$\omega$为在风险中性测度下的修正项。为了简便运算,首先将资产价格取对数,令$R_t=(r+\omega)t+X_t$,则时刻t的资产价格S_t即为$S_t=S_0\cdot\mathrm{e}^{R_t}$。由文献[3]可知,VG过程$X_t$的特征函数$\phi_{X_t}$为

$$\phi_{X_t}(u)=(\frac{1}{1-\mathrm{i}u\theta v+\frac{1}{2}\sigma^2u^2v})^{\frac{t}{v}}\tag{3}$$

所以R_t的特征函数为

$$\phi_{R_t}=(\frac{1}{1-\mathrm{i}u\theta v+\frac{1}{2}\sigma^2u^2v})^{\frac{t}{v}}.\mathrm{e}^{\mathrm{i}u(r+\omega)t}\tag{4}$$

又由文献[14]可知,若过程R_t存在相应的特征函数,则该过程的n阶矩皆可由相应的特征函数求得,如式(5):

$$E[R_t^{(n)}]=i^{-n}[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\mu^n}\phi_{R_t}(u)|_{u=0}]\tag{5}$$

所以VG过程下的R_t的四阶矩为:

$$\begin{aligned}&E[R_t]=(r+\omega+\theta)t\\&V[R_t]=E[R_t^2]-E[R_t]^2=\\&(\theta^2v+\sigma^2)t\\&S[R_t]=E[(\frac{R_t-E[R_t]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_t)}})^3]=\\&\frac{2\theta^3v^2+3\theta v\sigma^2}{\sqrt{t}\,(\theta^2v+\sigma^2)^{1.5}}\\&K[R_t]=E[(\frac{R_t-E[R_t]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_t)}})^4]=\\&\frac{3v}{t}(2-\frac{\sigma^4}{(\sigma^2+v\theta^2)^2})+3\end{aligned}\tag{6}$$

其中,$E[R_t]$、$V[R_t]$、$S[R_t]$、$K[R_t]$分别为R_t的期望、方差、偏度与峰度。

为了构造基于VG模型的资产价格柳树结构,首先需要得到资产价格节点的估计。将时间区间$[0,\mathrm{T}]$离散为N个时间节点,即$0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T$,$t_n=n\Delta t,n=1,2,\cdots,N,\Delta t=T/N$。在任意时间节点$t_n$,可以在计算对数资产价格四阶矩的基础上,通过Johnson曲线,将服从标准正态分布的离散节点转换成服从过程R_t四阶矩的离散节点$R_i^n,i=1,2,\cdots,m$,再转换为资产价格节点$S_i^n,i=1,2,\cdots,m$,在柳树上的每个离散时间节点t_n,都估计m个可能的资产价格节点。

利用Johnson曲线转换公式的逆变换,将一个标准正态分布的随机变量转换成一个满足式(6)R_t的四阶矩的随机变量,首先生成离散节点R_i^n,再转换为资产价格节点S_i^n,从而估计资产价格的分布。Johnson提出的方法[15]可以将任意连续随机变量转换成正态分布的随机变量Z。其主要原理是通过计算已知变量的四阶矩,然后代入统一的公式中估计该变量的离散值。该模型可以灵活匹配任意变量的期望、方差、偏度和峰度,并且根据偏度和峰度便可唯一地确定模型中所需函数的具体类型。Johnson曲线的公式如下:

$$Z=a+b\cdot g\left(\frac{X-c}{d}\right)$$

基于文献[16]提出的算法,参数a、b、c、d和函数$g(\cdot)$的类型都可以根据对应随机变量的四阶矩求得。而根据Johnson曲线的逆变换,则可以将一个标准正态分布的随机变量Z转换成给定的分布X,即

$$X=c+d\cdot g^{-1}\left(\frac{Z-a}{b}\right) \tag{7}$$

由此,可以利用Johnson曲线的逆变换,可得基于VG模型的资产价格柳树。该算法总结如下:

对于一个标的资产,给定其初始价格S_0,将时间区间$[0,T]$划分为N个时间步数,在每个时刻t_n有m个可能的资产价格,且满足式(2)。时刻t_n的m个资产价格离散值可通过以下步骤得到:

(1)定义资产回报$R_t=\ln(S_t/S_0)$,通过式(6)计算R_t的期望、方差、偏度和峰度。

(2)构造序列$\{(z_i,q_i)\}$,令$q_i=(i-0.5)^\gamma/m$,$\gamma=0.6$,$q_i=q_{m+1-i}$, $i=1,2,\cdots,m/2$. 标准化q_i, 即 $q_i=q_i/\sum_{i=1}^m q_i$, $i=1,2,\cdots,m$; $z_1=N^{-1}(q_1/2)$, $z_i=N^{-1}(\sum_{j=1}^{i-1}q_j+q_i/2)$, $i=1,2,\cdots,m$,其中$N(\cdot)$是标准正态分布的累积密度函数。

(3)根据步骤(2)中的$\{z_i\}$,由式(7)可以计算出随机变量R_t的离散值:

$$R_i^n=c+d\cdot g^{-1}\left(\frac{z_i-a}{b}\right),\quad i=1,2,\cdots,m.$$

对于不同的分布族,对应的参数a、b、c、d可通过文献[16]得到。

(4)估计时刻t的m个标的资产价格值:

$$S_t^i=S_0\cdot e^{R_i^n},\quad i=1,2,\cdots,m$$

其中S_i^n是时刻t_n的第i个资产价格节点的值。

1.2 转移概率计算

在获得资产价格的估计后,构造转移概率矩阵$[p_{ij}^n]_{m\times m}$来刻画资产价格的变化。假设时刻t_n的第i个资产价格S_i^n已知,需求从在t_n时刻资产价格为S_i^n的节点转移到t_{n+1}时刻资产价格为S_j^{n+1}节点的转移概率p_{ij}^n. 下述算法即阐述了计算资产价格柳树相邻时刻资产价格节点间的转移概率计算方法。

时刻t_n的资产价格柳树节点为$S(t_n)=[S_1^n,S_2^n,\cdots,S_m^n]$,时刻$t_{n+1}$的柳树节点为$S(t_{n+1})=[S_1^{n+1},S_2^{n+1},\cdots,S_m^{n+1}]$,从$t_n$到$t_{n+1}$时刻的转移概率矩阵$[p_{ij}^n]$的计算方法如下:

基于t_{n+1}时刻的资产价格节点$S(t_{n+1})$计算出累计分布函数区间节点$[C_1^n,C_2^n,\cdots,C_{m+1}^n]$,其中

$$C_1^n=-\infty, C_{m+1}^n=\infty, C_i^n=\frac{S_{i-1}^{n+1}+S_i^{n+1}}{2} \tag{8}$$

(2)计算从t_n时刻的S_i^n节点转移到t_{n+1}时刻的S_j^{n+1}节点的条件转移概率。

$$p_{ij}^n=P(C_j^{n+1}<S^{n+1}<C_{j+1}^{n+1}|S_i^n)=\int_{C_j^{n+1}}^{C_{j+1}^{n+1}}p(x|S_i^n)dx, i,j=1,2,\cdots,m \tag{9}$$

其中,$p(x|S_i^n)$是以S_i^n为条件的条件密度函数。

在利用上述算法计算资产价格柳树各节点之间的转移概率$[p_{ij}^n]_{m\times m}$时,需要知道步骤(2)中的条件密度函数$p(S(t_{n+1})|S(t_n))$。但是,在计算柳树节点之间的转移概率时,若条件密度函数没有显示表达式时,显然无法通过积分运算求得转移概率,所以基于Fang等[7]的思想,使用特征函数的傅里叶余弦变换方法,用特征函数傅里叶变换的余弦级数近似条件密度函数的积分。该方法只需要模型的特征函数,不需要条件密度函数,更具有一般性。因VG过程的特征函数已知,所以本文使用特征函数的傅里叶余弦变换方法计算各资产价格节点之间的转移概率。

傅里叶变换和逆变换的形式为

$$\phi(u)=\int_R e^{ixu}f(x)dx$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-ixu}\phi(x)dx$$

其中,$f(x)$和$\phi(u)$分别为R_t的概率密度函数与特征函数,$\phi(u)$的表达式见式(4)。对于定义在$[0,\pi]$上的函数,其余弦展开如下式:

$$f(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}{}' A_k\cos(k\theta)$$

其中$A_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\theta)\cos(k\theta)d\theta$。式中的$\sum'$符号表示在求和时的第1项需要乘以$\frac{1}{2}$。可以将上述余弦展开公式做换元变换,以作用于任意有限区间

$[a,b]\in R$上。

$$\theta:=\frac{x-a}{b-a}\pi;x=\frac{b-a}{\pi}\theta+a$$

从而傅里叶余弦展开变为下式:

$$f(y|x)=\sum_{k=0}^{\infty}{}' A_k\cos(k\pi\frac{y-a}{b-a})$$

其中系数A_k为Fourier-Cosine系数,定义如下:

$$A_k=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(y|x)\cos(k\pi\frac{y-a}{b-a})\mathrm{d}y$$

由傅里叶变换存在的必要条件可知,被积函数的值在趋近∞时应该趋向于零,所以可将积分区间从R进行缩减至区间$[a,b]$,并仍保留精度。即有

$$\phi(u)=\int_R \mathrm{e}^{iux}f(x)\mathrm{d}x\approx\int_a^b \mathrm{e}^{iux}f(x)\mathrm{d}x:=\phi_1(u)$$

Fang 和 Oosterlee[7]中对$[a,b]$区间的确定给出了一种方法

$$[a,b]=[c_1-L\sqrt{c_2+\sqrt{c_4}},c_1+L\sqrt{c_2+\sqrt{c_4}}]$$

其中,c_n为n阶累积量。若随机变量x的特征函数记作$\phi_x(u)$,记$\Psi(u)=\ln\phi_x(u)$,则$c_n:=(-i)^n\Psi^n(0)$.

序列系数A_k又与条件特征函数ϕ_1有直接的关系,可写为

$$A_k\approx\frac{2}{b-a}\mathrm{Re}\{\phi_1(\frac{k\pi}{b-a};x)\exp(-\mathrm{i}\frac{ka\pi}{b-a})\}\cos(k\pi\frac{y-a}{b-a})$$

其中,$\phi_1(u;x)=\phi(u)\cdot\mathrm{e}^{iux}$,$\phi(u)$已由式(4)给出。

又根据傅里叶理论,cosine 序列函数属于$C^\infty([a,b]\in R)$,有非零导数及指数收敛的性质。因此,序列系数截断N_0项,得到条件密度函数的逼近表达式:

$$f(y|x)\approx\sum_{k=0}^{N_0-1}{}'\frac{2}{b-a}\mathrm{Re}\{\phi_1(\frac{k\pi}{b-a};x)\exp(-\mathrm{i}\frac{ka\pi}{b-a})\}\cos(k\pi\frac{y-a}{b-a})$$

对于任意区间$[c,d]\subset[a,b]$,对$f(y|x)$做积分便可以求得区间$[c,d]$对应的累计分布函数

$$\int_c^d f(y|x)\approx\sum_{k=0}^{N_0-1}{}'\frac{2}{b-a}\mathrm{Re}\{\phi_1(\frac{k\pi}{b-a};x)\exp(-\mathrm{i}\frac{ka\pi}{b-a})\}\int_c^d\cos(k\pi\frac{y-a}{b-a})\mathrm{d}y$$

令$\Upsilon_k(c,d)=\int_c^d\cos(k\pi-\frac{y-a}{b-a})\mathrm{d}y$,则通过简单的积分运算,可以直接求得$\Upsilon_k(c,d)$:

$$\Upsilon_k(c,d)=\begin{cases}[\sin(k\pi\frac{d-a}{b-a})-\sin(k\pi\frac{c-a}{b-a})]\frac{b-a}{k\pi},k\neq 0\\ d-c,k=0\end{cases}$$

综上,条件转移概率可由下式计算得到:

$$P(c\leqslant y\leqslant d|x)\approx\sum_{k=0}^{N_0-1}{}'[\frac{2}{b-a}\mathrm{Re}\{\phi_1(\frac{k\pi}{b-a};x)\exp(-\mathrm{i}\frac{ka\pi}{b-a})\}\Upsilon_k(c,d)]\tag{10}$$

所以,在计算时刻t_n下资产价格节点S_i^n到时刻t_{n+1}下资产价格节点S_j^{n+1}的转移概率p_{ij}^n时,只需按照式(10)计算。其中,条件转移概率的条件x为S_i^n,区间$[c,d]$即为$[C_j^{n+1},C_{j+1}^{n+1}]$,计算方法由式(8)给出。

由此,结合 1.1 节资产价格的估计和 1.2 节转移概率矩阵的计算,就完整地构造了基于 VG 这一 Levy 模型的柳树。

1.3　计算欧式期权与美式期权价格

根据1.1与1.2节中构建的柳树使用倒推法计算欧式与美式期权的价格。

对于到期日为T、敲定价格为K的欧式期权,它的价格可以通过从T时刻开始按离散时间节点一步步往前倒推得到。以欧式看涨期权为例,在到期日T时刻,第i个柳树节点处的期权价值为

$$V_i^N=\max(S_i^N-K,0)$$

在时刻t_{N-1},第j个节点处的期权价值为

$$V_j^{N-1}=\mathrm{e}^{-r\Delta t}\sum_{i=1}^{m}p_{ji}^{N-1}V_i^N$$

依次类推,在时刻t_1,各节点处的期权价值为V_l^1,从S_0转移到时刻t_1各节点的转移概率为q_l,则初始时刻t_0的欧式期权价格为

$$V_0=\mathrm{e}^{-r\Delta t}\sum_{l=1}^{m}q_lV_l^1$$

对于到期日为T、敲定价格为K的美式期权,它的价格也可以通过从T时刻开始按离散时间节点往前倒推得到。同样,在到期日T时刻,第i个柳树节点处的看涨美式期权价值为

$$V_i^N=\max(S_i^N-K,0)$$

在时刻t_{N-1},第j个节点处的期权价值为

$$V_j^{N-1}=\max(g(S_j^{N-1},K),\mathrm{e}^{-r\Delta t}\sum_{i=1}^{m}p_{ji}^{N-1}V_i^N)$$

其中,$g(S_j^{N-1},K)=\max(S_j^{N-1}-K)$. 以此类推,可以计算得到$t_0$时刻的美式期权价格。

2 柳树法的截断误差

对定价VG模型下欧式期权的柳树法进行误差分析。由文献[5],在VG过程X_t下,股票价格服从方程$S_t=S_0\mathrm{e}^{(r+\omega)t+X_t}$时,欧式期权价格$V(S,t)$服从以下PIDE方程:

$$V_t+(r+\omega)SV_S-rV+\int_{-\infty}^{+\infty}[V(S\mathrm{e}^x,t)-V(S,t)]v(x)dx=0 \tag{11}$$

其中,$v(x)$是VG过程X_t的Levy测度。令$D_t=\ln(S_t)$,则上式变换为:

$$\overline{V}_t+(r+\omega)\overline{V}_D-r\overline{V}+\int_{-\infty}^{\infty}[\overline{V}(x+D,t)-\overline{V}(D,t)]v(x)dx=0 \tag{12}$$

其中,$\overline{V}(D+x,t)=V(\mathrm{e}^{D+x},t)$。

使用柳树法定价时,在t_n时刻,期权的价格可以由倒推公式求得,即

$$\overline{V}_i^n=\mathrm{e}^{-r\Delta t}\sum\nolimits_{j=1}^n p_{ij}^n\overline{V}_j^{n+1} \tag{13}$$

其中$\overline{V}_i^n$表示t_n时刻对数资产价格D_i^n处的期权价值。

定理1 假设资产价格S服从$S_t=S_0\mathrm{e}^{(r+\omega)t+X_t}$,$X_t$是VG过程,由柳树法定价式(13)计算的欧式期权价值与方程(12)的真实解之间的截断误差为$O(\Delta t)+R$,即截断误差的大小取决于VG过程X_t的Levy测度$v(x)$的五阶积分项$\int_{-\infty}^{\infty}x^5v(x)\mathrm{d}x$。

证明 首先,在VG模型下,定义$\Delta D_{ji}=D_j^{n+1}-D_i^n$. 将柳树法倒推式(13)中的$\overline{V}_j^{n+1}$在$(D_i^n,t_n)$处泰勒展开。

$$\begin{aligned}\overline{V}_j^{n+1}&=\overline{V}(D_i^n+\Delta D_{ji},t_n+\Delta t)=\\&\overline{V}_i^n+(\overline{V}_D\Delta D_{ji}+\overline{V}_t\Delta t)+\\&(\frac{1}{2}\overline{V}_{DD}\Delta D_{ji}^2+\frac{1}{2}\overline{V}_{tt}\Delta t^2+\overline{V}_{Dt}\Delta D_{ji}\Delta t)+\\&\frac{1}{6}(\overline{V}_{DDD}\Delta D_{ji}^3+3\overline{V}_{DDt}\Delta D_{ji}^2\Delta t+\\&3\overline{V}_{Dtt}\Delta D_{ji}\Delta t^2)+\frac{1}{24}(\overline{V}_{DDDD}\Delta D_{ji}^4+\\&4\overline{V}_{DDDt}\Delta D_{ji}^3\Delta t+\\&6\overline{V}_{DDtt}\Delta D_{ji}^2\Delta t^2)+O(\Delta t^3)\end{aligned} \tag{14}$$

其中$\overline{V}_t$表示$\overline{V}$对时间t的一阶偏导数在(D_i^n,t_n)处的值,$\overline{V}_D$表示$\overline{V}$关于D的一阶偏导数在(D_i^n,t_n)处的值,$\overline{V}_{DD}$表示$\overline{V}$关于D的二阶偏导数在(D_i^n,t_n)处的值,其他同理。

将柳树法倒推式(13)中的贴现项$\mathrm{e}^{-r\Delta t}$泰勒展开,并将式(14)代入(13):

$$\begin{aligned}\overline{V}_i^n&=\mathrm{e}^{-r\Delta t}\sum\nolimits_{j=1}^n p_{ij}^n\overline{V}_j^{n+1}=\\&(1-r\Delta t)\sum\nolimits_{j=1}^n p_{ij}^n\{\overline{V}_i^n+\overline{V}_D\Delta D_{ji}+\\&\overline{V}_t\Delta t+(\frac{1}{2}\overline{V}_{DD}\Delta D_{ji}^2+\frac{1}{2}\overline{V}_{tt}\Delta t^2+\\&\overline{V}_{Dt}\Delta D_{ji}\Delta t)+\frac{1}{6}(\overline{V}_{DDD}\Delta D_{ji}^3+\\&3\overline{V}_{DDt}\Delta D_{ji}^2\Delta t+3\overline{V}_{Dtt}\Delta D_{ji}\Delta t^2)+\\&\frac{1}{24}(\overline{V}_{DDDD}\Delta D_{ji}^4+4\overline{V}_{DDDt}\Delta D_{ji}^3\Delta t+\\&6\overline{V}_{DDtt}\Delta D_{ji}^2\Delta t^2)+O(\Delta t^3)\}\end{aligned} \tag{15}$$

在给定D_i^n的条件下,ΔD_{ji}的四阶矩为:

$$\begin{cases}E(\Delta D_{ji}|D_i^n)=\sum\nolimits_{j=1}^n p_{ij}^n\Delta D_{ji}=(r+\omega+\theta)\Delta t\\E(\Delta D_{ji}^2|D_i^n)=\sum\nolimits_{j=1}^n p_{ij}^n\Delta D_{ji}^2=\\\qquad(r+\omega+\theta)^2\Delta t^2+(\sigma^2+\upsilon\theta^2)\Delta t\\E(\Delta D_{ji}^3|D_i^n)=\sum\nolimits_{j=1}^n p_{ij}^n\Delta D_{ji}^3=\\\qquad\upsilon\theta(3\sigma^2+2\upsilon\theta^2)\Delta t+(r+\omega+\theta)^3\Delta t^3+\\\qquad3(r+\omega+\theta)(\sigma^2+\theta^2\upsilon)\Delta t^2\\E(\Delta D_{ji}^4|D_i^n)=\sum\nolimits_{j=1}^n p_{ij}^n\Delta D_{ji}^4=\\\qquad3[2\upsilon-\upsilon\sigma^4](\sigma^2+\upsilon^2\theta^2)^2\Delta t+O(\Delta t^2)\end{cases} \tag{16}$$

将式(16)中的四阶矩代入式(15),化简得:

$$\begin{aligned}\overline{V}_i^n&=\overline{V}_i^n+\{\overline{V}_t+(r+\omega)\overline{V}_D-r\overline{V}+\theta\overline{V}_D+\\&\frac{1}{2}(\sigma^2+\theta^2\upsilon)\overline{V}_{DD}+\frac{1}{6}\theta\upsilon(3\sigma^2+2\upsilon\theta^2)\overline{V}_{DDD}+\\&\frac{1}{8}[2\upsilon-\upsilon\sigma^4](\sigma^2+\upsilon\theta^2)^2\overline{V}_{DDDD}\}\Delta t+\\&O(\Delta t^2)\end{aligned}$$

即可化简得式(17):

$$\begin{aligned}&\overline{V}_t+(r+\omega)\overline{V}_D-r\overline{V}+\theta\overline{V}_D+\\&\frac{1}{2}(\sigma^2+\theta^2\upsilon)\overline{V}_{DD}+\frac{1}{6}\theta\upsilon(3\sigma^2+2\upsilon\theta^2)\overline{V}_{DDD}+\\&\frac{1}{8}[2\upsilon-\upsilon\sigma^4](\sigma^2+\upsilon\theta^2)^2\overline{V}_{DDDD}+\\&O(\Delta t)=0\end{aligned} \tag{17}$$

另一方面,因为服从VG过程X_t的欧式期权的PIDE方程为式(12),考虑其中的积分项

$$\int_{-\infty}^{\infty}[\overline{V}(x+D,t)-\overline{V}(D,t)]v(x)dx$$

将$\overline{V}(D_i+x,t_n)$在(D_i,t_n)处四阶泰勒展开,得到:

$$\overline{V}(D_i+x,t_n)=\overline{V}(D_i,t_n)+\overline{V}_D x+\frac{1}{2}\overline{V}_{DD}x^2+\frac{1}{6}\overline{V}_{DDD}x^3+\frac{1}{24}\overline{V}_{DDDD}x^4+\frac{x^5}{5!}\overline{V}^{(5)}(\xi) \tag{18}$$

其中,$\xi\in(D_i,D_i+x)$。将$\overline{V}(D_i+x,t_n)$的泰勒展开式(18)代入积分项$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{V}(D_i+x,t_n)v(x)\mathrm{d}x$中得:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\overline{V}(D_i+x,t_n)v(x)\mathrm{d}x=\\&\int_{-\infty}^{\infty}\overline{V}\cdot v(x)\mathrm{d}x+\\&\int_{-\infty}^{\infty}\overline{V}_D\cdot xv(x)\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{V}_{DD}\cdot x^2v(x)\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{6}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{V}_{DDD}\cdot x^3v(x)\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{24}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{V}_{DDDD}\cdot x^4v(x)\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{120}\int_{-\infty}^{\infty}x^5v(x)\overline{V}^{(5)}(\xi)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{19}$$

所以式(12)中积分项为:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}[\overline{V}(x+D_{\mathrm{i}},t_n)-\overline{V}(D_i,t_n)]v(x)\mathrm{d}x=\\&\int_{-\infty}^{\infty}\overline{V}(x+D_{\mathrm{i}})v(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{\infty}\overline{V}(D_{\mathrm{i}})v(x)\mathrm{d}x=\\&\overline{V}_D\int_{-\infty}^{\infty}xv(x)\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{2}\overline{V}_{DD}\int_{-\infty}^{\infty}x^2v(x)\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{6}\overline{V}_{DDD}\int_{-\infty}^{\infty}x^3v(x)\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{24}\overline{V}_{DDDD}\int_{-\infty}^{\infty}x^4v(x)\mathrm{d}x+\\&\frac{1}{120}\overline{V}^{(5)}(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}x^5v(x)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{20}$$

又由VG过程的性质,其Levy测度$v(x)$满足:

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}xv(x)\mathrm{d}x=\theta\\\int_{-\infty}^{\infty}x^2v(x)\mathrm{d}x=\sigma^2+\theta^2\upsilon\\\int_{-\infty}^{\infty}x^3v(x)\mathrm{d}x=\theta\upsilon(3\sigma^2+2\theta^2\upsilon)\\\int_{-\infty}^{\infty}x^4v(x)\mathrm{d}x=3[2\upsilon-\upsilon\sigma^4](\sigma^2+\theta^2\upsilon)^2\\\int_{-\infty}^{\infty}x^5v(x)\mathrm{d}x=24\theta^5\upsilon^4+30\theta\upsilon^2\sigma^4+60\theta^3\upsilon^3\sigma^2\end{cases} \tag{21}$$

将式(21)代入式(20),则式(12)中的积分项为

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}[\overline{V}(x+D,t)-\overline{V}(D,t)]v(x)\mathrm{d}x=\\&\theta\overline{V}_D+\frac{1}{2}(\sigma^2+\theta^2\upsilon)\overline{V}_{DD}+\frac{1}{6}\theta\upsilon(3\sigma^2+\\&2\upsilon\theta^2)\overline{V}_{DDD}+\frac{1}{8}[2\upsilon-\upsilon\sigma^4(\sigma^2+\\&\upsilon\theta^2)^{-2}](\sigma^2+\upsilon\theta^2)^2\overline{V}_{DDDD}+R\end{aligned} \tag{22}$$

假设$|\overline{V}^{(5)}(\xi)|\leqslant M_1$,$M_1$为常数,式(22)中余项$R$为:

$$\begin{aligned}R&=\frac{1}{120}\overline{V}^{(5)}(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}x^5v(x)\mathrm{d}x=\\&(\frac{\theta^5\upsilon^4}{5}+\frac{\theta\upsilon^2\sigma^4}{4}+\frac{\theta^3\upsilon^3\sigma^2}{2})\overline{V}^{(5)}(\xi)\end{aligned} \tag{23}$$

将式(22)与通过柳树法计算得到的式(17)对比,则可得

$$\begin{aligned}&\overline{V}_t+(r+\omega)\overline{V}_D-r\overline{V}+\\&\int_{-\infty}^{\infty}[\overline{V}(x+D,t)-\\&\overline{V}(D,t)]v(x)\mathrm{d}x+\\&R+O(\Delta t)=0\end{aligned} \tag{24}$$

所以,在VG过程X_t下,由柳树法定价式(13)计算的欧式期权价值与方程(12)的真实解之间的截断误差为$O(\Delta t)+R$。

由上述定理1可知,因为用柳树法定价VG过程下欧式期权时,使用Johnson Curve方法匹配了VG过程的四阶矩,所以截断误差里有五阶矩的信息,柳树法定价欧式期权的截断误差取决于式(23)中的余项R,即VG过程X_t的Levy测度$v(x)$的五阶积分项$\int_{-\infty}^{\infty}x^5v(x)\mathrm{d}x$,当其很小时,柳树法收敛。第3节数值实验选取了VG过程的2组参数,如表1所示。这2组参数下,余项R分别为$-1.65\times10^{-7}\times\overline{V}^{(5)}(\xi)$和$-2.64\times10^{-6}\times\overline{V}^{(5)}(\xi)$. 余项$R$很小,数值结果也说明了柳树法精度较高。

3 Variance Gamma模型下欧式期权与美式期权定价的数值实验

通过实验对不同参数的欧式期权与美式期权进行分析,比较柳树法与蒙特卡洛方法的数值结果。所有数值实验的程序均在操作系统为64位Windows10专业版的计算机上运行,内存为32GB,处理器为Intel(R) Core(TM) i5-8400U CPU@2. 80GHz,使用的软件版本为Matlab R2018b。

实验中,柳树法中资产价格节点个数$m=50$,股票初始价格$S_0=100$,蒙特卡洛方法的模拟路径数为10万次。选取2组VG模型参数的参数如表1所示。第1组参数选自文献[17],第2组参数选自文献[18]。

在第1组数值实验中使用柳树法计算VG模型2组参数下不同离散步数欧式看涨期权的价值。固定敲定价格都为$K=100$,第1组参数的到期日$T_1=0.25$,第2组参数的到期日$T_2=0.50$。分别选取离散步数N为20、40、60、80步,实验结果展示于表2。从表2可以看出,柳树法的定价结果均落在蒙特卡洛模拟10万次模拟的95%置信区间内。第1组参数使用文献[7]中的傅里叶余弦方法得到的欧式期权价格为3.826 7,第2组参数使用傅里叶余弦方法得到的欧式期权价格为7.103 7,与柳树法计算结果的相对误差都小于0.5%,说明了柳树法定价期权的精确性。比较柳树法与蒙特卡洛方法的计算时间,柳树法的计算时间则有明显的优势。

表1 VG模型的2组参数

Tab. 1 Two sets of parameters of VG model

参数组	r	σ	θ	υ
1	0.050 00	0.161 60	−0.126 40	0.083 40
2	0.053 30	0.178 75	−0.306 49	0.133 17

表2 不同离散步数下柳树法和蒙特卡洛法定价VG模型下欧式看涨期权的结果

Tab. 2 Results of European option pricing at different N values

参数	离散步数	欧式期权价值/元			时间/s	
		柳树法	蒙特卡洛95%置信区间	傅里叶余弦法	柳树法	蒙特卡洛法
1	20	3.796 4	[3.7921,3.8561]	3.826 7	0.35	4.36
	40	3.819 1	[3.7869,3.8513]		0.63	6.78
	60	3.813 8	[3.7780,3.8513]		0.91	8.87
	80	3.829 8	[3.7919,3.8513]		1.10	10.92
2	20	7.136 7	[7.0438,7.1533]	7.103 7	0.36	4.34
	40	7.108 3	[7.0156,7.1243]		0.64	6.89
	60	7.087 9	[7.0686,7.1778]		0.90	8.95
	80	7.094 8	[7.0627,7.1721]		1.12	11.24

表3展示了设定不同敲定价格K后柳树法与蒙特卡洛方法的计算结果,这里统一令离散步数N为60。对于2组参数,设定敲定价格K分别为95、98、102和105,结果说明敲定价格K的变化不影响柳树法定价欧式期权的表现,定价结果均落在蒙特卡洛模拟的99%置信区间内。

表3 不同敲定价格K下柳树法和蒙特卡洛法定价VG模型下欧式看涨期权的结果

Tab. 3 Results of European option pricing at different K values

参数1敲定价格	欧式期权价值/元			参数2敲定价格	欧式期权价值/元		
	柳树法	蒙特卡洛95%置信区间	傅里叶余弦法		柳树法	蒙特卡洛95%置信区间	傅里叶余弦法
95	7.272 4	[7.209 2,7.290 4]	7.243 3	95	10.300 3	[10.256 6,10.385 1]	10.298 3
98	5.089 2	[5.030 9,5.102 9]	5.062 7	98	8.300 6	[8.255 6,8.372 7]	8.310 5
102	2.823 2	[2.769 9,2.826 8]	2.803 4	102	5.978 2	[5.931 8,6.012 9]	5.998 8
105	1.673 5	[1.634 1,1.679 0]	1.669 6	105	4.526 0	[4.487 5,4.576 6]	4.541 3

考虑欧式期权到期日时间的不同对柳树法定价的影响,对于2组参数分别选取不同的到期日T,结果展示于表4中。结果表明到期日T的变化不影响柳树法定价欧式期权的表现,定价结果均落在蒙特卡洛模拟的99%置信区间内。

表4 不同到期日T下柳树法和蒙特卡洛法定价VG模型下欧式看涨期权的结果

Tab. 4 Results of European option pricing at different T values

参数1到期日	欧式期权价值/元			参数2到期日	欧式期权价值/元		
	柳树法	蒙特卡洛95%置信区间	傅里叶余弦法		柳树法	蒙特卡洛95%置信区间	傅里叶余弦法
0.1	2.146 0	[2.138 3,2.176 8]	2.165 1	0.2	3.994 5	[4.003 2,4.063 5]	4.037 7
0.2	3.351 7	[3.304 7,3.361 5]	3.335 5	0.4	6.166 0	[6.149 4,6.243 9]	6.198 9
0.3	4.308 2	[4.250 1,4.321 8]	4.281 2	0.6	7.967 1	[7.874 4,7.987 3]	7.943 3
0.4	5.129 8	[5.085 1,5.169 9]	5.113 9	0.8	9.492 7	[9.410 7,9.528 7]	9.485 1
0.5	5.884 6	[5.863 0,5.960 1]	5.875 5	1.0	10.942 6	[10.855 0,10.985 6]	10.905 1

接下来,通过数值实验验证柳树法计算美式期权的精确性。表5展示了在不同离散时间步数时,柳树法计算敲定价格K为100的美式看跌期权价格与蒙特卡洛方法的比较。蒙特卡洛方法使用了10万次的最小二乘法模拟。从表5可以看出,柳树法的计算结果均落在蒙特卡洛模拟的95%置信区间中,说明了柳树法定价美式期权的精确性,并在计算时间上远小于蒙特卡洛方法。

表6与表7展示了在不同的敲定价格K与不同的到期日T下,柳树法与蒙特卡洛法对美式看跌期权的定价结果。柳树法的计算结果完全落在95%的置信区间内,说明了敲定价与到期日这2个参数的变化不会影响柳树法的准确性。

表5　不同离散步数下柳树法和蒙特卡洛法定价VG模型下美式看跌期权的结果

Tab. 5　Results of American option pricing at different N values

参数	离散步数	美式期权价值/元		时间/s	
		柳树法	蒙特卡洛95%置信区间	柳树法	蒙特卡洛法
1	20	2.6314	[2.6009,2.6357]	0.41	5.15
	40	2.6355	[2.6586,2.6705]	0.69	6.98
	60	2.6624	[2.6521,2.6823]	0.97	9.03
	80	2.6792	[2.6663,2.6824]	1.21	12.56
2	20	4.7589	[4.7137,4.7598]	0.43	5.14
	40	4.7781	[4.7361,4.7849]	0.72	6.86
	60	4.7364	[4.7323,4.7621]	0.99	9.17
	80	4.7928	[4.7587,4.8188]	1.28	12.23

表6　不同敲定价格K下柳树法和蒙特卡洛法定价VG模型下美式看跌期权的结果

Tab. 6　Results of American option pricing at different K values

参数1敲定价格	美式期权价值/元		参数2敲定价格	美式期权价值/元	
	柳树法	蒙特卡洛95%置信区间		柳树法	蒙特卡洛95%置信区间
95	1.0987	[1.0742,1.0995]	95	2.8654	[2.8622,2.8781]
98	1.8953	[1.8831,1.8993]	98	3.8430	[3.8360,3.8772]
102	3.6481	[3.6466,3.6721]	102	5.5804	[5.5881,5.6021]
105	5.5802	[5.5766,5.6069]	105	7.1818	[7.1810,7.2186]

表7　不同到期日T下柳树法和蒙特卡洛法定价VG模型下美式看跌期权的结果

Tab. 7　Results of European option pricing at different T values

参数1到期日	美式期权价值/元		参数2到期日	美式期权价值/元	
	柳树法	蒙特卡洛95%置信区间		柳树法	蒙特卡洛95%置信区间
0.1	1.6694	[1.6681,1.6876]	0.2	3.0838	[3.0806,3.1019]
0.2	2.3969	[2.3836,2.4032]	0.4	4.3036	[4.3042,4.3284]
0.3	2.8889	[2.8831,2.9054]	0.6	5.1312	[5.1396,5.1863]
0.4	3.2779	[3.2736,3.2841]	0.8	5.8248	[5.8251,5.8478]
0.5	3.6028	[3.5968,3.6319]	1.0	6.3242	[6.3220,6.3758]

4　结语

基于VG模型,运用柳树法对欧式期权与美式期权进行了定价研究。首先,介绍了柳树的构造过程,主要分为两步:一是利用Johnson曲线转换公式的逆变换,通过计算随机变量的四阶矩,将一个标准正态分布的随机变量转换成一个服从VG过程的连续随机变量,得到标的资产价格的估计;二是由于VG模型满足的条件概率函数复杂的特性,使用了傅里叶余弦近似的方法,计算得到资产价格节点相邻时刻间的转移概率,从而完整构造了基于VG模型的柳树。并使用倒推的方法对欧式与美式期权定价。

分析了该算法对欧式期权定价的误差,证明了柳树法的截断误差为$O(\Delta t)+R$。最后,将用柳树法定价VG模型下欧式与美式期权的结果与蒙特卡洛方法进行比较,数值实验的结果表明,柳树法不仅能达到蒙特卡洛方法的计算精度,而且在运行时间上明显少于蒙特卡洛方法,从而说明了柳树法在欧式与美式期权定价中的优势。

本文研究的VG模型只是Levy过程中的一种,未来的研究方向之一是将该方法推广到其他的Levy过程,如Kou提出的双指数跳扩散模型、NIG模型和CGMY模型等。

参考文献:

[1]　MADAN D B, SENETA E. Simulation of estimates using the empirical characteristic function [J]. International Statistical Review, 1987, 55(2): 153.

[2]　MADAN D B, SENETA E. The variance gamma (VG) model for share market returns[J]. Journal of Business, 1990, 63(4): 511.

[3] MADAN D B, CARR P P, CHANG E C. The variance gamma process and option pricing [J]. Review of Finance, 1998, 2(1): 79.

[4] CARR P, MADAN D. Option valuation using the fast Fourier transform [J]. Journal of computational finance, 1999, 2(4): 61.

[5] FIORANI F. The Variance-Gamma process for option pricing [J]. Journal of Computational Finance, 1999, 2(4): 61.

[6] HIRSA A, MADAN D B. Pricing American options under variance gamma[J]. Journal of Computational Finance, 2004, 7(2): 63.

[7] FANG F, OOSTERLEE C W. A novel pricing method for European options based on Fourier-cosine series expansions[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2008, 31(2): 826.

[8] PACHÓN R. Numerical pricing of European options with arbitrary payoffs [J]. International Journal of Financial Engineering, 2018, 5(2): 1850015.

[9] 奚炜. Variance Gamma 期权定价模型的一种解析表达及评判检验[J]. 系统工程理论方法应用, 2003, 12(1): 49.
XI Wei. A close form and test of Variance Gamma Option pricing model [J]. Systems Engineering-Theory Methodology Applications, 2003, 12(1): 49.

[10] 肖爽. 基于无穷纯跳 Levy 过程的欧式期权定价研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2013.
XIAO Shuang. European Option pricing under infinite pure jump Levy process with FFT algorithm [D]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology, 2013.

[11] 李畅. VG 模型与 NIG 模型下期权定价实证分析[D]. 成都: 西南财经大学, 2014.
LI Chang. Option pricing empirical analysis under VG and NIG model[D]. Chengdu: Southwestern University of Finance and Economics, 2014.

[12] CURRAN M. Willow power: Optimizing derivative pricing trees[J]. Algo Research Quarterly, 2001, 4(4): 15.

[13] 姚怡, 李帅芳, 许威. 跳扩散模型下亚式期权定价的柳树法研究[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2018, 46(12): 151.
YAO Yi, LI Shuaifang, XU Wei. Efficient willow tree method for Asian Option pricing under Merton jump-diffusion model [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2018, 46(12): 151.

[14] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. Handbook of mathematical functions: With formulas, graphs, and mathematical tables [M]. North Chelmsford: Courier Corporation, 1965.

[15] JOHNSON N L. Systems of frequency curves generated by methods of translation[J]. Biometrika, 1949, 36(1/2): 149.

[16] HILL I D, HILL R, HOLDER R L. Algorithm AS 99: Fitting Johnson curves by moments [J]. Journal of the Royal Statistical Society, Series C (Applied Statistics), 1976, 25(2): 180.

[17] ZHENG W, YUEN C H, KWOK Y K. Recursive algorithms for pricing discrete variance options and volatility swaps under time-changed Levy processes [J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2016, 19(2): 1650011.

[18] CAI N, SONG Y, KOU S. A general framework for pricing Asian options under Markov processes [J]. Operations Research, 2015, 63(3): 540.

(上接第1231页)

[25] POPA C. Convergence rates for Kaczmarz-type algorithms [J]. Numerical Algorithms, 2018, 79: 1.

[26] BAI Z Z, WU W T. On convergence rate of the randomized Kaczmarz method [J]. Linear Algebra and its Applications, 2018, 553: 252.

[27] BAI Z Z, WU W T. On greedy randomized coordinate descent methods for solving large linear least-squares problems [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2019, 26: 1.

[28] LEVENTHAL D, LEWIS A S. Randomized methods for linear constraints: convergence rates and conditioning [J]. Mathematics of Operations Research, 2010, 35: 641.

[29] NUTINI J, SEPEHRY B, LARADJI I, *et al*. Convergence rates for greedy Kaczmarz algorithms, and faster randomized Kaczmarz rules using the orthogonality graph [J]. arXiv preprint arXiv, 2016: 1612.07838.

[30] HOLODNAK J T, IPSEN I C F. Randomized approximation of the gram matrix: Exact computation and probabilistic bounds [J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2015, 36: 110.

[31] DAVIS T A, HU Y. The University of Florida sparse matrix collection [J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2011, 38: 1.