

# 具有衬砌的圆形水工隧洞弹塑性应力统一解

张常光<sup>1,2</sup>, 张庆贺<sup>1,2</sup>, 赵均海<sup>3</sup>, 徐 飞<sup>4</sup>

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092;  
3. 长安大学 建筑工程学院, 陕西 西安 710061; 4. 上海市政第一工程有限公司, 上海 200083)

**摘要:** 针对具有衬砌的圆形水工隧洞, 假定衬砌与围岩位移连续, 考虑不同工况下主应力顺序、岩石应变软化和中间主应力等综合影响, 采用统一强度理论和弹脆塑性软化模型, 推导衬砌和围岩弹塑性应力统一解. 选取不同的统一强度理论参数, 可得到一系列应力场公式及塑性区半径与内压力的关系. 通过工程算例分析知, 考虑第一主应力的变化是正确的, 更符合工程实际, 并得出统一强度理论参数、软化特性参数对衬砌和围岩切向应力的影响规律. 研究表明, 统一强度理论参数和软化特性参数对衬砌与围岩塑性区切向应力的影响显著.

**关键词:** 圆形水工隧洞; 隧道工程; 统一强度理论; 衬砌  
**中图分类号:** TU 457 **文献标识码:** A

## Elastic-plastic Stress Unified Solutions of a Circular Hydraulic Tunnel with Lining

ZHANG Changguang<sup>1,2</sup>, ZHANG Qinghe<sup>1,2</sup>, ZHAO Junhai<sup>3</sup>, XU Fei<sup>4</sup>  
(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. College of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China; 4. Shanghai No. 1 Municipal Engineering Co. Ltd., Shanghai 200083, China)

**Abstract:** The displacement between surrounding rock and lining assumed to be the consecutive, the elastic-plastic stress unified solutions of a circular hydraulic tunnel with lining are obtained based on unified strength theory and elastic-brittle-plastic softening model by taking into consideration the effects of principal stress orders in different engineering conditions, rock strain softening, and the intermediate principal stress. A series of stress fields and the plastic radius versus inner pressures are obtained by choosing different unified strength theory parameters. A case study shows that the obtained result

is more accurate and closer to the practical engineering if taking the different maximal principal stress into account. The influence laws of the unified strength theory parameters and strain softening characteristic parameters on the tunnel tangential stress are discussed. The results show that tangential stresses of lining and surrounding rock in the plastic zone are significantly influenced by the unified strength theory parameters and strain softening characteristic parameters.

**Key words:** circular hydraulic tunnel; tunnel engineering; unified strength theory; lining

具有衬砌的圆形水工隧洞是地下工程中常见的隧道结构. 由于洞室开挖破坏了初始地应力平衡, 导致周围岩体应力重分布, 进入弹塑性变形状态; 而岩石、混凝土等脆性材料, 达峰值强度后, 呈明显的软化特性. 以往对压力隧洞的弹塑性分析, 多采用理想弹塑性 Mohr-Coulomb 强度准则<sup>[1-3]</sup>. Mohr-Coulomb 强度准则虽简洁、明确, 但因未考虑中间主应力  $\sigma_2$  的影响而偏于保守<sup>[4]</sup>. 统一强度理论能合理地考虑  $\sigma_2$  效应, 已获得广泛的应用并取得了很好的效果<sup>[5-8]</sup>. 现在的已有结果, 大都是对无衬砌支护隧洞或将支护用一个支护力代替, 且常以径向应力作为第一主应力. 实际上, 不同的工况下, 水工隧洞第一主应力可能是径向应力, 也可能是切向应力, 在应用强度准则时应正确选择. 笔者针对具有衬砌的圆形水工隧洞, 根据衬砌与围岩位移连续, 采用统一强度理论和弹脆塑性软化模型, 考虑不同工况下主应力顺序、岩石应变软化和中间主应力等综合影响, 推导衬砌和围岩弹塑性应力统一解, 并通过工程算例分析本文方法与传统方法的不同和各参数对隧洞切向应力的影响.

收稿日期: 2008-10-21  
基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(SJ08E204)  
作者简介: 张常光(1982—), 男, 博士生, 主要研究方向为隧道及地下工程和结构强度理论. E-mail: zcg1016@163.com  
张庆贺(1944—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为地下建筑结构、地铁与轻轨. E-mail: qhzhang@citiz.net  
赵均海(1960—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为固体力学和结构工程. E-mail: zhaojh@chd.edu.cn

## 1 弹脆塑性模型下的统一强度理论

弹脆塑性软化模型为岩石类软化材料的强度达到峰值后,峰值至残余强度  $\sigma_{cr}$  之间的应力变化用应力跌落表示<sup>[8]</sup>,如图1所示.设圆形隧洞处于平面应变状态,  $\sigma_z$  为中间主应力,且在塑性区  $\sigma_z = \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ .  $\sigma_1, \sigma_3$  为第一、三主应力,拉应力为正,按应力代数值代入,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . 对于平面应变弹塑性问题,塑性软化前后的统一强度理论表达式为<sup>[5-7]</sup>

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = -\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi_{ij} + c_{ij} \cos \varphi_{ij} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } \sin \varphi_{ij} &= \frac{2(1+b) \sin \varphi_j}{2(1+b) + b(\sin \varphi_j - 1)} \\ c_{ij} &= \frac{2(1+b) c_j \cos \varphi_j}{2(1+b) + b(\sin \varphi_j - 1)} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_{ij}} \\ b &= \frac{(\sigma_c + \sigma_t) \tau_s - \sigma_c \sigma_t}{\sigma_c (\sigma_t - \tau_s)} \end{aligned}$$

式中:  $c_j, \varphi_j$  为凝聚力和内摩擦角,  $c_{ij}, \varphi_{ij}$  为统一凝聚力和统一内摩擦角;  $\sigma_t, \sigma_c$  和  $\tau_s$  为抗拉强度、抗压强度和抗剪强度;  $b$  为统一强度理论参数,反映中间主应力对材料屈服或破坏的影响程度,  $0 \leq b \leq 1$ ;  $j$  表示材料状态,  $j=0$  表示软化前,  $j=1$  表示软化后.

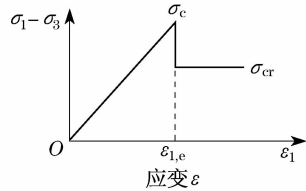


图1 弹脆塑性软化模型

Fig.1 Elastic-brittle-plastic softening model

## 2 施工期应力分析

根据工程实际情况,二次混凝土衬砌不允许进入塑性状态,故设衬砌为理想弹性材料;围岩为弹脆塑性软化材料,且在无穷远处受初始地应力  $q$  作用.在施工期,围岩由于开挖卸载或衬砌支护力不足而进入弹塑性状态,此时,径向应力  $\sigma_r$  为第一主应力,计算简图如图2所示.图中,  $r_0$  为衬砌内半径,  $r_1$  为衬砌外半径,  $r_2$ ,  $p_1$  分别为施工期围岩塑性区外半径和衬砌与围岩之间的接触压力.

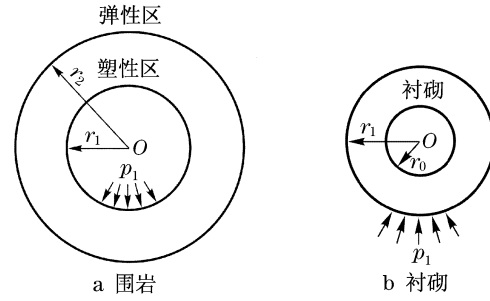


图2 施工期隧洞计算简图

Fig.2 Calculation sketch of tunnel in construction stage

在塑性区内,  $\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_3 = \sigma_\theta$ , 由式(1) ( $j=1$ ) 和边界条件  $\sigma_r|_{r=r_1} = -p_1$ , 求解平面应变下的平衡微分方程, 得塑性区径向应力  $\sigma_r$  和切向应力  $\sigma_\theta$  为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\left(p_1 + c_{11} \cot \varphi_{11}\right) \left(r/r_1\right)^{2 \sin \varphi_{11} / (1 - \sin \varphi_{11})} + \\ &\quad c_{11} \cot \varphi_{11} \\ \sigma_\theta &= -\frac{1 + \sin \varphi_{11}}{1 - \sin \varphi_{11}} \left(p_1 + c_{11} \cot \varphi_{11}\right) \cdot \\ &\quad \left(r/r_1\right)^{2 \sin \varphi_{11} / (1 - \sin \varphi_{11})} + c_{11} \cot \varphi_{11} \end{aligned} \quad (2)$$

式中,  $c_{11}, \varphi_{11}$  分别为围岩应变软化后的统一凝聚力和统一内摩擦角.

设围岩弹塑性交界处的径向应力为  $\sigma_{r_2}$ , 则围岩弹性区径向应力  $\sigma_r$  和切向应力  $\sigma_\theta$  为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q \left(1 - r_2^2/r^2\right) + \sigma_{r_2} \left(r_2^2/r^2\right) \\ \sigma_\theta &= -q \left(1 + r_2^2/r^2\right) - \sigma_{r_2} \left(r_2^2/r^2\right) \end{aligned} \quad (3)$$

根据弹塑性交界  $r = r_2$  处径向应力连续, 及围岩弹性区的应力满足初始屈服方程式(1) ( $j=0$ ), 得

$$\begin{aligned} \sigma_{r_2} &= q (\sin \varphi_{t0} - 1) + c_{t0} \cos \varphi_{t0}, \\ p_1 &= \left(q (1 - \sin \varphi_{t0}) + c_{t0} \cot \varphi_{t0} - \right. \\ &\quad \left. c_{t0} \cos \varphi_{t0}\right) \left(r_2/r_1\right)^{-2 \sin \varphi_{t0} / (1 - \sin \varphi_{t0})} - c_{t0} \cot \varphi_{t0} \end{aligned} \quad (4)$$

式中,  $c_{t0}, \varphi_{t0}$  为围岩软化前的统一凝聚力和统一内摩擦角.

设围岩塑性区的体积应变为零, 并以围岩弹性区内边界  $r = r_2$  处的位移为边界条件, 得围岩塑性区内半径  $r_1$  处的位移为

$$u_{r_1, d} = -(1 + \mu_d) (q \sin \varphi_{t0} + c_{t0} \cos \varphi_{t0}) r_2 / E_d \quad (5)$$

式中,  $E_d, \mu_d$  为围岩的弹性模量和泊松比.

由弹性力学厚壁圆筒理论, 得衬砌应力和外半径  $r_1$  处的位移分别为

$$\sigma_r = -\frac{r_1^2 p_1}{r_1^2 - r_0^2} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right), \sigma_\theta = -\frac{r_1^2 p_1}{r_1^2 - r_0^2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) \quad (6)$$

$$u_{r_1,c} = -\frac{(1+\mu_c)r_1}{E_c} \cdot \frac{r_0^2 + (1-2\mu_c)r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} p_1 \quad (7)$$

式中,  $E_c, \mu_c$  为衬砌的弹性模量和泊松比。

联立式(5)和式(7), 得衬砌与围岩之间的  $p_1$  为

$$p_1 = \frac{E_c(1+\mu_d)}{E_d(1+\mu_c)} \cdot \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2 + (1-2\mu_c)r_1^2} \cdot (q \sin \varphi_{t0} + c_{t0} \cos \varphi_{t0}) (r_2/r_1)^2 \quad (8)$$

联立求解式(4)和式(8)得  $r_2$ , 将  $r_2$  代入式(8)得  $p_1$ , 再由式(2)、式(3)和式(6)可得施工期围岩塑性区、弹性区和衬砌应力。

### 3 运行期应力分析

围岩由于均匀内水压力  $p_0$  太大而进入弹塑性状态, 此时, 切向应力  $\sigma_\theta$  为第一主应力, 计算简图如图3所示。图中,  $r_2^*, p_1^*$  分别为运行期围岩塑性区外半径和衬砌与围岩之间的接触压力。

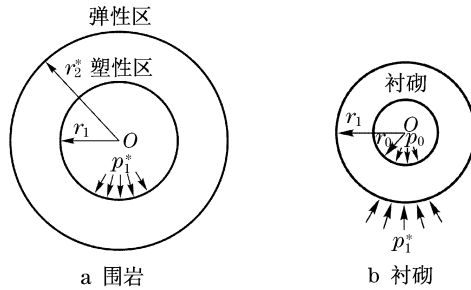


图3 运行期隧洞计算简图

Fig.3 Calculation sketch of tunnel in operating period

若施工期围岩处于完全弹性状态, 按第2节的方法, 在围岩塑性区,  $\sigma_1 = \sigma_\theta, \sigma_3 = \sigma_r$ , 得如下结果: 围岩塑性区外半径  $r_2^*$  的关系式为

$$\begin{aligned} & (q(1 + \sin \varphi_{t1}) + c_{t0} \cos \varphi_{t0} + c_{t1} \cot \varphi_{t1}) \cdot \\ & (r_2^*/r_1)^{2 \sin \varphi_{t1}/(1+\sin \varphi_{t1})} - c_{t1} \cot \varphi_{t1} = \\ & -\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0^2 + (1-2\mu_c)r_1^2} \cdot \frac{E_c(1+\mu_d)}{E_d(1+\mu_c)} (q \sin \varphi_{t0} + \\ & c_{t0} \cos \varphi_{t0}) \left( \frac{r_2^*}{r_1} \right)^2 + \frac{2(1-\mu_c)r_0^2 p_0}{r_0^2 + (1-2\mu_c)r_1^2} \end{aligned} \quad (9)$$

衬砌所受外压力  $p_1^*$  为

$$p_1^* = (q(1 + \sin \varphi_{t1}) + c_{t0} \cos \varphi_{t0} + c_{t1} \cot \varphi_{t1}) \cdot (r_2^*/r_1)^{2 \sin \varphi_{t1}/(1+\sin \varphi_{t1})} - c_{t1} \cot \varphi_{t1} \quad (10)$$

围岩弹性区应力为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -q(1 - r_2^{*2}/r^2) + \sigma_{r_2}^* r_2^{*2}/r^2 \\ \sigma_\theta &= -q(1 + r_2^{*2}/r^2) - \sigma_{r_2}^* r_2^{*2}/r^2 \\ -\sigma_{r_2}^* &= q(1 + \sin \varphi_{t0}) + c_{t0} \cos \varphi_{t0} \end{aligned} \quad (11)$$

围岩塑性区应力为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -(p_1^* + c_{t1} \cot \varphi_{t1}) \cdot \\ & (r/r_1)^{2 \sin \varphi_{t1}/(1+\sin \varphi_{t1})} + c_{t1} \cot \varphi_{t1} \\ \sigma_\theta &= -\frac{1 - \sin \varphi_{t1}}{1 + \sin \varphi_{t1}} (p_1^* + c_{t1} \cot \varphi_{t1}) \cdot \\ & (r/r_1)^{2 \sin \varphi_{t1}/(1+\sin \varphi_{t1})} + c_{t1} \cot \varphi_{t1} \end{aligned} \quad (12)$$

衬砌应力为

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{r_1^2 p_1^*}{r_1^2 - r_0^2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{r_0^2 p_0}{r_1^2 - r_0^2} \left( 1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= -\frac{r_1^2 p_1^*}{r_1^2 - r_0^2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{r_0^2 p_0}{r_1^2 - r_0^2} \left( 1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

由式(9)算出  $r_2^*$ , 将  $r_2^*$  代入式(10)得  $p_1^*$ , 再由式(11)~(13)得运行期围岩弹性区、塑性区和衬砌的应力。

本文所得应力统一解建立在统一强度理论和弹脆塑性软化模型基础上, 并考虑诸多因素综合影响, 包含已有传统解 ( $b=0$ , 退化为基于 Mohr-Coulomb 强度准则;  $c_1 = c_0 = c, \phi_1 = \phi_0 = \phi$ , 不考虑围岩应变软化), 具有较广泛的适用性。选取不同  $b$  值, 可得一系列应力场公式及塑性区半径与内压力的关系。

### 4 工程算例及参数影响分析

某圆形水工压力隧洞<sup>[9]</sup>,  $r_0 = 2.0$  m,  $r_1 = 2.5$  m,  $E_d = 2 \times 10^7$  kPa,  $\mu_d = 0.3$ ,  $c_0 = 250$  kPa,  $\varphi_0 = 30^\circ$ ,  $c_1 = 100$  kPa,  $\varphi_1 = 28^\circ$ ,  $E_c = 3 \times 10^7$  kPa,  $\mu_c = 0.15$ ,  $q = 10^3$  kPa,  $p_0 = 6 \times 10^3$  kPa。

#### 4.1 与传统方法比较

当  $b=0$  时, 由式(4)和式(8)求得  $r_2 = r_1 = 2.5$  m, 即施工期围岩处于完全弹性状态, 隧洞安全等级较高; 当  $b=0, 0.5, 1.0$  时, 由式(9)求得  $r_2^*$  分别为 5.83, 5.47, 5.28 m, 均大于 2.5 m。即运行期围岩处于弹塑性状态, 隧洞安全等级低, 且随着  $p_0$  的增大,  $r_2^*$  不断扩大, 隧洞工作性能不断下降。按传统方法, 不考虑第一主应力的变化, 在运行期仍以  $\sigma_r$  为第一主应力, 经计算知, 无论  $p_0$  多大, 围岩都处于完全弹性状态, 与实际情况矛盾。这说明, 考虑第一主应力的变化是正确的, 更符合工程实际。

#### 4.2 参数影响分析

运行期衬砌径向受压、切向受拉, 混凝土抗拉强度较低, 对设计一般起控制作用, 故只分析参数对切向应力  $\sigma_\theta$  的影响; 另, 岩石类材料软化后内摩擦角  $\varphi_1$  变化不大<sup>[10]</sup>, 可不考虑  $\varphi_1$  的变化。

取  $b=0, 0.5$  和 1.0, 按第3节求得运行期衬砌

和围岩的  $\sigma_\theta$  分布,分别如图4和图5所示.

对比图4和图5可看出,  $\sigma_\theta$  在两处不连续,第一处是在围岩和衬砌交界  $r=2.5$  m处,由于二者材料参数不同,只能保证  $\sigma_r$  和位移连续;第二处在围岩弹塑性交界处,由于围岩塑性软化造成其力学参数变化,弹性区内边界处的应力满足初始屈服面方程,而塑性区外边界处的应力满足后继屈服面方程,此处应力跌落相对第一处较小.

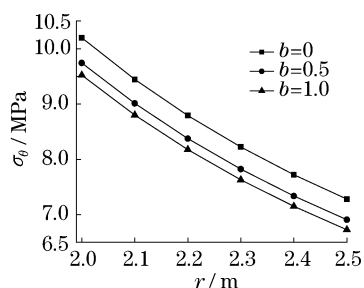


图4  $b$  对衬砌  $\sigma_\theta$  的影响

Fig.4 Effect of  $b$  on  $\sigma_\theta$  of lining

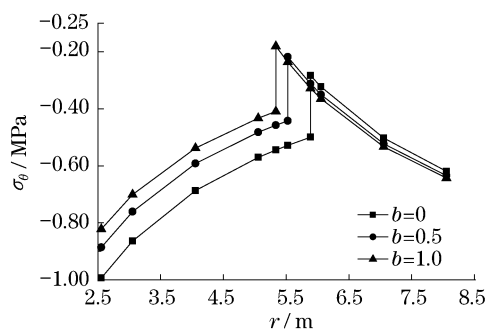


图5  $b$  对围岩  $\sigma_\theta$  的影响

Fig.5 Effect of  $b$  on  $\sigma_\theta$  of surrounding rock

由图4,5均可看出,  $b$  对衬砌和围岩  $\sigma_\theta$  及围岩塑性区范围都有显著影响.随着  $b$  的增大,  $\sigma_\theta$  逐渐减小;  $b=1$  时,衬砌内边界的  $\sigma_\theta$  比  $b=0$  时减小了7.1%;  $b=1$  时,围岩塑性区内边界的  $\sigma_\theta$  比  $b=0$  时减小20.8%且  $r_2^*$  从5.83 m减小到5.28 m.这都说明,考虑中间主应力  $\sigma_2$  的影响,可以更充分发挥材料的强度潜能,更客观地认识材料的自承载能力.

取  $c_1 = 50, 100$  和  $150$  kPa,按第3节求得运行期衬砌和围岩的  $\sigma_\theta$  分布,分别如图6和图7所示.

由图6,7可看出,  $c_1$  对  $\sigma_\theta$  的影响规律和  $b$  的相似.随着  $c_1$  增大,衬砌切向拉应力和围岩塑性区的切向压应力逐渐减小,  $c_1 = 150$  kPa 时,衬砌内边界的  $\sigma_\theta$  比  $c_1 = 50$  kPa 时减小了4.6%;  $c_1 = 150$  kPa 时,围岩塑性区内边界的  $\sigma_\theta$  比  $c_1 = 50$  kPa 时减小了12.3%.因此,设计衬砌和围岩初支护时,考虑由于

$c_1$  的降低对衬砌和围岩  $\sigma_\theta$  增大的影响是很有必要的.

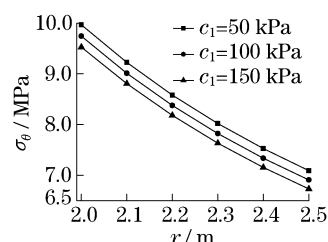


图6  $c_1$  对衬砌  $\sigma_\theta$  的影响

Fig.6 Effect of  $c_1$  on  $\sigma_\theta$  of lining

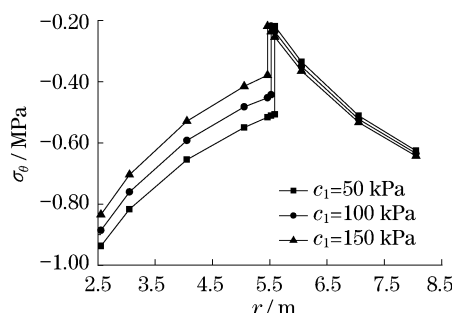


图7  $c_1$  对围岩  $\sigma_\theta$  的影响

Fig.7 Effect of  $c_1$  on  $\sigma_\theta$  of surrounding rock

## 5 结论

(1) 应力统一解具有广泛的适用性,选取不同的统一强度理论参数  $b$ ,可得到一系列应力场公式及塑性区半径与内压力的关系.

(2) 考虑第一主应力的变化更符合工程实际,统一强度理论参数  $b$  和软化特性参数  $c_1$  对衬砌和围岩塑性区的切向应力  $\sigma_\theta$  影响都很显著.随着  $b$  的增大,围岩塑性区半径从5.83 m减小到5.28 m,  $b=1$  时,衬砌内边界和围岩塑性区内边界的  $\sigma_\theta$ ,分别比  $b=0$  时减小了约7%,21%,考虑中间主应力  $\sigma_2$ ,可以更好地发挥材料的强度潜力;随着  $c_1$  的增大,衬砌和围岩塑性区的  $\sigma_\theta$  逐渐减小,  $c_1 = 150$  kPa 时,衬砌内边界及围岩塑性区内边界的  $\sigma_\theta$ ,分别比  $c_1 = 50$  kPa 时减小了约4.6%,12.3%.

(3) 设计衬砌和围岩初支护时,应根据围岩材料参数合理地选取  $b$  值,并考虑由于  $c_1$  的降低对衬砌和围岩  $\sigma_\theta$  增大的影响.施工时,要适时实施初次支护和二次衬砌,避免围岩塑性变形;若围岩在施工期已进入弹塑性状态,运行期隧洞的应力可采用有限环变位协调法确定.详细内容将另文研究.

(下转第134页)