

# 交通需求组合模型的不确定性分析

杨超<sup>1</sup>, 蒲琪<sup>2</sup>, 涂颖菲<sup>1</sup>

(1. 同济大学 交通运输工程学院, 上海 201804; 2. 同济大学 铁道与城市轨道交通研究院, 上海 201804)

**摘要:** 交通需求预测中会有很多不确定性因素, 系统的不确定分析可以分析模型输出的可信程度, 并且界定影响不确定性的关键因素. 采用了基于敏感性分析的方法(SAM)分析交通需求组合模型(CTDM)的不确定性. CTDM 基于出行者的理性行为, 并可描述为一个非线性规划问题, 从而分析敏感性. 不确定性分析包括模型输入的不确定性和模型参数的不确定性. 与基于随机抽样的分析方法相比, 基于敏感性分析的方法在大大减少计算量的同时, 可以得到近似的精度, 并且可以同时或分开考虑输入的不确定性和参数的不确定性. 研究认为, 提高参数精度比提高输入精度能更有效地提高输出结果的可信水平.

**关键词:** 交通需求; 组合模型; 不确定性分析; 敏感性分析  
**中图分类号:** U 491.11 **文献标识码:** A

## Uncertainty Analysis of a Combined Travel Demand Model

YANG Chao<sup>1</sup>, PU Qi<sup>2</sup>, TU Yingfei<sup>1</sup>

(1. College of Transportation Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. Institute of Railway and Urban Rail Transit, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** Travel demand forecasts are subject to great uncertainties. A systematic uncertainty analysis provides insight into the level of confidence in the model outputs, and can lead to identification of the critical sources of uncertainty. An uncertainty analysis is made of a combined travel demand model (CTDM) with the sensitivity-based analytical method (SAM). The CTDM, on the basis of a single unifying rationale, is formulated as a nonlinear programming problem, and the sensitivity analysis is also made. The uncertainty analysis includes both input uncertainty and parameter uncertainty. The SAM, which requires less computational effort than sampling-based method in the uncertainty analysis, can obtain similar accuracy and can investigate the input

uncertainty and parameter uncertainty separately. In order to improve credible level of outputs, to increase the accuracy of parameters is more effective than that of inputs.

**Key words:** travel demand; combined model; uncertainty analysis; sensitivity analysis

交通规划是建立在交通需求预测基础上的, 交通需求预测中有很多不确定因素<sup>[1]</sup>. 这些不确定性因素包括交通需求模型中社会经济预测值(输入)的不确定性、模型中标定的参数的不确定性, 以及模型本身的不确定性(如模型结构、模型假设). 评估这些不确定因素对于模型输出结果产生的影响至关重要. 不确定性分析可以分析模型输出的可信程度, 并且能界定影响不确定性的关键因素. 如果不考虑不确定性对交通需求预测结果的影响, 交通规划则会存在一些不必要的风险, 而基于此的决策也可能会不准确甚至误导<sup>[2]</sup>. 尽管交通规划者和决策者意识到了与交通需求预测相关的不确定性问题, 但是大部分情况下未能在需求分析和预测的过程中系统地量化不确定性造成的影响. 原因之一是针对交通需求预测缺乏不确定性分析的系统方法和手段.

目前, 交通需求模型中的不确定性分析已经得到了越来越多研究者的关注. Waller 等研究了需求不确定性对交通分配模型结果的影响<sup>[3]</sup>, 指出忽略需求不确定性会导致交通分配模型的结果过高地估计网络性能. Zhao 和 Kockelman 研究了传统四步骤交通需求模型中不确定性的传播, 采用蒙特卡罗抽样方法, 总结出模型的误差将沿着模型的各个阶段而逐步扩大, 但是交通分配阶段可能对不确定性有一定的削减作用<sup>[2]</sup>. Pradhan 和 Kockelman 及

收稿日期: 2009-01-04

基金项目: 国家“八六三”高技术研究发展计划资助项目(2007AA11Z206); 国家自然科学基金资助项目(70701027); 新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-08-0406)

作者简介: 杨超(1974-), 男, 副教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为交通运输规划与管理.

E-mail: tongjiyc@tongji.edu.cn

Krishnamurthy 和 Kockelman 研究了土地利用 - 交通整合模型的不确定性在时间上的传播<sup>[4-5]</sup>.

本文采用基于敏感性分析方法,提出针对交通需求组合模型(CTDM)的不确定性定量分析的系统方法.本研究与其他研究的区别在于以下三个方面:

(1) 采用 Oppenheim 提出的出行—目的地—方式—路径选择的组合模型<sup>[6]</sup>,避免了传统四步骤的交通需求模型缺乏行为解释和一致性的问题.

(2) 分别考虑参数的不确定性和输入的不确定性,使得不确定性分析能更好地评估和量化输出的不确定性的个体和集体的效应,便于通过提高模型精度减小不确定性.

(3) 在不确定性分析中,采用基于敏感性的分析方法(SAM)而不采用如蒙特卡罗或拉丁超立方(Latin Hypercube)<sup>[7]</sup>等基于抽样的方法.高强度计算的模型中,基于抽样的方法对时间和资源的要求都比较高.

## 1 交通需求组合模型

常规的交通预测模型采用四步骤方法——出行生成、出行分布、方式划分和交通分配<sup>[8]</sup>,每一步的输出结果都是下一步的输入.然而,由于四步骤法不是建立在对出行者行为一致的描述之上的,会面临各个步骤中的出行时间和拥挤效应的不一致性<sup>[9]</sup>.为此,研究者开始研究其他交通需求预测模型.这些模型主要是组合模型<sup>[10]</sup>.笔者采用 Oppenheim 提出交通需求组合模型 CTDM<sup>[6]</sup>.首先定义变量和参数.

### 1.1 变量与参数定义

$\beta$  是交通需求模型中的参数,  $\beta_r, \beta_m, \beta_d$  和  $\beta_t$  分别是与路径、方式、目的地和出行选择相关的参数,假设均为正数  $\beta'$  的调整参数,  $1/\beta'_m = 1/\beta_m - 1/\beta_r, 1/\beta'_d = 1/\beta_d - 1/\beta_m, 1/\beta'_t = 1/\beta_t - 1/\beta_d$ . 假设  $\beta_r > \beta_m > \beta_d > \beta_t$ , 使得调整参数也为正.

$\delta_{ijr, a_m}$  为路段—路径关联系数.

$\tau$  为效用函数中与出行时间相关的标量(时间价值).

$a_m$  为方式  $m$  的路段编号.

$c_{a_m}$  为路段  $a$  上方式  $m$  的出行固定成本.

$t_{a_m}(\cdot)$  为路段  $a$  上方式  $m$  的出行时间函数.

$g_{a_m}(\cdot)$  为路段  $a$  上方式  $m$  的广义路段出行成本(金钱加时间)函数,  $g_{a_m}(\cdot) = \tau t_{a_m}(\cdot) + c_{a_m}$

$g_{ijmr}$  为起点  $i$  和终点  $j$  之间方式  $m$  的路径  $r$  的

广义成本,  $g_{ijmr} = \sum_{a_m} g_{a_m} \delta_{ijr, a_m}$ .

$h_x$  为效用描述中的常数项,可以描述为社会经济特征的线性函数,  $h_i$  是  $i$  的出行吸引力;  $h_{ij}$  是  $j$  对  $i$  的吸引力;  $h_{ijm}$  是  $i$  和  $j$  之间方式  $m$  的吸引力.

$N_i$  为从起点  $i$  出发的潜在出行者数量.

$P_{xy}$  为  $x$  和  $y$  的(无条件的)联合概率,比如,  $P_{ijmr}$  是  $i$  处的出行者采用  $m$  并选择  $r$  到目的地  $j$  的概率.

$P_{y/x}$  为给定  $x$  选择  $y$  的条件概率.比如,  $P_{r/ijm}$  是  $i$  处想采用  $m$  去  $j$  的出行者将会选择  $r$  的概率.

$T_i$  为从起点  $i$  出发的出行者数量.

$T_{i0}$  为起点  $i$  的不出行者数量.

$T_{ij}$  为从起点  $i$  到终点  $j$  的出行者数量.

$T_{ijm}$  为从  $i$  到  $j$  采用  $m$  的出行者数量.

$T_{ijmr}$  为从  $i$  到  $j$  采用  $m$  选择  $r$  的出行者数量.

$U$  为选择的直接效用.

$\tilde{W}$  为选择的期望效用.

### 1.2 模型

在 CTDM 中,假设每个出行者的决策过程有如图 1 所示的自上而下的结构.

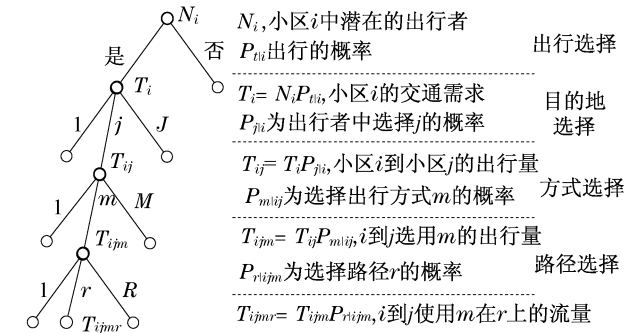


图 1 组合交通需求模型的多级结构

Fig.1 Hierarchical structure of a combined travel demand model

根据随机效用理论,每个阶段的概率都用多元 logit 选择函数来计算.在第一阶段,起点  $i$  处潜在的出行者  $N_i$  选择出行的条件概率( $P_{t|i}$ )为

$$P_{t|i} = e^{\beta_t(h_i + \tilde{W}_{t/i})} / (1 + e^{\beta_t(h_i + \tilde{W}_{t/i})}), \quad \forall i \quad (1)$$

而这个决定所期望得到的效用,取决于下个阶段的效用,也就是目的地选择

$$\tilde{W}_{t/i} = b_i + \frac{1}{\beta_d} \ln \sum_j e^{\beta_d(h_{ij} + \tilde{W}_{j/i})}, \quad \forall i \quad (2)$$

而目的地阶段选择的期望效用,取决于方式选择阶段的效用.依此类推,直到路径选择阶段.

所以,  $i$  处的个体采用  $m$  经过  $r$  到达目的地  $j$  的概率, 可以通过每个阶段的条件概率相乘而得

$$P_{ijmr} = P_{t/i} \cdot P_{j/i} \cdot P_{m/ij} \cdot P_{r/ijm} = \frac{e^{\beta_t(h_i + \tilde{W}_{t/i})}}{1 + e^{\beta_t(h_i + \tilde{W}_{t/i})}} \cdot \frac{e^{\beta_d(h_{ij} + \tilde{W}_{j/i})}}{\sum_j e^{\beta_d(h_{ij} + \tilde{W}_{j/i})}} \cdot \frac{e^{\beta_m(h_{ijm} + \tilde{W}_{m/ij})}}{\sum_m e^{\beta_m(h_{ijm} + \tilde{W}_{m/ij})}} \cdot \frac{e^{-\beta_r g_{ijmr}}}{\sum_r e^{-\beta_r g_{ijmr}}}, \quad \forall i, j, m, r \quad (3)$$

将出行者视作城市出行的消费者, 集计路径需求可以通过求解满足预算和守恒约束的直接效用的最大化得到. CTDM 的数学规划表达如下<sup>[6]</sup>:

$$\begin{aligned} \min \quad & -U_{\text{tdmr}}(T_i, T_{i0}, T_{ij}, T_{ijm}, T_{ijmr}) = \\ & \sum_m \sum_{a_m} \int_0^{\sum_{ijm} T_{ijm} \delta_{ijr, a_m}} g_{a_m}(\omega) d\omega - \sum_{ijm} h_{ijm} T_{ijm} - \\ & \sum_{ij} h_{ij} T_{ij} - \sum_i h_i T_i + \frac{1}{\beta_r} \sum_{ijmr} T_{ijmr} \ln T_{ijmr} + \\ & \frac{1}{\beta'_m} \sum_{ijm} T_{ijm} \ln T_{ijm} + \frac{1}{\beta'_d} \sum_{ij} T_{ij} \ln T_{ij} + \\ & \frac{1}{\beta'_t} \sum_i T_i \ln T_i + \frac{1}{\beta_t} \sum_{i0} T_{i0} \ln T_{i0} \end{aligned} \quad (4a)$$

s. t.

$$\sum_r T_{ijmr} = T_{ijm}, \quad \forall i, j, m \quad (4b)$$

$$\sum_m T_{ijm} = T_{ij}, \quad \forall i, j \quad (4c)$$

$$\sum_j T_{ij} = T_i, \quad \forall i \quad (4d)$$

$$T_i + T_{i0} = N_i, \quad \forall i \quad (4e)$$

$$T_{i0} > 0, T_i > 0, T_{ij} > 0, \quad (4f)$$

$$T_{ijm} > 0, T_{ijmr} > 0, \quad \forall i, j, m, r$$

在目标函数中, 前四项分别与路径、方式、目的地和出行各项选择的直接效用相关. 其余五项是与这些概率选择(基于 logit)相关的“熵”项. 约束条件(4b)~(4e)是守恒约束, 约束(4f)保证了解是正的.

Oppenheim 已经证明上述最优化问题的最优解符合均衡条件下图 1 中所示的出行者选择行为, 并给出了解的存在性和唯一性的证明<sup>[6]</sup>. 模型的求解可以采用一种基于部分线性化方法的<sup>[11]</sup>算法, 本文采用基于二次插值法的非精确线性搜索方法<sup>[12]</sup>.

## 2 敏感性分析

敏感性分析是定量分析需求行为和流量模式关

于路网特征扰动的一种有效方法. 因为 CTDM 是一个非线性规划问题, 且证明了其解的唯一性, 就可以采用非线性规划问题的标准敏感性分析方法<sup>[13]</sup>. CTDM 的敏感性分析见 Yang 和 Chen 的论文<sup>[14]</sup>. 简单介绍如下:  $\boldsymbol{\varepsilon}$  作为扰动向量(与选择的吸引力、路段成本函数和潜在出行者数量相关的), 在 CTDM 式(4)中受扰动后的描述变为:

$$\begin{aligned} \min \quad & -U_{\text{tdmr}}(T_i, T_{i0}, T_{ij}, T_{ijm}, T_{ijmr}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \\ & \sum_m \sum_{a_m} \int_0^{\sum_{ijm} T_{ijm} \delta_{ijr, a_m}} g_{a_m}(\omega, \boldsymbol{\varepsilon}) d\omega - \sum_{ijm} h_{ijm}(\boldsymbol{\varepsilon}) T_{ijm} - \\ & \sum_{ij} h_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon}) T_{ij} - \sum_i h_i(\boldsymbol{\varepsilon}) T_i + \frac{1}{\beta_r(\boldsymbol{\varepsilon})} \sum_{ijmr} T_{ijmr} \cdot \\ & \ln T_{ijmr} + \frac{1}{\beta'_m(\boldsymbol{\varepsilon})} \sum_{ijm} T_{ijm} \ln T_{ijm} + \frac{1}{\beta'_d(\boldsymbol{\varepsilon})} \sum_{ij} T_{ij} \cdot \\ & \ln T_{ij} + \frac{1}{\beta'_t(\boldsymbol{\varepsilon})} \sum_i T_i \ln T_i + \frac{1}{\beta_t(\boldsymbol{\varepsilon})} \sum_{i0} T_{i0} \ln T_{i0} \end{aligned} \quad (5a)$$

s. t.

$$\sum_r T_{ijmr} = T_{ijm}, \quad \forall i, j, m \quad (5b)$$

$$\sum_m T_{ijm} = T_{ij}, \quad \forall i, j \quad (5c)$$

$$\sum_j T_{ij} = T_i, \quad \forall i \quad (5d)$$

$$T_i + T_{i0} = N_i(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \forall i \quad (5e)$$

$$T_{i0} > 0, T_i > 0, T_{ij} > 0, T_{ijm} > 0, T_{ijmr} > 0, \quad \forall i, j, m, r \quad (5f)$$

其中,  $\beta_r(\boldsymbol{\varepsilon}), \beta_m(\boldsymbol{\varepsilon}), \beta_d(\boldsymbol{\varepsilon}), \beta_t(\boldsymbol{\varepsilon}), h_{ijm}(\boldsymbol{\varepsilon}), h_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon})$  和  $h_i(\boldsymbol{\varepsilon})$  是  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的函数;  $g_{a_m}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon})$  是路段流量和  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的函数; 且  $1/\beta'_m(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1/\beta_m(\boldsymbol{\varepsilon}) - 1/\beta_r(\boldsymbol{\varepsilon}), 1/\beta'_d(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1/\beta_d(\boldsymbol{\varepsilon}) - 1/\beta_m(\boldsymbol{\varepsilon}), 1/\beta'_t(\boldsymbol{\varepsilon}) = 1/\beta_t(\boldsymbol{\varepsilon}) - 1/\beta_d(\boldsymbol{\varepsilon})$ .

假设一, 函数  $g_{a_m}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon})$  对  $v_{a_m}$  是一次连续可微, 对  $\boldsymbol{\varepsilon}$  二次连续可微,  $\beta_r(\boldsymbol{\varepsilon}), \beta'_m(\boldsymbol{\varepsilon}), \beta'_d(\boldsymbol{\varepsilon})$  和  $\beta'_t(\boldsymbol{\varepsilon})$  对  $\boldsymbol{\varepsilon}$  二次连续可微,  $h_{ijm}(\boldsymbol{\varepsilon}), h_{ij}(\boldsymbol{\varepsilon})$  和  $h_i(\boldsymbol{\varepsilon})$  对  $\boldsymbol{\varepsilon}$  二次连续可微.

假设二, 函数  $g_{a_m}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon})$  对  $v_{a_m}$  严格递增;  $\beta_r(\boldsymbol{\varepsilon}), \beta'_m(\boldsymbol{\varepsilon}), \beta'_d(\boldsymbol{\varepsilon})$  和  $\beta'_t(\boldsymbol{\varepsilon})$  均大于 0.

令  $\pi_{ijm}, \mu_{ij}, \lambda_i, \varphi_i$  是约束条件(5b)~(5e)的拉格朗日乘子. 模型中的所有变量在最优解处都大于零, 因此, 不考虑正约束和相关拉格朗日乘子. 令  $\mathbf{x} = (T_i, T_{i0}, T_{ij}, T_{ijm}, T_{ijmr})$ ,  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\varepsilon})$  和  $\mathbf{N}(\boldsymbol{\varepsilon})$  分别为式(5) KKT 条件关于  $\mathbf{x}$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的 Jacobians 矩阵

$$M(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \nabla_{T_i}^2 L & 0 & 0 & 0 & -I & I \\ & \nabla_{T_{i0}}^2 L & 0 & 0 & 0 & I \\ & & \nabla_{T_{ij}}^2 L & 0 & -I & \mathbf{I}^T & 0 \\ & & & \nabla_{T_{ijm}}^2 L & -I & \boldsymbol{\Phi}^T & 0 & 0 \\ 0 & & & & \nabla_{T_{ijmr}}^2 L & \mathbf{A}^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & \Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & \Phi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & 0 & \Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$N(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \nabla_{T_i, \boldsymbol{\varepsilon}} L & \nabla_{T_{i0}, \boldsymbol{\varepsilon}} L & \nabla_{T_{ij}, \boldsymbol{\varepsilon}} L & \nabla_{T_{ijm}, \boldsymbol{\varepsilon}} L \\ \nabla_{T_{ijmr}, \boldsymbol{\varepsilon}} L & 0 & 0 & 0 & -\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}} N_i \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

其中:  $\nabla_{T_i}^2 L = (1/\beta'_i(\boldsymbol{\varepsilon}))\text{diag}(1/T_i)$ ;  $\nabla_{T_{i0}}^2 L = (1/\beta'_t(\boldsymbol{\varepsilon}))\text{diag}(1/T_{i0})$ ;  $\nabla_{T_{ij}}^2 L = (1/\beta'_d(\boldsymbol{\varepsilon}))\text{diag}(1/T_{ij})$ ;  $\nabla_{T_{ijm}}^2 L = (1/\beta'_m(\boldsymbol{\varepsilon}))\text{diag}(1/T_{ijm})$ ;  $\nabla_{T_{ijmr}}^2 L = \nabla_{T_{ijmr}} g_{ijmr}(\cdot, \boldsymbol{\varepsilon}) + (1/\beta'_r(\boldsymbol{\varepsilon}))\text{diag}(1/T_{ijmr})$ ;  $\mathbf{A}$  是路径 OD 方式的关联矩阵;  $\Phi$  是方式 OD 的关联矩阵;  $\Gamma$  是 OD 起点的关联矩阵. 定义式(5)中扰动问题为  $P(\boldsymbol{\varepsilon})$ , 则有

**定理 1** 如果  $P(0)$  有一个解  $(T_i^*, T_{i0}^*, T_{ij}^*, T_{ijm}^*, T_{ijmr}^*, \pi_{ijm}^*, \mu_{ij}^*, \lambda_i^*, \varphi_i^*)$  且遵循假设一、假设二, 那么,  $P(\boldsymbol{\varepsilon})$  是正则的.

**定理 2** 当  $P(\boldsymbol{\varepsilon})$  是正则的, 那么,  $M(\boldsymbol{\varepsilon})$  是非奇异的.

**推论 1** 当  $P(\boldsymbol{\varepsilon})$  是正则的, 那么, 在  $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$  附近

$$\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}} y(\boldsymbol{\varepsilon}) = -M(\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}N(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (8)$$

其中,  $y = (T_i, T_{i0}, T_{ij}, T_{ijm}, T_{ijmr}, \pi_{ijm}, \mu_{ij}, \lambda_i, \varphi_i)$ .

Yang 和 Chen 给出了以上定理和推论的证明<sup>[14]</sup>. 此外, 给定扰动向量  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , 可以用一阶泰勒展开来估计  $y(\boldsymbol{\varepsilon})$

$$y(\boldsymbol{\varepsilon}) \approx y(0) + \boldsymbol{\varepsilon}[\nabla_{\boldsymbol{\varepsilon}} y(\boldsymbol{\varepsilon})]^T \quad (9)$$

其中,  $y(\boldsymbol{\varepsilon})$  是给定  $\boldsymbol{\varepsilon}$  的  $P(\boldsymbol{\varepsilon})$  的均衡解的近似.

从公式(8)可以得到决策变量关于扰动的偏导. 对于其他输出量, 如路段流量、总的行程时间等, 偏导可以采用矩阵操作和链规则来进行计算. 例如, 路段流量和路段行程时间关于扰动的偏导, 可以通过以下公式进行计算:

$$\frac{dv_{a_m}}{d\varepsilon_i} = \sum_{ijr} \frac{\partial T_{ijmr}}{\partial \varepsilon_i} \delta_{ijr, a_m} \quad (10)$$

$$\frac{dt_{a_m}}{d\varepsilon_i} = \frac{\partial t_{a_m}}{\partial v_{a_m}} \cdot \frac{\partial v_{a_m}}{\partial \varepsilon_i} + \frac{\partial t_{a_m}}{\partial \varepsilon_i} \quad (11)$$

其中,  $\frac{\partial T_{ijmr}}{\partial \varepsilon_i}$  可以通过式(8)得到;  $\frac{\partial t_{a_m}}{\partial v_{a_m}}$  是路段成本关于路段流量的偏导, 可以通过给定的路段成本函数计算得到;  $\frac{\partial t_{a_m}}{\partial \varepsilon_i}$  是路段成本关于扰动的偏导, 可以是输入或者参数. 网络性能指标, 如总的行程时间  $t_t$  和总的车公里数  $v_t$ , 关于扰动的偏导可以按如下方式计算:

$$\frac{\partial t_t}{\partial \varepsilon_i} = \sum_m \sum_{a_m} \left[ \frac{\partial v_{a_m}}{\partial \varepsilon_i} t_{a_m} + \frac{\partial t_{a_m}}{\partial \varepsilon_i} v_{a_m} \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_t}{\partial \varepsilon_i} = \sum_m \sum_{a_m} h_{a_m} \left[ \frac{\partial v_{a_m}}{\partial \varepsilon_i} \right] \quad (13)$$

其中,  $h_{a_m}$  是  $m$  的路段  $a$  的长度. 这些偏导的计算为不同的应用提供了有用的信息<sup>[14]</sup>.

### 3 不确定性分析

模型的不确定性分析通常包括以下步骤: 输入参数不确定性描述, 不确定性传播, 输出不确定性描述. 第一步是估计模型的输入/参数的分布(均值和方差), 对输入和参数分别考虑. 输入的不确定性是物理世界中能被度量、分析和适当解释的现象, 而参数的不确定性是知识的一个方面<sup>[6,15]</sup>. 输入的不确定性是建模对象所固有的不可削减的属性, 而参数不确定性不是固有属性, 至少可以在理论上通过采集高质量的数据来降低<sup>[16]</sup>. 这里的不确定性指的是输入不确定性和参数不确定性的组合或者总的不确定性. 第二步是估算由模型输入/参数的不确定性引起的模型输出的不确定性. 第三步是研究模型输出的特征, 如均值、方差和输出的可信程度. 现着重于后两个步的分析, 并假设模型输入/参数的特征是给定的.

图 2 描述了不确定性传播. 可以通过一个概率密度函数来描述模型的输出量 1 对输入量 1,2 变化的每一点的特性. 该概率密度函数取决于输入的概率密度函数. 分析不确定性的传播有两种方法: 基于抽样和基于敏感度的分析方法. 前者常用的有蒙特卡罗、拉丁超立方<sup>[7]</sup>. 然而, 这些方法对计算资源的要求相对较高, 并且仅限于分析数量较小的扰动. 同时, 抽样方法是一个不可重复的过程<sup>[17]</sup>. 另一方面, 一些研究<sup>[18-19]</sup>强调了敏感性分析在界定交通需求模型中误差

差的重要性. Leurent 对双重标准的交通分配模型进行了敏感性和误差分析<sup>[20]</sup>. 此外, 敏感性分析的效率更高, 并且可以同时或分别分析输入和参数的不确定性.

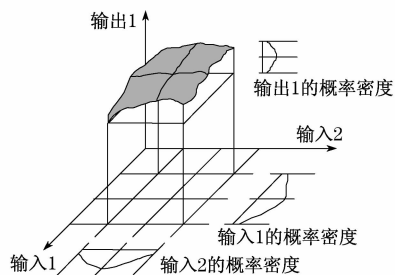


图2 不确定性的传播  
Fig.2 Propagation of uncertainties

采用 SAM 来进行不确定性分析. 用 SAM 的好处是只需对 CTDM 求解一次, 而基于抽样的方法则需根据所需样本数量多次求解. 利用推导信息和公式(9), 可以用以下方法来估计给定输入方差下输出的方差-协方差矩阵:

$$\mathbf{S}_{\text{out}} = \mathbf{V}_y \mathbf{S}_{\text{in}} (\mathbf{V}_y \mathbf{y})^T \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{S}_{\text{in}}$  是给定的输入的方差-协方差矩阵. 通过假设输出的正态性, 可以估计不确定性分析中很重要的一个量——输出的置信区间. 此外, 输出和输入的协方差为

$$\mathbf{S}_{\text{out}, \text{in}} = \mathbf{V}_y \mathbf{y} \mathbf{S}_{\text{in}} \quad (15)$$

令  $s_i$  为  $\mathbf{S}_{\text{out}}$  的第  $i$  个对角项, 是输出  $i$  的方差;  $s_j$  是  $\mathbf{S}_{\text{in}}$  的第  $j$  个对角项, 是输入  $j$  的方差;  $s_{ij}$  是  $\mathbf{S}_{\text{out}, \text{in}}$  第  $i$  行第  $j$  列的元素, 是  $i$  和  $j$  的协方差.  $i$  和  $j$  的相关系数可以通过下式得到:

$$r_{ij} = s_{ij} / (\sqrt{s_i} \sqrt{s_j}) \quad (16)$$

输出和输入的相关性将为关键输入分析提供有用的信息. 不同于基于抽样的方法<sup>[2,4-5]</sup>, 这里是通过分析而不是线性回归的方法来得到这个相关性的.

SAM 是在非扰动均衡问题  $P(0)$  求解之后进行的, 其不确定性分析的精度, 取决于式(9)中的线性近似的精度以及对输出的正态性假设.

## 4 算例

### 4.1 测试路网

采用交通需求模型中常用的 Sioux Falls 路网进行测试(图3). 该路网由 24 个节点、76 条路段组成. 为了简化, 定义一部分的节点为小区形心. 表1列出了各小区的编号和相应的节点编号(用小区的编号代替节

点编号作下标), 以及小区的输入数据(包括小区吸引力). 其他的模型参数见文献[12].

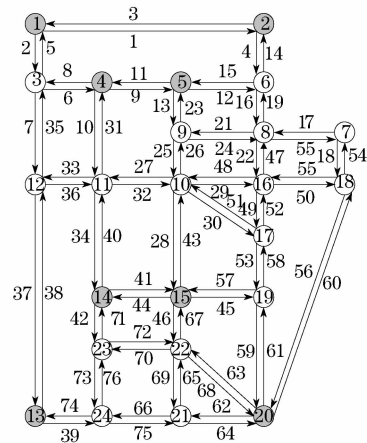


图3 Sioux Falls 路网  
Fig.3 Sioux Falls network

表1 Sioux Falls 路网的小区数据

Tab.1 Zonal data for the Sioux Falls network

$i$	节点	$N_i$	$h_i$
1	1	55 000	3.0
2	2	5 000	2.0
3	4	17 000	1.5
4	5	38 000	3.5
5	13	55 000	1.8
6	14	48 000	2.0
7	15	58 000	6.3
8	20	20 000	3.0

### 4.2 均衡结果

给定输入和参数, 通过基于二次插值法的部分线性化算法<sup>[12]</sup>求解, 得到模型均衡解(输出结果). 为了简化, 选择所有输出中的 8 个量着重分析.

令  $\mathbf{x} = [T_1, T_{10}, T_{1-7}, T_{1-7c}, T_{1-7t}, v_{1c}, v_{1t}, t_t]^T$  为所选择的模型输出量: 小区 1 的出行产生量, 不出行者数量, 从小区 1 到小区 7 的需求量, 采用小汽车的量, 采用公交的量, 小汽车网络路段 1 的流量, 公交网络路段 1 的流量, 总的行程时间  $t_t$  (单位为  $10^3 \text{ veh} \cdot \text{h} \cdot \text{h}^{-1}$ ). 均衡解为

$$\mathbf{x} = [47.104, 7.897, 21.350, 11.014, 10.336, 14.696, 10.596, 84.841]^T$$

### 4.3 敏感性分析结果

得到均衡解之后, 进行敏感性分析. 表2列出了所选择的输出量关于输入(每个小区的潜在出行者数量)的偏导. 前面 5 个用式(8)求解, 其他用式(10)和(12)求解.

表 2 输出关于输入的偏导  
Tab.2 Derivatives of outputs with respect to inputs

输出	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$N_7$	$N_8$
$T_1$	0.855	-0.001	-0.001	-0.001	-0.001	0	0	0
$T_{10}$	0.145	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0	0
$T_{1-7}$	0.381	-0.004	-0.005	-0.006	-0.006	-0.003	0	0
$T_{1-7c}$	0.212	0.006	0.007	0.008	0.001	-0.002	0	0.001
$T_{1-7t}$	0.169	-0.010	-0.012	-0.014	-0.006	-0.002	0	-0.001
$v_{1c}$	0.062	-0.005	0.147	0.013	0.065	0.013	0.092	0.010
$v_{1t}$	0.105	-0.024	0.029	0.002	0.027	0.006	0.056	-0.004
$t_t$	0.419	0.266	0.363	0.438	0.487	0.946	0.815	0.740

为了便于表达,只考虑 12 个参数的不确定性(如表 3 所示).前 4 个参数是与路径、方式、目的地和出行选择相关的参数,另 4 个是路段成本函数中的参数,最后 4 个是小区 1、OD 对 1-7、小汽车 OD 对 1-7 和公交 OD 对 1-7 的吸引力.表 3 列出输出关于参数的偏导.表 2,3 的偏导都是在模型求解之后的敏感性分析中计算得到的.

表 3 输出关于参数的偏导  
Tab.3 Derivatives of outputs with respect to parameters

输出	$\beta_t$	$\beta_d$	$\beta_m$	$\beta_r$	$\alpha_c$	$\gamma_c$
$T_1$	120.386	-4.406	-0.318	-0.137	-0.076	-0.003
$T_{10}$	-120.386	4.406	0.318	0.137	0.076	0.003
$T_{1-7}$	51.575	32.999	-2.428	-2.198	-0.512	-0.031
$T_{1-7c}$	31.014	17.832	-0.933	-1.066	-1.312	-0.060
$T_{1-7t}$	20.561	15.167	-1.495	-1.133	0.799	0.029
$v_{1c}$	39.855	0.247	0.384	-0.689	-0.763	0.088
$v_{1t}$	27.663	-5.424	-1.546	0.104	2.433	0.186
$t_t$	453.482	31.147	2.547	-6.601	88.156	7.135
输出	$\alpha_t$	$\gamma_t$	$h_1$	$h_{1-7}$	$h_{1-7c}$	$h_{1-7t}$
$T_1$	-0.880	0.003	0.675	0.301	0.168	0.133
$T_{10}$	0.880	-0.003	-0.675	-0.301	-0.168	-0.133
$T_{1-7}$	-7.525	-0.057	0.301	5.858	3.149	2.709
$T_{1-7c}$	15.615	-0.030	0.168	3.149	6.488	-3.339
$T_{1-7t}$	-23.140	-0.027	0.133	2.709	-3.339	6.048
$v_{1c}$	15.009	0.057	0.049	0.549	1.297	-0.748
$v_{1t}$	-7.402	0.237	0.083	-0.434	-1.020	0.587
$t_t$	364.164	2.491	0.331	2.511	-1.375	3.886

从敏感性信息中可以看到,  $T_1$  仅对于  $\beta_t$  的变化敏感,  $T_{1-7}$  对于  $\beta_t$  和  $\beta_d$  的变化最敏感.这可以通过 CTDM 的分层结构加以解释:自上而下看这个结构,结果是  $T_{1-7c}$  和  $T_{1-7t}$  对更多参数的变化敏感,如路段成本函数中的  $\alpha_t$  和方式选择吸引力中的  $h_{1-7c}$  或  $h_{1-7t}$ .由于小汽车和公交有不同的路段行程时间函数,方式选择需求量对于  $\alpha_c$  不敏感.

5 不确定性分析

5.1 输入引起的不确定性

假设输入是服从正态分布且相互独立的随机变量.每个输入的均值是在未受扰动条件下的给定值(列于表 1 中).设定变异系数  $C_V = 0.3$ ,即标准差为均值乘以 0.3.通过设定  $C_V$ ,可以得到显著的统计结果.用公式(14),可以得到输出的方差—协方差矩阵.根据输出的方差,可以计算输出的标准差和  $C_V$ .  $C_V$  将用于研究模型的输出不确定性,是一个量纲一的指标.

此外,用输入和输出的协方差(式(15)),可以得到输入和输出的相关系数(式(16)),并以此来分析影响输出不确定性的关键输入.结果见表 4.根据流量守恒,前 5 个输出与  $N_1$  高度相关,可以得知,小汽车和公交网络上的出行生成和 OD 需求量都与  $N_1$  高度相关.那么可以得知,小汽车和公交网络上的出行生成和 OD 需求量,都与  $N_1$  高度相关.从网络的拓扑结构上也能看出,小汽车网络上路段 1 的流量与  $N_2$  无关,公交网络上路段 1 的流量与  $N_1$  高度相关.区域 1 的大部分出行者都选择路段 1.

表 4 输入和输出的相关系数  
Tab.4 Correlation of inputs and outputs

输出	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$N_7$	$N_8$
$T_1$	1.00	0	0	0	0	0	0	0
$T_{10}$	1.00	0	0	0	0	0	0	0
$T_{1-7}$	1.00	0	0	-0.01	-0.01	-0.01	0	0
$T_{1-7c}$	1.00	0	0.01	0.02	0	-0.01	0	0
$T_{1-7t}$	1.00	-0.01	-0.02	-0.06	-0.04	-0.01	0	0
$v_{1c}$	0.44	0	0.32	0.06	0.46	0.08	0.69	0.02
$v_{1t}$	0.85	-0.02	0.07	0.01	0.22	0.04	0.47	-0.01
$t_t$	0.30	0.02	0.08	0.21	0.34	0.58	0.61	0.19

5.2 参数引起的不确定性

与敏感性分析相同,仅考虑部分参数(如表 3 所列).假设参数是服从正态分布且相互独立的随机变量,每个参数的均值是在未受扰动条件下的给定值,设定  $C_V = 0.3$ .给定输出对于参数的偏导(如表 3),可以估计输出量的方差,输出量的方差和  $C_V$  列于表 5 中.因为  $T_1 + T_{10} = N_1$ ,则  $T_1$  和  $T_{10}$  的方差相同;路段流量的  $C_V$  因为交通分配而减小;网络性能指标,如  $t_t$  和  $v_t$ ,与输入的不确定性分析中的  $C_V$  差不多.对于除出行选择之外的每个选择阶段的需求结果,参数不确定性对输出的影响比输入的不确定性

大. 换句话说, 要提高估计结果的可信水平, 改进参数的精度比改进输入更有效, 还可以用这些信息来估计改进参数精度可能得到的好处. 假设参数的  $C_V$  从 0.3 减小至 0.1, 可以用同样的敏感性信息来重新计算输出的  $C_V$ . 表 5 的结果表明, 提高参数的精度可以改进输出量的精度. 参数的  $C_V$  和输出量的  $C_V$  之间的关系几乎是线性的, 也就是当参数的  $C_V$  减小到 1/3, 输出量的  $C_V$  也减小至 1/3.

用与输入不确定性分析中同样的方法, 可以得到输出关于参数的相关系数. 结果列于表 6 中. 与预期一样, 出行选择阶段的输出与  $\beta_t$  高度相关, 目的地选择阶段的输出与目的地的吸引力与  $h_{1-7}$  相关, 方式选择阶段的输出与方式吸引力与  $h_{1-7c}$  和  $h_{1-7t}$  相关. 这个相关性可以帮助模型使用者界定关键参数, 从而可以重点改进关键参数的精度.

表 5 敏感性分析得到的输出变异系数(参数不确定性)

Tab.5  $C_V$  of outputs by sensitivity analysis (parameter uncertainty)

输出	$C_V = 0.3$			$C_V = 0.1$		
	方差	标准差	$C_V$	方差	标准差	$C_V$
$T_1$	14.28	3.78	0.08	1.59	1.26	0.03
$T_{10}$	14.28	3.78	0.48	1.59	1.26	0.16
$T_{1-7}$	185.71	13.63	0.64	20.63	4.54	0.21
$T_{1-7c}$	273.95	16.55	1.50	30.44	5.52	0.50
$T_{1-7t}$	244.14	15.62	1.51	27.13	5.21	0.50
$v_{1c}$	12.63	3.55	0.24	1.40	1.18	0.08
$v_{1t}$	8.43	2.90	0.27	0.94	0.97	0.09
$t_t$	450.75	21.23	0.25	50.08	7.08	0.08

表 6 输出与参数的相关系数( $C_V = 0.3$ )

Tab.6 Correlation of outputs with parameters ( $C_V = 0.3$ )

输出	$\beta_t$	$\beta_d$	$\beta_m$	$\beta_r$	$\alpha_c$	$\gamma_c$
$T_1$	0.96	-0.17	-0.03	-0.02	0	0
$T_{10}$	-0.96	0.17	0.03	0.02	0	0
$T_{1-7}$	0.11	0.36	-0.05	-0.10	0	0
$T_{1-7c}$	0.06	0.16	-0.02	-0.04	0	0
$T_{1-7t}$	0.04	0.15	-0.03	-0.04	0	0
$v_{1c}$	0.34	0.01	0.03	-0.12	-0.01	0.03
$v_{1t}$	0.29	-0.28	-0.16	0.02	0.04	0.08
$t_t$	0.64	0.22	0.04	-0.19	0.19	0.40
输出	$\alpha_t$	$\gamma_t$	$h_1$	$h_{1-7}$	$h_{1-7c}$	$h_{1-7t}$
$T_1$	0	0	0.16	0.12	0.09	0.08
$T_{10}$	0	0	-0.16	-0.12	-0.09	-0.08
$T_{1-7}$	-0.01	0	0.02	0.64	0.49	0.43
$T_{1-7c}$	0.02	0	0.01	0.29	0.83	-0.44
$T_{1-7t}$	-0.03	0	0.01	0.26	-0.46	0.84
$v_{1c}$	0.08	0.01	0.01	0.23	0.78	-0.45
$v_{1t}$	-0.05	0.05	0.03	-0.22	-0.75	0.44
$t_t$	0.31	0.07	0.01	0.18	-0.14	0.40

根据表 6 中的结果,  $T_{1-7}$  和参数之间的相关性大部分是正的, 参数的取值越大,  $T_{1-7}$  的值也越大. 为了避免这种情况, 可以假设对数正态分布. 这与输入/参数的特性相关, 不在研究范围之内.

5.3 总的不确定性分析

总的不确定性分析是同时考虑输入和参数的不确定性对于输出量的影响, 同样也只考虑部分参数, 输入和参数的  $C_V$  均设为 0.3. 根据同样的方法, 输出量的  $C_V$  列于表 7 中.

表 7 敏感性分析的输出量的  $C_V$  (总的不确定性)

Tab.7  $C_V$ s of outputs by sensitivity analysis (total uncertainty)

输出	方差	标准差	$C_V$
$T_1$	205.91	14.35	0.30
$T_{10}$	28.95	5.38	0.68
$T_{1-7}$	224.56	14.99	0.70
$T_{1-7c}$	267.03	16.34	1.48
$T_{1-7t}$	253.13	15.91	1.54
$v_{1c}$	23.47	4.84	0.33
$v_{1t}$	32.65	5.71	0.54
$t_t$	770.48	27.76	0.33

从结果可以发现: 由输入和参数引起的输出量的不确定性, 不是输入不确定性和参数不确定性的简单相加; 模型每个阶段的输出的不确定性与参数的不确定性有相同的变化趋势; 参数的不确定性对输出结果的影响比输入的不确定性大得多.

6 结论

本文给出了交通需求组合模型的不确定性分析方法. 采用交通需求模型中常用的 Sioux Falls 路网作为算例, 分别研究输入的不确定性和参数的不确定性. 结果表明, 参数的不确定性对输出结果的影响比输入的不确定性大得多. 不确定性分析还可估计改进参数的精度对输出不确定性的改善情况. 算例证明, 对于不确定性分析, 基于敏感性的分析方法更可行且因不需大量时间进行仿真计算而效率更高.

参考文献:

[1] Ashley D J. Uncertainty in the context of highway appraisal[J]. Transportation, 1980, 9(3): 249.  
[2] Zhao Y, Kockelman K M. The propagation of uncertainty through travel demand models: an exploratory analysis[J]. Annals of Regional Science, 2002, 36(1): 145.