

上覆非饱和层地基-隧道动力响应半解析算法

郭慧吉^{1,2}, 狄宏规^{1,2}, 周顺华^{1,2}, 王炳龙^{1,2}, 何超^{1,2}

(1. 同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室, 上海 201804; 2. 同济大学

上海市轨道交通结构耐久与系统安全重点实验室, 上海 201804)

摘要: 分别采用非饱和土波动方程与壳的振动方程描述地基土的波动及隧道衬砌的振动特性。基于Helmholtz矢量分解定理与分离变量法, 获得包含柱面波与平面波的总场表达式。利用波函数转换性质进行不同界面处平面波与柱面波的转化, 结合地表边界、土层交界面以及隧-土交界面等边界假设进行耦合求解, 提出了上覆非饱和层的饱和地基-隧道系统动力响应半解析算法。通过既有模型对比, 验证了该算法的正确性。最后, 基于该方法进行了算例分析, 结果表明: 上覆非饱和层对隧道底部土体位移响应影响较小, 对地表位移响应影响较大; 而临界速度受上覆土层饱和度的影响较小, 其主要受隧道穿越土层性质的影响。

关键词: 隧道; 饱和地基; 上覆非饱和层; 波函数转换

中图分类号: U451.3

文献标志码: A

Semi-analytical Method for Dynamic Responses Calculation of Tunnel Buried in Foundation with Unsaturated Superstratum

GUO Huiji^{1,2}, DI Honggui^{1,2}, ZHOU Shunhua^{1,2}, WANG Binglong^{1,2}, HE Chao^{1,2}

(1. Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. Shanghai Key Laboratory of Rail Infrastructure Durability and System Safety, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: This paper presents an analytical method to calculate the dynamic response of tunnel embedded in saturated foundation with an unsaturated superstratum. The vibration characteristics of foundation soil and tunnel lining were simulated by unsaturated wave equation and shell vibration equation respectively. Based on the method of separating variables and Helmholtz vector

decomposition theorem, the expression of total wave field can be obtained, which includes cylindrical wave and plane wave. The system dynamic response was solved by the wave function transformation method, based on the boundary assumptions of foundation surface, soil interface and tunnel soil interface. The proposed method was verified by comparing with the existing models. Finally, based on the proposed method, the dynamic response of system was analyzed by a cases study. The results show that the displacement response of the ground is affected by the overlying unsaturated soil layer. The critical velocity is less affected by the saturation of overlying soil and mainly affected by the characteristics of soil that tunnel located.

Key words: tunnel; saturated soil; unsaturated superstratum; wave functions transformation

地铁是缓解城市交通堵塞的重要手段之一。然而, 随着地铁运营里程的快速增长和运营时间的增加, 地铁隧道的车致振动问题日益突出, 其不仅影响邻近建筑物内居民的生活以及精密仪器等的正常工作, 还会诱发结构损伤和地基土的沉降。如何预测地铁隧道的车致振动响应和减小车致振动的影响, 正受到越来越多的关注。

相关学者对此展开了研究, Metrikine等^[1]采用解析的欧拉梁模型来研究地下铁道的振动响应问题, 尽管其可进一步考虑地基饱和特性以及分层特性^[2], 但该系列模型为二维模型, 无法准确获得系统三维动力响应。基于Flügge薄壁圆柱壳振动方程, Forrest和Hunt^[3]提出了全空间地基-隧道的管中管模型, 即PiP模型。随后相关学者考虑地基土体的

收稿日期: 2020-09-23

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(51808405); 上海市自然科学基金面上项目(20ZR1459900); 同济大学中央高校基本科研业务费专项资金(22120180568)

第一作者: 郭慧吉(1994—), 男, 博士生, 主要研究方向为轨道交通隧道系统动力学。E-mail: guohuiji@tongji.edu.cn

通信作者: 狄宏规(1985—), 男, 副教授, 硕士生导师, 工学博士, 主要研究方向为轨道交通隧道系统动力学。

E-mail: 2012dihonggui@tongji.edu.cn



论文
拓展
介绍

饱和特性^[4],进一步发展了PiP模型。尽管PiP模型计算效率高,但该系统模型忽略了地表边界对系统动力响应的影响,适用于深埋隧道。Yuan等^[5]、He等^[6-7]考虑地表边界的影响,利用波函数转化法,分别求解了单相弹性地基、饱和分层地基以及双洞隧道等条件下地基-隧道系统动力响应闭合解。

然而,尽管上述模型可以较为精细考虑隧道结构、车辆荷载等对系统动力响应的影响,但上述计算模型均采用单相弹性、饱和多孔介质来模拟地基土体。事实上,对于饱和软土地区,由于蒸腾作用、地下水资源开发等原因^[8],饱和地基上部往往存在非饱和层,因此有必要考虑饱和度对系统动力响应的影响。基于非饱和土波动方程,徐明江等^[9-10]、郭鹏飞等^[11]先后考虑了土体饱和度对路基及桩基等结构动力响应的影响。随后狄宏规等^[12]、郭慧吉等^[13]考虑土体的非饱和特性,分别建立了非饱和全空间与非饱和半空间地基-隧道系统动力响应半解析解。但尚未考虑地基土的层状特性,也无法考虑上覆非饱和层对地铁隧道系统动力响应的影响。

为此,本文提出一种考虑上覆非饱和层的饱和地基-隧道系统动力响应半解析算法。将上覆非饱和土体视为由固、液、气三相组成的介质,下部饱和地基土体视为由固、液两相组成的饱和多孔介质,隧道仍视为Flügge薄壁圆柱壳。基于Helmholtz矢量分解定理求解上覆非饱和土的波动方程与下部饱和土的波动方程(通过前述非饱和土波动方程退化得到),并采用分离变量法求解壳的振动控制方程,基于平面波和柱面波的转换性质,利用土层分界面、地表和隧道-土体界面处的边界假设,建立了上覆非饱和层的饱和地基-隧道系统动力响应半解析解,并探讨了上覆非饱和层对系统动力响应的影响。

1 模型的简化与假设

1.1 模型的简化

采用均质、各向同性、线弹性材料的Flügge薄壁圆柱壳模拟隧道衬砌,采用半空间或基岩上覆盖水平层状的不同类型介质(两相饱和和多孔介质或三相非饱和介质)模拟地基土体。各层土体具有各自的坐标系,如图1所示,详细坐标系定义如下:

(1)隧道穿越土层上方(下方)土层采用直角坐标系,且坐标原点位于土层底部(顶部);

(2)隧道穿越土层中存在圆柱坐标与直角坐标两种坐标系,坐标原点设于隧道中心处。

图1中, $x^{(1)}$ 、 $x^{(2)}$ 、 $x^{(3)}$ 分别代表隧道穿越土层上方、隧道穿越土层以及隧道穿越土层下方独立坐标系中 x 的量值;I、II分别代表隧道穿越土层上方、下方的水平土层交界界面。

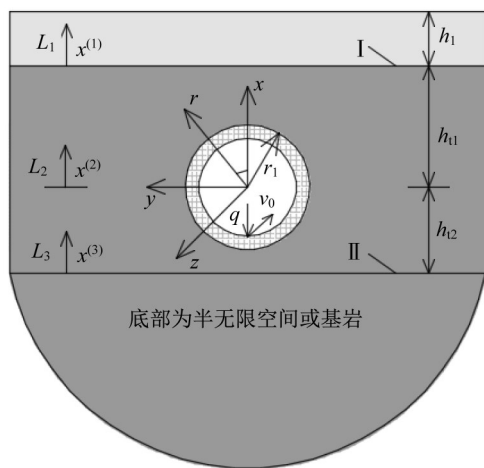


图1 层状地基-隧道系统简化示意图

Fig. 1 Simplified schematic diagram of layered foundation-tunnel system

1.2 模型边界及界面假定

经上述简化后,对模型的边界(地表与模型下边界)与界面(隧-土交界面及I、II土层交界面)做出进一步假设,即

(1)地表边界应力为0,同时地表边界为透水、透气边界;

(2)当模型下部为半无限空间,则无限远处位移、应力、孔压等消散为0;当下部为基岩时,模型下边界基岩内位移为0,且不透水不透气。

(3)土层交界面I、II处,土体位移、应力、孔压以及渗流连续。

(4)隧-土交界面位移应力连续,且隧道衬砌不透水、不透气。

2 土体总场表达式的求解

由模型简化可知,地基上部为三相非饱和介质,下部为两相的饱和多孔介质,因此地基土体总场表达式的求解思路为:首先通过非饱和土波动方程求解获得三相非饱和介质的总场表达式;再通过三相介质参数退化,获得两相饱和介质的总场表达式,具体求解如下:

首先引入三相非饱和多孔介质的实用波动方程^[13],即

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 \mathbf{u}_b + (\lambda_c + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_b) + M \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \\ N \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho_u \mathbf{u}_b'' + \rho_l \mathbf{v}'' + \rho_g \mathbf{w}'' \\ b_{11} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_b) + b_{12} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \\ b_{13} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho_l \mathbf{u}_b'' + \rho_l \mathbf{v}'' + d_1 \mathbf{v}' \\ b_{21} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_b) + b_{22} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \\ b_{23} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho_g \mathbf{u}_b'' + \rho_g \mathbf{w}'' + d_g \mathbf{w}' \end{cases} \quad (1)$$

式中:下标“s”、“b”、“l”、“g”分别表示土颗粒、土骨架、孔隙水以及气体的分量;上标“'”、“''”分别表示对时间 t 求一阶、二阶导; \mathbf{u}_b 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{w} 分别为土骨架位移、孔隙水与土体骨架的相对位移、气体与土体骨架间的相对位移; λ 、 μ 为土骨架Lame常数;其余变量表达式及物理意义参考文献[13]。

根据Helmholtz矢量分解定理,式(1)中位移 \mathbf{u}_b 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{w} ,可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_b = \nabla \times (\mathbf{e}_z \varphi_{SH}) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}_z \varphi_{SV}) + \nabla \varphi_P \\ \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{e}_z \phi_{SH}) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}_z \phi_{SV}) + \nabla \phi_P \\ \mathbf{w} = \nabla \times (\mathbf{e}_z \chi_{SH}) + \nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}_z \chi_{SV}) + \nabla \chi_P \end{cases} \quad (2)$$

式中:下标“SH”、“SV”、“P”分别表示SH、SV、P波的分量; φ 、 ϕ 、 χ 表示土骨架、孔隙水以及气体的势函数; \mathbf{e}_z 为 z 方向上的单位向量。

将式(2)代入式(1),可在频域-波数域中解得直角坐标系以及圆柱坐标系下位移 \hat{U} 、孔压 $\hat{\mathcal{P}}$ 、应力 $\hat{\Psi}$ 势函数分别为,具体求解过程参考文献[13]。

$$\begin{aligned} \hat{U}^{d,u} &= [\hat{U}_1^{d,u}; \hat{U}_2^{d,u}; \hat{U}_3^{d,u}; \hat{U}_4^{d,u}; \hat{U}_5^{d,u}]^T \\ \hat{\mathcal{P}}_1^{d,u} &= [\hat{\mathcal{P}}_{11}^{d,u}; \hat{\mathcal{P}}_{12}^{d,u}; \hat{\mathcal{P}}_{13}^{d,u}; \hat{\mathcal{P}}_{14}^{d,u}; \hat{\mathcal{P}}_{15}^{d,u}]^T \\ \hat{\mathcal{P}}_g^{d,u} &= [\hat{\mathcal{P}}_{g1}^{d,u}; \hat{\mathcal{P}}_{g2}^{d,u}; \hat{\mathcal{P}}_{g3}^{d,u}; \hat{\mathcal{P}}_{g4}^{d,u}; \hat{\mathcal{P}}_{g5}^{d,u}]^T \\ \hat{\Psi}^{d,u} &= [\hat{\Psi}_1^{d,u}; \hat{\Psi}_2^{d,u}; \hat{\Psi}_3^{d,u}; \hat{\Psi}_4^{d,u}; \hat{\Psi}_5^{d,u}]^T \\ \hat{U}_m^{o,r} &= [\hat{U}_{m1}^{o,r}; \hat{U}_{m2}^{o,r}; \hat{U}_{m3}^{o,r}; \hat{U}_{m4}^{o,r}; \hat{U}_{m5}^{o,r}]^T \\ \hat{\mathcal{P}}_{lm}^{o,r} &= [\hat{\mathcal{P}}_{lm1}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{lm2}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{lm3}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{lm4}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{lm5}^{o,r}]^T \\ \hat{\mathcal{P}}_{gm}^{o,r} &= [\hat{\mathcal{P}}_{gm1}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{gm2}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{gm3}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{gm4}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{gm5}^{o,r}]^T \\ \hat{\Psi}_{gm}^{o,r} &= [\hat{\Psi}_{gm1}^{o,r}; \hat{\Psi}_{gm2}^{o,r}; \hat{\Psi}_{gm3}^{o,r}; \hat{\Psi}_{gm4}^{o,r}; \hat{\Psi}_{gm5}^{o,r}]^T \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_m^{o,r} &= [\hat{U}_{m1}^{o,r}; \hat{U}_{m2}^{o,r}; \hat{U}_{m3}^{o,r}; \hat{U}_{m4}^{o,r}; \hat{U}_{m5}^{o,r}]^T \\ \hat{\mathcal{P}}_{lm}^{o,r} &= [\hat{\mathcal{P}}_{lm1}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{lm2}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{lm3}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{lm4}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{lm5}^{o,r}]^T \\ \hat{\mathcal{P}}_{gm}^{o,r} &= [\hat{\mathcal{P}}_{gm1}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{gm2}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{gm3}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{gm4}^{o,r}; \hat{\mathcal{P}}_{gm5}^{o,r}]^T \\ \hat{\Psi}_{gm}^{o,r} &= [\hat{\Psi}_{gm1}^{o,r}; \hat{\Psi}_{gm2}^{o,r}; \hat{\Psi}_{gm3}^{o,r}; \hat{\Psi}_{gm4}^{o,r}; \hat{\Psi}_{gm5}^{o,r}]^T \end{aligned} \quad (4)$$

式中:上标“ \sim ”、“ $-$ ”、“ \sim ”分别代表 z 方向对应的波数域、 y 方向对应的波数域以及时间 t 对应的时域;上标 d 、 u 分别代表下行波与上行波分量, o 、 r 分别代

表外行波与内行波分量,下标中1、2、3、4、5分别代表SH、SV、P1、P2、P3波分量, m 表示模态分量,式中变量具体表达式参考文献[13]。

由于模型中存在不同形状的散射面(土层水平界面、隧-土交界的圆形界面),导致地基土体中同时存在平面波与柱面波。故根据式(3)、式(4)可得不同位置处的位移 \hat{u} 、应力 $\hat{\sigma}$ 、孔压 \hat{p} 总场表达式如下:

$$\begin{cases} \hat{u}^{(1,3)}(x^{(1,3)}, y^{(1,3)}, k_z, \omega) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{U}^{u(1,3)} A^{u(1,3)} + \hat{U}^{d(1)} A^{d(1,3)}) e^{ik_y y} dk_y \\ \hat{\sigma}^{(1,3)}(x^{(1,3)}, y^{(1,3)}, k_z, \omega) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Psi}^{u(1,3)} A^{u(1,3)} + \hat{\Psi}^{d(1)} A^{d(1,3)}) e^{ik_y y} dk_y \\ \hat{p}_{l,g}^{(1,3)}(x^{(1,3)}, y^{(1,3)}, k_z, \omega) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\mathcal{P}}_{l,g}^{u(1,3)} A^{u(1,3)} + \hat{\mathcal{P}}_{l,g}^{d(1)} A^{d(1,3)}) e^{ik_y y} dk_y \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \hat{u}^{(2)}(x^{(2)}, y^{(2)}, k_z, \omega) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{U}^{u(2)} A^{u(2)} + \hat{U}^{d(2)} A^{d(2)}) e^{ik_y y} dk_y + \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{U}_m^{o(2)} A_m^o \\ \hat{\sigma}^{(2)}(x^{(2)}, y^{(2)}, k_z, \omega) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\Psi}^{u(2)} A^{u(2)} + \hat{\Psi}^{d(2)} A^{d(2)}) e^{ik_y y} dk_y + \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}_m^{o(2)} A_m^o \\ \hat{p}_{l,g}^{(2)}(x^{(2)}, y^{(2)}, k_z, \omega) = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\mathcal{P}}_{l,g}^{u(2)} A^{u(2)} + \hat{\mathcal{P}}_{l,g}^{d(2)} A^{d(2)}) e^{ik_y y} dk_y + \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{P}}_{l,g}^{o(2)} A_m^o \end{cases} \quad (6)$$

式中: $A^{d(n)} = [A_1^{d(n)} A_2^{d(n)} A_3^{d(n)} A_4^{d(n)} A_5^{d(n)}]^T$, $A^{u(n)} = [A_1^{u(n)} A_2^{u(n)} A_3^{u(n)} A_4^{u(n)} A_5^{u(n)}]^T$, $A_m^o = [A_{m1}^o A_{m2}^o A_{m3}^o A_{m4}^o A_{m5}^o]^T$, 分别为下行波、上行波以及柱面外行波的待定系数; k 表示波数,其下标表述波数的方向分量。

经过非饱和介质参数退化,即当 S_r 、 S_e 趋近于1, A_s 趋近于0时,式(5)、式(6)也可以表示两相饱和和多孔介质总场。

3 模型耦合求解

为了满足不同类型波函数在边界或界面处的耦合求解,通过波函数转化公式,推导可得上行波、下行波与柱面外行波之间的转化关系(7)以及内行波与上行波、下行波之间转化关系(8):

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_{mj}^o \\ \hat{\Psi}_{mj}^o \\ \hat{\mathcal{J}}_{l,gmj}^o \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_{mj}^u(k_y, \omega)}{h_j} \begin{pmatrix} \hat{U}_j^u \\ \hat{\Psi}_j^u \\ \hat{\mathcal{J}}_{l,gj}^u \end{pmatrix} e^{ik_y y} dk_y \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_{mj}^o \\ \hat{\Psi}_{mj}^o \\ \hat{\mathcal{J}}_{l,gmj}^o \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_{mj}^d(k_y, \omega)}{h_j} \begin{pmatrix} \hat{U}_j^d \\ \hat{\Psi}_j^d \\ \hat{\mathcal{J}}_{l,gj}^d \end{pmatrix} e^{ik_y y} dk_y$$

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_j^d \\ \hat{\Psi}_j^d \\ \hat{\mathcal{J}}_{l,gj}^d \end{pmatrix} e^{ik_y y} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{U}_{mj}^r \\ \hat{\Psi}_{mj}^r \\ \hat{\mathcal{J}}_{l,gmj}^r \end{pmatrix} I_{mj}^d(k_y, \omega) \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{U}_j^u \\ \hat{\Psi}_j^u \\ \hat{\mathcal{J}}_{l,gj}^u \end{pmatrix} e^{ik_y y} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \hat{U}_{mj}^r \\ \hat{\Psi}_{mj}^r \\ \hat{\mathcal{J}}_{l,gmj}^r \end{pmatrix} I_{mj}^u(k_y, \omega)$$

式中: $I_{mj}^d(k_y, \omega)$ 、 $I_{mj}^u(k_y, \omega)$ 、 h_j 表达式参考文献[6]。

在平面波、柱面波转化的基础上,进一步代入边界、界面条件进行模型的耦合求解。

3.1 地表边界

根据模型边界及界面假定条件(1),可得

$$\begin{cases} \hat{\sigma}^{(1)}(x^{(1)}=h_1, k_y, k_z, \omega)=0 \\ \hat{p}_l^{(1)}(x^{(1)}=h_1, k_y, k_z, \omega)=0 \\ \hat{p}_g^{(1)}(x^{(1)}=h_1, k_y, k_z, \omega)=0 \end{cases} \quad (9)$$

将式(5)代入式(9)得

$$A^{d(1)} = - \begin{bmatrix} \hat{\Psi}^{d(1)}(x^{(1)}=h_1, k_y, k_z, \omega) \\ \hat{\mathcal{J}}_l^{d(1)}(x^{(1)}=h_1, k_y, k_z, \omega) \\ \hat{\mathcal{J}}_g^{d(1)}(x^{(1)}=h_1, k_y, k_z, \omega) \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \hat{\Psi}^{u(1)}(x^{(1)}=h_1, k_y, k_z, \omega) \\ \hat{\mathcal{J}}_l^{u(1)}(x^{(1)}=h_1, k_y, k_z, \omega) \\ \hat{\mathcal{J}}_g^{u(1)}(x^{(1)}=h_1, k_y, k_z, \omega) \end{bmatrix} A^{u(1)} = Q_d A^{u(1)} \quad (10)$$

3.2 模型下边界

根据模型边界及界面假定条件(2),将模型下边界分为以下两种情况进行讨论,即

(1) 半无限空间

若模型下部为半无限空间,则无限远处位移、应力、孔压等消散为0,故

$$A^{u(3)}(x^{(3)}, k_y, k_z, \omega) = 0, x^{(3)} < 0 \quad (11)$$

(2) 底部为基岩

若模型下部为基岩,则基岩与土体交界面位移为0,且不透水、不透气,可得

$$\begin{cases} \hat{u}(x^{(3)}=0, k_y, k_z, \omega) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \hat{p}_l^{(n)}(x^{(3)}=0, k_y, k_z, \omega) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \hat{p}_g^{(n)}(x^{(3)}=0, k_y, k_z, \omega) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

3.3 土层界面 I

由图1可得,土层界面 I 为水平界面,为实现总场势函数在土层界面 I 处的耦合求解,需将总场表达式统一为直角坐标系的表达形式,故将式(7)代入式(6)。可得当 $x^{(2)} > 0$ 时,直角坐标系下总场势函数的表达式为

$$\begin{cases} \hat{u}^{(2)}(x^{(2)}, k_y, k_z, \omega) = \hat{U}^{u(2)} A^{u(2)} + \hat{U}^{d(2)} A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{U}_l^u A_m^o \\ \hat{\sigma}^{(2)}(x^{(2)}, k_y, k_z, \omega) = \hat{\Psi}^{u(2)} A^{u(2)} + \hat{\Psi}^{d(2)} A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}_l^u A_m^o \\ \hat{p}_{l,g}^{(2)}(x^{(2)}, k_y, k_z, \omega) = \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(2)} A^{u(2)} + \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(2)} A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^u A_m^o \end{cases} \quad (13)$$

根据模型边界及界面假定条件(3),结合式(13)可得

$$\begin{aligned} & \left(\hat{U}^{u(2)} A^{u(2)} + \hat{U}^{d(2)} A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{U}_l^u A_m^o \right)_{x^{(2)}=h_g} = \left(\hat{U}^{u(1)} A^{u(1)} + \hat{U}^{d(1)} A^{d(1)} \right)_{x^{(1)}=0} \\ & \left(\hat{\Psi}^{u(2)} A^{u(2)} + \hat{\Psi}^{d(2)} A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}_l^u A_m^o \right)_{x^{(2)}=h_g} = \left(\hat{\Psi}^{u(1)} A^{u(1)} + \hat{\Psi}^{d(1)} A^{d(1)} \right)_{x^{(1)}=0} \\ & \left(\hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(2)} A^{u(2)} + \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(2)} A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^u A_m^o \right)_{x^{(2)}=h_g} = \left(\hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(1)} A^{u(1)} + \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(1)} A^{d(1)} \right)_{x^{(1)}=0} \\ & \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(2)} A^{u(2)} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(2)} A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^u A_m^o \right)_{x^{(2)}=h_g} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(1)} A^{u(1)} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(1)} A^{d(1)} \right)_{x^{(1)}=0} \end{aligned} \quad (14)$$

将式(10)代入式(14),整理可得

$$K_{d1}A^{u(2)} + K_{u1}A^{d(2)} + K_{l1}A_m^o = 0 \quad (15)$$

式中:

$$\begin{aligned} K_{d1} &= [X_d^{(1)}(x^{(1)}=0)Q_d + X_u^{(1)}(x^{(1)}=0)]^{-1}X_d^{(2)}(x^{(2)}=h_{l1}) - [Y_d^{(1)}(x^{(1)}=0)Q_d + \\ &Y_u^{(1)}(x^{(1)}=0)]^{-1}Y_d^{(2)}(x^{(2)}=h_{l1}) \\ K_{u1} &= [X_d^{(1)}(x^{(1)}=0)Q_d + X_u^{(1)}(x^{(1)}=0)]^{-1} \\ &X_u^{(2)}(x^{(2)}=h_{l1}) - [Y_d^{(1)}(x^{(1)}=0)Q_d + \\ &Y_u^{(1)}(x^{(1)}=0)]^{-1}Y_u^{(2)}(x^{(2)}=h_{l1}) \\ K_{l1} &= [X_d^{(1)}(x^{(1)}=0)Q_d + X_u^{(1)}(x^{(1)}=0)]^{-1} \\ &X_u^t(x^{(2)}=h_{l1}) - [Y_d^{(1)}(x^{(1)}=0)Q_d + \\ &Y_u^{(1)}(x^{(1)}=0)]^{-1}Y_u^t(x^{(2)}=h_{l1}) \end{aligned}$$

$$X_{d,u}^{(n)} = \begin{bmatrix} \hat{U}^{d,u(n)} \\ \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_l^{d,u(n)} \\ \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_g^{d,u(n)} \end{bmatrix}, Y_{d,u}^{(n)} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi}^{d,u(n)} \\ \hat{\mathcal{J}}_l^{d,u(n)} \\ \hat{\mathcal{J}}_g^{d,u(n)} \end{bmatrix}$$

3.4 土层界面 II

同理为满足土层界面 II 处的耦合求解,可得当 $x^{(2)} < 0$ 时,总场势函数直角坐标系下的表达式为

$$\begin{cases} \hat{u}^{(2)}(x^{(2)}, k_y, k_z, \omega) = \\ \hat{U}^{u(2)}A^{u(2)} + \hat{U}^{d(2)}A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{U}_t^u A_m^o \\ \hat{\sigma}^{(2)}(x^{(2)}, k_y, k_z, \omega) = \\ \hat{\Psi}^{u(2)}A^{u(2)} + \hat{\Psi}^{d(2)}A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}_t^d A_m^o \\ \hat{p}_{l,g}^{(2)}(x^{(2)}, k_y, k_z, \omega) = \\ \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(2)}A^{u(2)} + \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(2)}A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{J}}_{l,gm}^d A_m^o \end{cases} \quad (16)$$

参考模型下边界求解,土层界面 II 处的求解同样可以分为以下两种情况进行讨论。

(1) 半无限空间

当下部为半无限空间时,根据模型边界及界面假设(3)可得

$$\begin{aligned} &\left(\hat{U}^{u(2)}A^{u(2)} + \hat{U}^{d(2)}A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{U}_t^u A_m^o \right)_{x^{(2)}=-h_{l2}} = \\ &\left(\hat{U}^{u(3)}A^{u(3)} + \hat{U}^{d(3)}A^{d(3)} \right)_{x^{(3)}=0} = \\ &\left(\hat{\Psi}^{u(2)}A^{u(2)} + \hat{\Psi}^{d(2)}A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}_t^u A_m^o \right)_{x^{(2)}=-h_{l2}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\hat{\Psi}^{u(3)}A^{u(3)} + \hat{\Psi}^{d(3)}A^{d(3)} \right)_{x^{(3)}=0} = \\ &\left(\hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(2)}A^{u(2)} + \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(2)}A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^u A_m^o \right)_{x^{(2)}=-h_{l2}} = \\ &\left(\hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(3)}A^{u(3)} + \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(3)}A^{d(3)} \right)_{x^{(3)}=0} = \\ &\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(2)}A^{u(2)} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(2)}A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^u A_m^o \right)_{x^{(2)}=-h_{l2}} = \\ &\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(3)}A^{u(3)} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(3)}A^{d(3)} \right)_{x^{(3)}=0} \quad (17) \end{aligned}$$

将式(11)代入式(17)整理可得

$$K_{d2}^1A^{u(2)} + K_{u2}^1A^{d(2)} + K_{l2}^1A_m^o = 0 \quad (18)$$

式中: $K_{d2}^1 = X_d^{(2)}(x^{(2)} = -h_{l2})$, $K_{u2}^1 = X_u^{(n)}(x^{(2)} = -h_{l2})$, $K_{l2}^1 = X_d^t(x^{(2)} = -h_{l2})$

(2) 底部为基岩

当下部为基岩时,根据模型边界及界面假设(3)可得

$$\begin{aligned} &\left(\hat{U}^{u(2)}A^{u(2)} + \hat{U}^{d(2)}A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{U}_t^u A_m^o \right)_{x^{(2)}=-h_{l2}} = 0 \\ &\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{u(2)}A^{u(2)} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^{d(2)}A^{d(2)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathcal{J}}_{l,g}^u A_m^o \right)_{x^{(2)}=-h_{l2}} = 0 \quad (19) \end{aligned}$$

进一步整理得

$$K_{d2}^2A^{u(2)} + K_{u2}^2A^{d(2)} + K_{l2}^2A_m^o = 0 \quad (20)$$

式中:

$$\begin{aligned} K_{d2}^2 &= [X_u^{(3)}(x^{(3)}=0)]^{-1}X_d^{(2)}(x^{(2)}=-h_{l2}) - \\ &[Y_u^{(3)}(x^{(3)}=0)]^{-1}Y_d^{(2)}(x^{(2)}=-h_{l2}) \\ K_{u2}^2 &= [X_u^{(3)}(x^{(3)}=0)]^{-1}X_u^{(2)}(x^{(2)}=-h_{l2}) - \\ &[Y_u^{(3)}(x^{(3)}=0)]^{-1}Y_u^{(2)}(x^{(2)}=-h_{l2}) \\ K_{l2}^2 &= [X_u^{(3)}(x^{(3)}=0)]^{-1}X_d^t(x^{(2)}=-h_{l2}) - \\ &[Y_u^{(3)}(x^{(3)}=0)]^{-1}Y_d^t(x^{(2)}=-h_{l2}) \end{aligned}$$

3.5 隧-土交界面

由图1可得,隧-土交界面为圆柱面,为实现总场势函数于隧-土交界面处的耦合求解,需将总场表达式转换为圆柱坐标系的表达形式。

首先联立式(15)、式(18)、式(20),可得直角坐标未知系数与圆柱坐标未知系数之间的转化关系,即

$$\begin{aligned}
A_d^2 &= -[(K_{u1})^{-1}K_{d1} - (K_{u2}^{1,2})^{-1}K_{d2}^{1,2}]^{-1} \\
&[(K_{u1})^{-1}K_{d1} - (K_{u2}^{1,2})^{-1}K_{d2}^{1,2}]A^o \\
A_u^2 &= -[(K_{d1})^{-1}K_{u1} - (K_{d2}^{1,2})^{-1}K_{u2}^{1,2}]^{-1} \\
&[(K_{d1})^{-1}K_{d1} - (K_{d2}^{1,2})^{-1}K_{d2}^{1,2}]A^o
\end{aligned} \quad (21)$$

整理可得

$$\begin{cases} A_j^{d(2)} = \sum_{m=-N}^N \sum_{j=1}^5 K_{jmf}^d A_{mj}^o \\ A_j^{u(2)} = \sum_{m=-N}^N \sum_{j=1}^5 K_{jmf}^u A_{mj}^o \end{cases} \quad (22)$$

进一步将式(8)、式(22)代入式(6)得圆柱坐标下总场势函数表达式为

$$\begin{aligned}
\hat{u} &= \sum_{m=-N}^N \sum_{j=1}^5 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-N_j}^N \sum_{j=1}^5 (I_{mj}(k_y, \omega) K_{jmf}^d + I'_{mj}(k_y, \omega) K_{jmf}^u) A_{nj}^o dk_y \right. \\
&\quad \left. A_{mj}^o \hat{U}_{mj}^{o(2)} + \frac{1}{2\pi} \hat{U}_{mj}^{o(2)} \right] \\
\hat{\sigma} &= \sum_{m=-N}^N \sum_{j=1}^5 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-N_j}^N \sum_{j=1}^5 (I_{mj}(k_y, \omega) K_{jmf}^d + I'_{mj}(k_y, \omega) K_{jmf}^u) A_{nj}^o dk_y \right. \\
&\quad \left. A_{mj}^o \hat{\Psi}_{mj}^{o(2)} + \frac{1}{2\pi} \hat{\Psi}_{mj}^{o(2)} \right] \\
\hat{p}_{l,g} &= \sum_{m=-N}^N \sum_{j=1}^5 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-N_j}^N \sum_{j=1}^5 (I_{mj}(k_y, \omega) K_{jmf}^d + I'_{mj}(k_y, \omega) K_{jmf}^u) A_{nj}^o dk_y \right. \\
&\quad \left. A_{mj}^o \hat{\mathcal{P}}_{l,g}^{o(2)} + \frac{1}{2\pi} \hat{\mathcal{P}}_{l,g}^{o(2)} \right]
\end{aligned} \quad (23)$$

同时,根据模型边界及界面假设(4),结合壳体平衡方程^[3]可得

$$S \begin{bmatrix} \hat{U}_{mz} \\ \hat{U}_{m\theta} \\ -\hat{U}_{mr} \end{bmatrix}_{r=r_1} + \begin{bmatrix} -\hat{\Psi}_{mz} \\ -\hat{\Psi}_{m\theta} \\ \hat{\Psi}_{mr} \end{bmatrix}_{r=r_1} = \begin{bmatrix} \hat{q}_{mz} \\ \hat{q}_{m\theta} \\ \hat{q}_{mr} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{p}_l}{\partial r} \right)_{r=r_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial \hat{p}_g}{\partial r} \right)_{r=r_1} = 0 \quad (25)$$

式中: \hat{q} 表示激振荷载,其余参量参考文献[13]。

将式(23)代入式(24)、式(25),结合式(22)求解待定系数 $A_{mj}^o, A^{d(n)}, A^{u(n)}$ 。最终将待定系数代入式(5)、式(6)获得整个半空间动力响应。同时通过傅里叶逆变换,可进一步获得时域-空间域中系统的动力响应。

4 模型验证及算例分析

4.1 模型验证

为验证模型正确性,将上述模型退化为非饱和均质地基以及单相弹性分层地基模型分别与既有的半解析法模型^[13]以及2.5D有限元边界元模型^[14]的计算结果进行对比分析,算例验证简化示意图如图2所示。

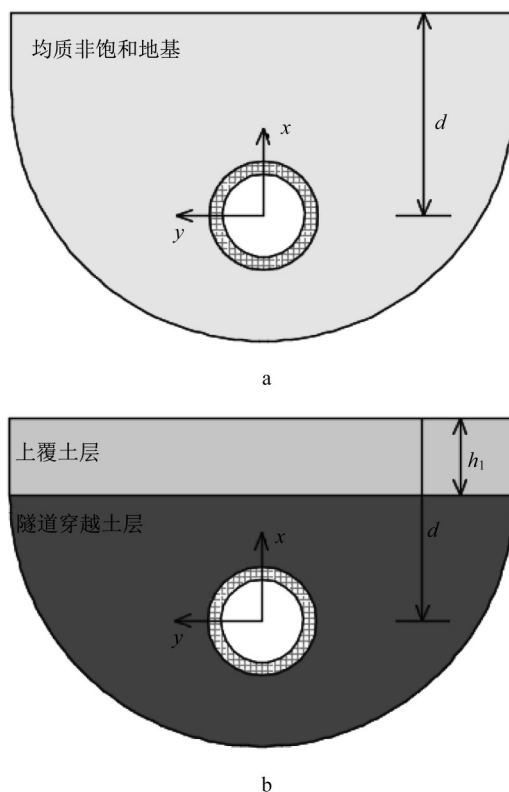


图2 验证算例示意图

Fig. 2 Verification Cases

验证算例①:将本文模型退化为非饱和均匀地质,如图2a所示。采用文献[13]中计算参数,计算饱和度为0.9,隧道埋深为10m的情况下,固定单位简谐荷载作用于隧道仰拱处时系统的动力响应。取隧道底部 $(-3m, 0m, 0m)$ 以及正上方地表位置处 $(10m, 0m, 0m)$ 的计算结果与既有的半解析法模型进行对比分析,结果如图3所示。对比结果表明两者吻合较好,验证了本文方法的正确性。

验证算例②:计算隧道埋置于分层半空间地基土体内的情况,如图2b所示。隧道埋深为20m,上覆土体厚度为5m或10m。通过参数退化,获得验证模型的计算参数。计算固定单位简谐荷载作用于隧道仰拱处的动力响应,取隧道正上方地表位置处 $(20m, 20m, 0m)$

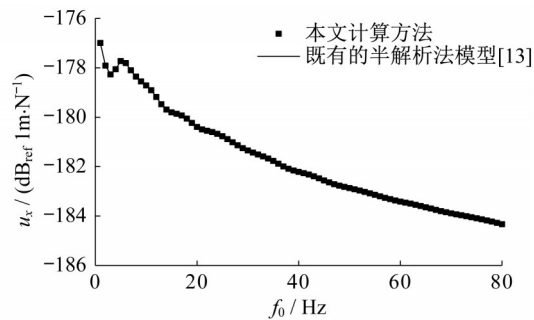
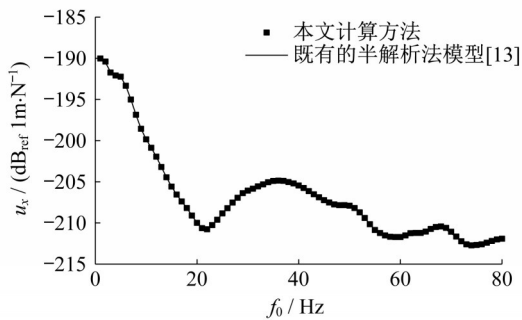
a 观测点位置 $x=-3$ m, $y=0$ m, $z=0$ b 观测点位置 $x=10$ m, $y=0$ m, $z=0$

图3 验证算例①计算结果

Fig. 3 Comparison of calculation results of verification Case ①

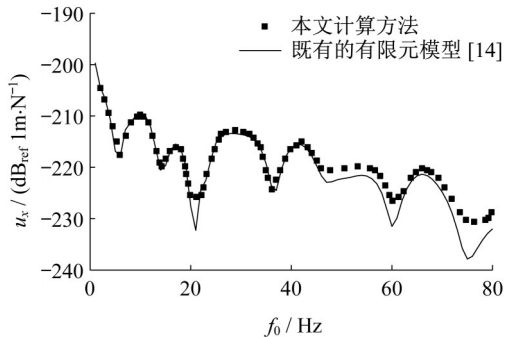
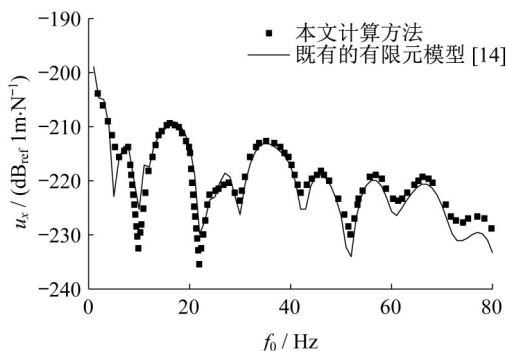
a 上覆土体厚度 $h_1=5$ mb 上覆土体厚度 $h_1=10$ m

图4 验证算例②计算结果

Fig. 4 Comparison of calculation results of verification Case ②

的计算结果进行对比分析,如图4所示。结果发现本文计算结果与既有2.5维有限元边界元模型^[14]计算结果吻合较好,进一步验证了本文方法的正确性。

4.2 算例分析

通过算例分析,研究固定简谐荷载作用下上覆土体饱和度对地基土-隧道系统动力响应的影响。隧道衬砌采用上海地铁盾构隧道结构形式^[4],地基土体上覆土层厚度为5m,地基土体分析类型为砂土,具体参数如表1所示。不同算例土层饱和度取值如表2所示。

表1 算例分析计算参数

Tab.1 Calculation parameters of calculation cases

介质	参数	数值
隧道	E / Pa	5×10^{10}
	ν	0.3
	$\rho_t / \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	2 500
	r_1 / m	3
	h / m	0.25
	d / m	10
空气	β_1	0.03
	K_g / kPa	100
	$\rho_g / \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	1.29
	$\eta_g / \text{Pa} \cdot \text{s}$	15×10^{-6}
水	K_l / GPa	2
	$\rho_l / \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	1 000
	$\eta_l (\text{Pa} \cdot \text{s})$	1×10^{-3}
土颗粒	K_s / GPa	36
	$\rho_s / \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	2 650
	K_b / MPa	43.5
	μ_s / MPa	26.1
土骨架	n_0	0.27
	S_r	0.1~0.999
	S_{w0}	0.05
	γ	S_r
	β_s	0.04
	κ	1×10^{-4}
	φ	27°
	$[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]$	$[5 \times 10^{-4} \ 0.5 \ 2]$

表2 不同算例土层饱和度

Tab.2 Soil saturation of different calculation cases

算例	上覆土		穿越土层
	S_r	$h_1 (\text{m})$	S_r
算例1	1	5	1
算例2	0.9	5	1
算例3	0.7	5	1
算例4	0.9	5	0.9
算例5	0.7	5	0.7

图5给出了隧道仰拱处作用固定简谐荷载时,不同算例土体竖向动位移幅值随荷载激振频率的变

化曲线。由图5可以发现不同算例的响应曲线存在差异。其中由图5a可以发现,案例1、2、3的响应曲线基本相似,由此可得隧道底部响应受上覆土体饱和度影响较少,其主要受隧道穿越土层土体性质的影响。图5b、5c中案例2、3与单一土层的案例1、4、5存在差异,由此可见上覆土体饱和度性质的变化会对地基土体内动力响应产生影响。

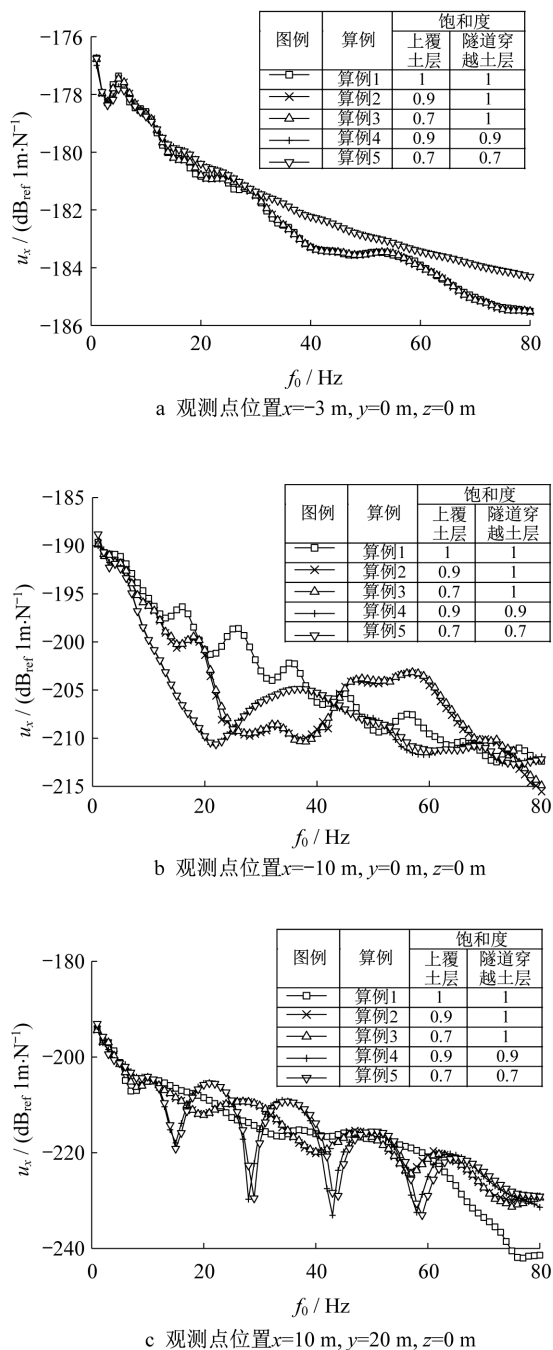


图5 不同位置处位移频响曲线

Fig. 5 Frequency response curves of soil displacement of different positions

为进一步研究上覆土层性质对地表振动位移临界速度的影响,图6给出了移动恒定荷载作用于隧道仰拱处时,地表位置处(10m,0m,0m)以及(10m,20m,0m)不同算例下土体动位移幅值随荷载移动速度的变化曲线。可以发现,土体动位移幅值随荷载移动速度增大,出现峰值现象,即存在土体临界速度。通过对比不同算例临界速度大小发现,上覆土体饱和度的变化对土体临界速度的影响较小。而隧道穿越土层饱和度的变化会引起临界速度的改变,且隧道穿越土层饱和度越小,临界速度越大。

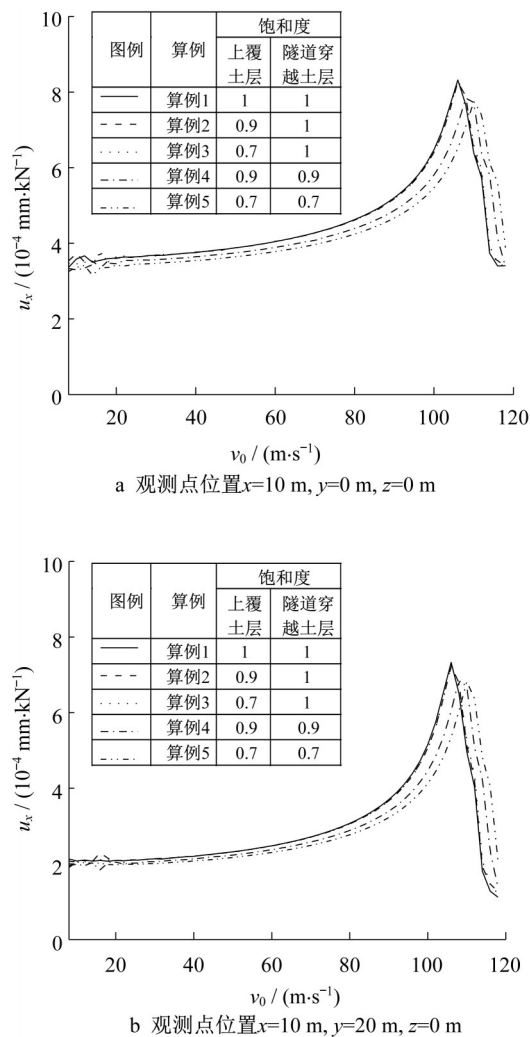


图6 不同算例临界速度对比分析

Fig. 6 Comparative analysis of critical velocity of different calculation cases

5 结论

(1)提出了上覆非饱和层的饱和层状地基隧道系统动力响应的半解析算法。该方法的计算结果与既有的2.5维有限元-边界元法的计算结果吻合较

好,验证了本文方法的正确性。

(2)上覆土体性质的变化对隧道底部动力响应影响较小,但对地表响应影响较大。在进行地铁车致振动响应计算时,有必要考虑上覆非饱和层对系统动力响应的影响。

(3)系统临界速度受上覆土层饱和度的变化影响较小,其主要受隧道穿越土层饱和度的影响,且隧道穿越土层饱和度越小,临界速度越大。

作者贡献说明:

郭慧吉:公式推演,构建模型。
狄宏规:确定文稿,撰写文稿。
周顺华:构思框架,确定文稿。
王炳龙:处理数据,修改文稿。
何超:处理数据,验证模型。

参考文献:

- [1] METRIKINE A V, VROUWENVELDER A C W M. Surface ground vibration due to a moving train in a tunnel: two-dimensional model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 234(1): 43.
- [2] HU A F, LI Y J, DENG Y B, *et al.* Vibration of layered saturated ground with a tunnel subjected to an underground moving load [J]. *Computers and Geotechnics*, 2020. DOI: 10.1016/j.compgeo.2019.103342.
- [3] FORREST J A, HUNT H E M. A three-dimensional model for calculation of train-induced ground vibration[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 294(4/5): 678.
- [4] DI H G, ZHOU S H, LUO Z, *et al.* A vehicle-track-tunnel-soil model for evaluating the dynamic response of a double-line metro tunnel in a poroelastic half-space [J]. *Computers and Geotechnics*, 2018, 101: 245.
- [5] YUAN Z H, BOSTROM A, CAI Y Q. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 387:177.
- [6] HE C, ZHOU S H, DI H G, *et al.* Analytical method for calculation of ground vibration from a tunnel embedded in a multi-layered half-space [J]. *Computers and Geotechnics*, 2018, 99: 149.
- [7] ZHOU S H, HE C, ASCE A M, *et al.* Modelling of vehicle-track-tunnel-soil system considering the dynamic interaction between twin tunnels in a poroelastic half-space [J]. *International journal of geomechanics*, 2020, 20(1): 04019144.
- [8] FREDLVND D G, RAHARDJO H. *Soil mechanics for unsaturated soils* [M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1997.
- [9] 徐明江,魏德敏.非饱和土地基的三维非轴对称动力响应[J]. *工程力学*, 2011,3(28): 78.
XU Mingjiang, WEI Demin. 3D non-axisymmetrical dynamic response of unsaturated soils [J]. *Engineering Mechanics*, 2011,3(28): 78.
- [10] 徐明江,魏德敏,何春保,等.层状非饱和土地基的轴对称稳态动力响应[J]. *岩土力学*, 2011, 32(4): 1113.
XU Mingjiang, WEI Demin, HE Chunbao, *et al.* Axisymmetric steady state dynamic response of layered unsaturated soils[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, 32(4): 1113.
- [11] 郭鹏飞,周顺华,杨龙才等.考虑横向惯性效应的非饱和土中单桩的竖向动力响应. *力学学报*, 2017, 49(2): 344
GUO Pengfei, ZHOU Shunhua, YANG Longcai, *et al.* Analytical solution of the vertical dynamic response of rock-socked pile considering transverse inertial effect in unsaturated soil. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(2): 344
- [12] 狄宏规,郭慧吉,王炳龙等.非饱和全空间埋置隧道动力响应壳柱法半解析模型[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2020, 48(3): 325.
DI Honggui, GUO Huiji, WANG Binglong, *et al.* A semi-analytical shellcylinder model for calculating the dynamic response of a circular tunnel buried in an unsaturated full-space [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2020, 48 (3): 325.
- [13] 郭慧吉,狄宏规,周顺华,等.非饱和土—隧道系统动力响应计算的波函数法[J]. *力学学报*, 2020, 52(2): 591.
GUO Huiji, DI Honggui, ZHOU Shunhua, *et al.* Wave functions method for calculating the dynamic response of atunnel in unsaturated soil [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, 52(2): 591.
- [14] HUSSEIN M F M, FRANCOIS S, Schevenels M. The fictitious force method for efficient calculation of vibration from a tunnel embedded in a multi-layered half-space[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333: 6996.