第49卷第5期
2021年5月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 49 No. 5
May 2021

文章编号：0253-374X(2021)05-0745-06

DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.21018

交叉积$C*$-代数Cuntz半群的性质

杨　君[1,2]，方小春[1]，范庆斋[2]

(1. 同济大学 数学系，上海 200092；2. 上海海事大学 数学系，上海 201306)

摘要：设A是一个无限维的有单位元并且具有k-局部几乎可除性质的(或者是$\mathrm{UCF}P_n(W(A))=m$)的$C*$-代数。α: $G\to \mathrm{Aut}(A)$是有限群G作用在$C*$-代数A上，并且作用具有迹Rokhlin性质。则交叉积$C*$-代数$C*(G,A,\alpha)$具有k-局部几乎可除性质(或者是$\mathrm{UCF}P_n(W(C^*(G,A,\alpha)))=m$)。

关键词：$C*$-代数；迹逼近$C*$-代数；Cuntz半群

中图分类号：O177　　**文献标志码**：A

Some Cuntz Semigroup Properties of Certain Crossed Product $C*$- Algebras

YANG Jun[1,2], *FANG Xiaochun*[1], *FAN Qingzhai*[2]

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Mathematics, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China)

Abstract: Let A be a unital simple $C*$-algebra such that A has the k-locally almost divisible property (or $\mathrm{UCF}P_n(W(A))=m$). Suppose that α: $G\to \mathrm{Aut}(A)$ is an action of a finite group G on A which has the tracial Rokhlin property. Then the crossed product $C*$-algebra $C^*(G,A,\alpha)$ has the k-locally almost divisible property (or $\mathrm{UCF}P_n(W(C^*(G,A,\alpha)))=m$).

Key words: $C*$-algebras; tracial approximation $C*$-algebras; Cuntz semigroup

Connes[1]对于拓扑群作用在von Neumann代数上引入了Rokhlin性质。之后，Herman等[2]对于拓扑群作用在UHF-代数引入了Rokhlin性质，Rordam[3]、Kishimoto[4]对于拓扑群作用在一般的$C*$-代数引入了Rokhlin性质，Phillips[5]对于有限群作用在单的$C*$-代数上引入了迹Rokhlin性质。

本文研究有限群G作用在有单位元单的$C*$-代数上，并且群作用具有迹Rokhlin性质(Phillips提出的)，得到的交叉积$C*$-代数的Cuntz半群的性质的如下结论：

定理1 A是一个无限维有单位元单的具有k-局部几乎可除性质的$C*$-代数。α: $G\to \mathrm{Aut}(A)$是有限群G作用在$C*$-代数A上，并且作用具有迹Rokhlin性质。则交叉积$C*$-代数$C*(G,A,\alpha)$具有k-局部几乎可除性质。

定理2 A是一个无限维有单位元单的满足$\mathrm{UCF}P_n(W(A))=m$的$C*$-代数。α: $G\to \mathrm{Aut}(A)$是有限群G作用在$C*$-代数A上，并且作用具有迹Rokhlin性质。则交叉积$C*$-代数$C*(G,A,\alpha)$满足$\mathrm{UCF}P_n(W(C^*(G,A,\alpha)))=m$。

为了证明上述定理，利用Lin[6]提出的迹逼近$C*$-代数的概念。

设Ω是一类$C*$-代数，则由Ω中的$C*$-代数迹逼近之后得到的$C*$-代数类记为$\mathrm{TA}\,\Omega$。

一个有单位元单的$C*$-代数A属于$\mathrm{TA}\,\Omega$，是指对于任意的$\varepsilon>0$，任意的有限子集$F\subseteq A$，任意的$a\geqslant 0$，存在一个投影$p\in A$和A的$C*$-子代数B满足$1_B=p$并且$B\in\Omega$，使得

(1) 对于任意的$x\in F$，$\|xp-px\|<\varepsilon$。

(2) 对于任意的$x\in F$，$pxp\in_\varepsilon B$。

(3) $1-p$ Murray-von Neumann等价于$\overline{aAa}$中的投影。

准确地说，证明定理1和定理2分为两步。

第一步，证明如下性质能够由Ω类中$C*$-代数遗传到由Ω类中$C*$-代数迹逼近之后得到的$C*$-代数类中，也就是$\mathrm{TA}\,\Omega$中。

(1) k-局部几乎可除性质。

(2) $\mathrm{UCF}P_n(W(A))=m$。

第二步，利用Fan等[7]得到的如下结果：

Ω是一类有单位元的$C*$-代数，Ω类中$C*$-代数

收稿日期：2021-01-11
基金项目：国家自然科学基金(11501357，11871375)
第一作者：杨　君(1981—)，女，讲师，理学博士，主要研究方向为算子理论与算子代数。
E-mail：junyang@shmtu.edu.cn

对于可传的有单位元的C^*-子代数和张量上矩阵代数是封闭的。$A\in \mathrm{TA}\Omega$是一个无限维有单位元单的C^*-代数。$\alpha: G\to \mathrm{Aut}(A)$是有限群$G$作用在$C^*$-代数$A$上,并且作用具有迹Rokhlin性质。则交叉积$C^*$-代数$C^*(G,A,\alpha)$也在$\mathrm{TA}\Omega$中。

由上述两步,可以得到定理1和定理2。本文中证明第二步。

1 预备知识

设A是有单位元的C^*-代数,$\boldsymbol{M}_n(A)$表示A中$n\times n$矩阵全体。$\boldsymbol{M}_\infty(A)$表示$(\boldsymbol{M}_n(A),\varphi_n)$的代数归纳极限。其中$\varphi_n: \boldsymbol{M}_n(A)\to \boldsymbol{M}_{n+1}(A)$是指$a\mapsto \mathrm{diag}(a,0)$。

$\boldsymbol{M}_\infty(A)_+(\boldsymbol{M}_n(A)_+)$表示$\boldsymbol{M}_\infty(A)(\boldsymbol{M}_n(A))$中正元的全体。对于任意的$\boldsymbol{M}_\infty(A)$中正元$a$和$b$用$a\oplus b$表示$\boldsymbol{M}_\infty(A)$中的正元$\mathrm{diag}(a,b)$。对于任意的$a,b\in \boldsymbol{M}_\infty(A)_+$,称$a$ Cuntz子等价于b(记为$\langle a\rangle \leqslant \langle b\rangle$)如果存在$\boldsymbol{M}_\infty(A)$中一列元$(v_n)_{n=1}^{\infty}$使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n b v_n^* - a\|=0$。

称a和b是Cuntz等价的(记为$\langle a\rangle = \langle b\rangle$)如果$\langle a\rangle \leqslant \langle b\rangle$并且$\langle b\rangle \leqslant \langle a\rangle$,其中$\langle a\rangle$为$a$的等价类。

称$W(A)$(:=$\boldsymbol{M}_\infty(A)_+$商掉Cuntz等价类)为$A$的Cuntz半群。容易知道$W(A)$是一个正的部分序半群,定义加法运算为$\langle a\rangle + \langle b\rangle = \langle a\oplus b\rangle$,序运算为$\langle a\rangle \leqslant \langle b\rangle$。

A是稳定有限的C^*-代数,一个正元$a\in A$称为是纯正元,如果满足a不Cuntz等价于一个投影。这等价于0是a的谱点$\sigma(a)$的聚点。

给定$\boldsymbol{M}_\infty(A)_+$中的正元$a$和$\varepsilon>0$,记$(a-\varepsilon)_+$是由函数$f(t)=\max(0,t-\varepsilon)$,$t\in\sigma(a)$通过函数验算,对应于$C^*(a)$中正元,由函数验算知$((a-\varepsilon_1)_+-\varepsilon_2)_+=(a-(\varepsilon_1+\varepsilon_2))_+$。

定理 3[8] A是一个有单位元稳定有限的C^*-代数。

(1) $a,b\in A_+$,对于任意的$\varepsilon>0$,假设$\|a-b\|<\varepsilon$,则存在A中一个压缩的元d使得$(a-\varepsilon)_+=dbd^*$。

(2) a,p是$\boldsymbol{M}_\infty(A)$两个正元,其中p是一个投影。如果$\langle p\rangle \leqslant \langle a\rangle$,则存在$\boldsymbol{M}_\infty(A)$中的正元$s$使得$\langle p\rangle + \langle s\rangle = \langle a\rangle$。

(3)下列等价① $\langle a\rangle \leqslant \langle b\rangle$;②对于任意的$\varepsilon>0$,$\langle (a-\varepsilon)_+\rangle \leqslant \langle b\rangle$;③对于任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得$\langle (a-\varepsilon)_+\rangle \leqslant \langle (b-\delta)_+\rangle$。

(4) a是一个纯正元,对于任意的$\delta>0$,任意的一个非负函数$f\in C_0(0,1]$,满足$\|f\|=1$,且在$(\delta/2,1)$上$f=0$,在$(0,\dfrac{\delta}{2})$上$f>0$,则$f(a)\neq 0$,且$\langle (a-\delta)_+\rangle + \langle f(a)\rangle \leqslant \langle a\rangle$。

定义 1[9] A是有单位元的C^*-代数。$n\geqslant 1$是一个自然数,对任意给定的$x\in W(A)$,$\mathrm{UCFP}_n(W(A))$表示最小的自然数$m>n$,满足对于任意的$W(A)$中给定的元$y_1,y_2,\cdots,y_m$,如果对于任意的$j=1,\cdots,m$,$x\leqslant ny_j$,则得到$x\leqslant y_1+\cdots+y_m$。

定义 2[10] A是有单位元的C^*-代数。$k\geqslant 1$是自然数。称$\langle 1_A\rangle \in W(A)$具有$k$-局部可除性质,是指存在$x_1,x_2,\cdots,x_k\in W(A)$,对于任意的$j$,$mx_j\leqslant \langle 1_A\rangle$,且$\langle 1_A\rangle \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} nx_i$。称$A$具有$k$-局部几乎可除性质,是指对于所有的自然数$m\geqslant 2$,$\langle 1_A\rangle\in W(A)$具有$k$-局部$(m,m+1)$可除性质。

定义 3[5] 设A是一个无限维单的有单位元可分的C^*-代数,$\alpha: G\to \mathrm{Aut}(A)$是有限群$G$作用在$C^*$-代数$A$上。称$\alpha$具有迹Rokhlin性质,是指对于任意的有限子集$F\subset A$,任意的$\varepsilon>0$,任意的正元$b\in A$,对任意的$g\in G$,存在相互垂直的投影$e_g\in A$满足:

(1)对于任意的$g,h\in G$,$\|a_g(e_h)-e_{gh}\|<\varepsilon$。

(2)对于任意的$g\in G$和$d\in F$,$\|e_g d - d e_g\|<\varepsilon$。

(3) $1-e$ Murray-von Neumann等价于由b在A生成的可传C^*-子代数的一个投影。

(4) $\|ebe\|\geqslant \|b\|-\varepsilon$。

引理 1[11] Ω是一类C^*-代数,如果Ω中的C^*-代数对于有单位元可传的C^*-子代数和张量上矩阵代数是封闭的。由Ω中的C^*-代数迹逼近之后得到的C^*-代数类记为$\mathrm{TA}\Omega$,则$\mathrm{TA}\Omega$中的C^*-代数对于有单位元可传的C^*-子代数和张量上矩阵代数是封闭的。

引理 2 A是一个无限维有单位元单的具有k-局部几乎可除性质的C^*-代数(或者$\mathrm{UCFP}_n(W(A))=m$),则A和矩阵代数的张量积,A的有单位元的可传C^*-代数和A具有同样的性质。

证明: 只证明A的有单位的可传C^*-代数具有k-局部几乎可除性质,其他情况或者类似或者是平

凡的。

设$B=PAP$是A的有单位元的可传C^*-代数,只要证明:对于任意的自然数$m\geqslant 2$,存在$x_1,x_2,\cdots,x_k\in W(B)$满足$mx_j\leqslant\langle p\rangle$,且$\langle p\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{k}(m+1)x_i$,由于$A$具有$k$-局部可除性质,因此存在$y_1,y_2,\cdots,y_k\in W(A)$满足$my_j\leqslant\langle 1_A\rangle$且$\langle 1_A\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{k}(m+1)y_j$,取$x_i=py_ip$,$i=1,2,\cdots,k$,则$mx_i\leqslant\langle p\rangle$,$\langle p\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{k}(m+1)x_i$。

2　主要结果

定理4　Ω是稳定有限有单位元的C^*-代数类。对于任意的$B\in\Omega$,$\mathrm{UCFP}_n(W(B))=m$。则对于任意有单位元单C^*-代数$A\in\mathrm{TA}\Omega$,$\mathrm{UCFP}_n(W(A))=m$。

证明:对于任意的$\varepsilon>0$,任意的$1\leqslant i\leqslant m$,如果$<a>\leqslant n<b_i>$,只要证明$<(a-2\varepsilon)_+>\leqslant<b_1>+<b_2>+\cdots+<b_m>$即可。

证明这个定理分为三步。

第一步,假设a和所有的$b_i(1\leqslant i\leqslant m)$都不是纯正元。

由于$a,b_i(1\leqslant i\leqslant m)$,都不是纯正元,因此$a$ Cuntz等价于某个投影q,b_i Cuntz等价于投影$p_i(1\leqslant i\leqslant m)$。不妨设$a=q$,$b_i=p_i$,$1\leqslant i\leqslant m$,同时不妨设$p_i$和$p_j$相互垂直。

对于$F=\{q,p_1,\cdots,p_m\}$,任意的$\varepsilon'>0$,由于$A\in\mathrm{TA}\Omega$,存在A的C^*-子代数B和一个非零的投影$p\in A$,满足$B\in\Omega$和$1_B=p$,使得

(1) 对于任意的$x\in F$,$\|xp-px\|<\varepsilon'$。

(2) 对于任意的$x\in F$,$pxp\in_{\varepsilon'}B$。

由(1)和(2),存在投影$q',p_1',\cdots,p_m'\in B$,和$q'',p_1'',\cdots,p_m''\in(1-p)A(1-p)$,满足

$$\|q-q'-q''\|<3\varepsilon'$$

$$\|p_i-p_i'-p_i''\|<3\varepsilon',1\leqslant i\leqslant m$$

对于任意的$1\leqslant i\leqslant m$,由于$<q>\leqslant n<p_i>$,因此得到$<q'>\leqslant n<p_i'>$和$<q''>\leqslant n<p_i''>$。由于$B\in\Omega$,且$\mathrm{UCFP}_n(W(B))=m$,因此得到$<q'>\leqslant<p_1'>+\cdots+<p_m'>$。断言存在非零的投影$r\in A$,使得$<q'>+<r>\leqslant<p_1'>+\cdots+<p_m'>$,否则$q'\sim p_1'+\cdots+p_m'$,并且$<q'>\leqslant n<p_i'>$,对于任意的$1\leqslant i\leqslant m$,$<p_1'>+\cdots+<p_m'>\leqslant n<p_i'>$,因此$m<p_1'+\cdots+p_m'>\leqslant n<p_1'+\cdots+p_m'>$,由于$m>n$,这与$A$是稳定有限的$C^*$-代数矛盾。

对于$F=\{q'',p_1'',\cdots,p_m''\}$,任意的$\varepsilon''>0$,由于$(1-p)A(1-p)\in\mathrm{TA}\Omega$,存在一个$(1-p)A(1-p)$的$C^*$-子代数$D$和一个非零的投影$s\in(1-p)A(1-p)$,满足$D\in\Omega$和$1_D=s$,使得

① 对于任意的$x\in F$,$\|xs-sx\|<\varepsilon''$。

② 对于任意的$x\in F$,$sxs\in_{\varepsilon''}B$。

③ $<1-p-s>\leqslant<r>$。

由①和②,存在$q''',p_1''',\cdots,p_m'''\in B$和$q'''',p_1'''',\cdots,p_m''''\in(1-p-s)A(1-p-s)$,满足

$$\|q''-q'''-q''''\|<3\varepsilon'$$

$$\|p_i''-p_i'''-p_i''''\|<3\varepsilon',1\leqslant i\leqslant m$$

对于任意的$1\leqslant i\leqslant m$,由于$<q''>\leqslant n<p_i''>$,因此$<q'''>\leqslant n<p_i'''>$。由于$\mathrm{UCFP}_n(W(D))=m$,所以得到$<q'''>\leqslant<p_1'''>+\cdots+<p_m'''>$。

最后得到

$$<q>=<q'+q'''+q''''>\leqslant$$
$$<q'>+<q'''>+<1-p-s>\leqslant$$
$$<q'>+<q'''>+<r>\leqslant$$
$$<p_1'>+\cdots+<p_m'>+<p_1'''>+\cdots+<p_m'''>\leqslant$$
$$<p_1>+\cdots+<p_m>$$

第二步,对于某个$1\leqslant i\leqslant m$,b_i是纯正元。不妨假设b_1是一个纯正元。同时不妨设$b_ib_j=0$,$1\leqslant i,j\leqslant m$。由于$<a>\leqslant n<b_i>$,由定理3知,对于任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使得$<a-\varepsilon>_+\leqslant n<b_1-\delta>_+$。

不妨假设$3\delta<\varepsilon$,则存在$v_k=(v_{i,j}^k)$,$1\leqslant k\leqslant m$,$1\leqslant i,j\leqslant n$,使得

$v_1(\mathrm{diag}((b_1-\delta)_+,\cdots,(b_1-\delta)_+)v_0^*=\mathrm{diag}(a-\varepsilon)_+,0,\cdots,0)$

$v_1(\mathrm{diag}(b_i,\cdots,b_i))v_i^*=\mathrm{diag}((a-\varepsilon)_+,0,\cdots,0)$,$2\leqslant i\leqslant m$

由定理3,存在一个非零正元d使得$<b_1-\delta>_++<d>\leqslant<b_1>$。

对于$F=\{a,b_1,\cdots b_n,d,v_{i,j}^k,1\leqslant i,j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant m\}$,任意的$\varepsilon''>0$,由于$A\in\mathrm{TA}\Omega$,存在$A$的$C^*$-子代数$B$和一个非零的投影$p\in A$,满足$B\in\Omega$和$1_B=p$,使得

(1) 对于任意的$x\in F$,$\|xp-px\|<\varepsilon''$。

(2) 对于任意的$x\in F$,$pxp\in_{\varepsilon''}B$。

(3) $\langle 1-p\rangle<\langle d\rangle$。

由(1)和(2)知,存在$a',b_1',\cdots,b_n',v_{i,j}^{k'}\in B$,$1\leqslant i,j\leqslant n$,$1\leqslant k\leqslant m$, 和$a'',b_1'',\cdots,b_n'',v_{i,j}^{k''}\in(1-p)A(1-p)$使得

$$\|a-a'-a''\|<3\varepsilon''$$

$$\|b_i-b_i'-b_i''\|<3\varepsilon'',1\leqslant i\leqslant m$$

$$\|v_{i,j}^k-v_{i,j}^{k'}-v_{i,j}^{k''}\|<3\varepsilon'',1\leqslant i,j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant m$$

记 $v_k'=(v_{i,j}^{k'})\in \boldsymbol{M}_n(B)$, $v_k''=(v_{i,j}^{k''})\in \boldsymbol{M}_n((1-p)A(1-p))$,则有

$$\|v_1'(\mathrm{diag}((b_1'-\delta)_+,\cdots,(b_1'-\delta)_+))v_1'^*-\mathrm{diag}((a'-\varepsilon)_+,0,\cdots,0)\|<3n^2\varepsilon''$$

$$\|v_i'(\mathrm{diag}((b_i',\cdots,b_i'))v_i''^*-\mathrm{diag}((a''-\varepsilon)_+,0,\cdots,0)\|<3n^2\varepsilon'',2\leqslant i\leqslant m$$

由定理3,得到

$$\langle(a'-\varepsilon-3n^2\varepsilon'')_+\rangle\leqslant n\langle(b_1'-\delta)_+\rangle$$

$$\langle(a'-\varepsilon-3n^2\varepsilon'')_+\rangle\leqslant n\langle b_j'\rangle,2\leqslant i\leqslant m$$

由于$B\in\Omega$,因此,

$$\langle(a'-\varepsilon-3n^2\varepsilon')_+\rangle\leqslant\langle(b_1'-\delta)_+\rangle+\langle b_2'\rangle+\cdots+\langle b_m'\rangle$$

最后得到

$$\begin{aligned}&\langle(a-2\varepsilon)_+\rangle\leqslant\\&\langle(a-\varepsilon-3\varepsilon''-3n^2\varepsilon'')_+\rangle\leqslant\\&\langle(a'-\varepsilon-3n^2\varepsilon'')_+\rangle+\langle a''\rangle\leqslant\\&\langle(a'-\varepsilon-3n^2\varepsilon'')_+\rangle+\langle d\rangle\leqslant\\&\langle(b_1'-\delta)_+\rangle+\langle d\rangle+\\&\langle b_2'\rangle+\cdots+\langle b_n'\rangle\leqslant\\&\langle b_1\rangle+\langle b_2\rangle+\cdots+\langle b_n\rangle\end{aligned}$$

第三步,假设所有的$b_i(1\leqslant i\leqslant m)$都不是纯正元,$a$是一个纯正元。由于$b_i(1\leqslant i\leqslant m)$都不是纯正元,因此存在投影$p_1,\cdots,p_m$,对于任意的$1\leqslant i\leqslant m$,$b_i$ Cuntz等价于p_i。不妨假设对于任意的$1\leqslant i\leqslant m$,$b_i=p_i$。

由定理3,存在一个非零的正元d使得$\langle(a-\delta)_+\rangle+\langle d\rangle\leqslant\langle a\rangle$。

由于$\langle a\rangle\leqslant n\langle p_i\rangle$,因此对于任意的$1\leqslant i\leqslant m$,$\langle(a-\delta)_+\rangle+\langle d\rangle\leqslant n\langle p_i\rangle$。

因此存在$v_k=(v_{i,j}^k)\in\boldsymbol{M}_n(A)$,$1\leqslant k\leqslant m$,$1\leqslant i,j\leqslant n$满足

$$v_i(\mathrm{diag}(p_i,\cdots,p_i))v_i^*=\mathrm{diag}((a-\delta)_++d),0,\cdots,0)\quad 1\leqslant i\leqslant m$$

对于$F=\{a,b_1,\cdots,b_n,d,v_{i,j}^k,1\leqslant i,j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant m\}$,和$\varepsilon'>0$,由于$A\in TA\Omega$,存在$A$的$C^*$-子代数$B$和一个非零的投影$p\in A$,满足$B\in\Omega$和$1_B=p$,使得

(1) 对于任意的$x\in F$,$\|xp-px\|<\varepsilon'$。

(2) 对于任意的$x\in F$,$pxp\in_{\varepsilon'}B$。

由(1)和(2)知,存在$a',p_0',p_1',\cdots,p_n',v_{i,j}^{k'}\in B$,$1\leqslant i,j\leqslant n$,$1\leqslant k\leqslant m$, 和 $a'',p_1'',\cdots,p_n'',v_{i,j}^{k''}\in(1-p)A(1-p)$使得

$$\|a-a'-a''\|<3\varepsilon'$$

$$\|d-d'-d''\|<3\varepsilon'$$

$$\|p_i-p_i'-p_i''\|<3\varepsilon'',1\leqslant i\leqslant m$$

$$\|v_{i,j}^k-v_{i,j}^{k'}-v_{i,j}^{k''}\|<3\varepsilon'',1\leqslant i,j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant m$$

记 $v_k'=(v_{i,j}^{k'})\in\boldsymbol{M}_n(B)$, $v_k''=(v_{i,j}^{k''})\in\boldsymbol{M}_n((1-p)A(1-p))$,则有

$$\|v_i'(\mathrm{diag}(p_i',\cdots,p_i'))v_i'^*-\mathrm{diag}((a''-\delta)_++d'),0,\cdots,0)\|<3n^2\varepsilon'$$

$$\|v_i''(\mathrm{diag}(p_i'',\cdots,p_i''))v_i''^*-\mathrm{diag}((a''{}'-\delta)_++d'',0,\cdots,0)\|<3n^2\varepsilon'\quad 1\leqslant i\leqslant m$$

由定理3,得到

$$\langle(a'-\delta-3n^2\varepsilon')_++d'\rangle\leqslant n\langle p_i'\rangle$$

由于$B\in\Omega$,因此

$$\langle(a'-3n^2\varepsilon'-\delta)_+\rangle+\langle d'\rangle\leqslant\langle p_1'\rangle+\cdots+\langle p_m'\rangle$$

对于$G=\{a'',p_1'',\cdots p_k'',d',v_{i,j}^{k''},1\leqslant i,j\leqslant n,1\leqslant k\leqslant m\}$,任意的$\varepsilon''>0$,由于$A\in \mathrm{TA}\,\Omega$,存在$A$的$C^*$-子代数$C$和一个非零的投影$r\in A$,满足$C\in\Omega$和$1_c=r$,使得

① 对于任意的$x\in G$,$\|xr-rx\|<\varepsilon''$。

② 对于任意的$x\in G$,$rxr\in_{\varepsilon''}C$。

③ $\langle 1-r\rangle\leqslant\langle d'\rangle$。

由①和②知,存在$a''',p_1''',\cdots,p_n''',v_{i,j}^{k'''}\in B$,$1\leqslant i,j\leqslant n$,$1\leqslant k\leqslant m$, 和 $a'''',p_1'''',\cdots,p_n'''',v_{i,j}^{k''''}\in(1-r)A(1-r)$,使得

$$\|a'' - a''' - a''''\| < 3\varepsilon''$$

$$\|p_i'' - p_i''' - p_i''''\| < 3\varepsilon'', 1 \leqslant i \leqslant m$$

$$\|v_{i,j}^{k''} - v_{i,j}^{k'''} - v_{i,j}^{k''''}\| < 3\varepsilon'', 1 \leqslant i, j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant m$$

记　$v_k''' = (v_{i,j}^{k'''}) \in \boldsymbol{M}_n(C)$,　$v_k'''' = (v_{i,j}^{k''''}) \in \boldsymbol{M}_n((1-r)A(1-r))$,其中$1 \leqslant i, j \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant m$,则有

$$\|v_1'''(\mathrm{diag}((p_i''', \cdots, p_i''')) v_i'''^* - \mathrm{diag}((a''' - \delta)_+ + d''', 0, \cdots, 0)\| < 6n^2\varepsilon''$$

$$\|v_1'''(\mathrm{diag}((p_i'''', \cdots, p_i'''')) v_i''''^* - \mathrm{diag}((a'''' - \delta)_+ + d'''', 0, \cdots, 0)\| < 6n^2\varepsilon''$$

由定理3知,对任意的$1 \leqslant i \leqslant m$,

$$<(a''' - \delta - 6n^2\varepsilon'')_+ + d''' > \leqslant n < p_i''' >$$

由于$C \in \Omega$,因此

$$<(a''' - \delta - 6n^2\varepsilon'')_+ > + < d''' > \leqslant < p_1''' > + \cdots + < p_n''' >$$

最后得到

$$\begin{aligned} &<(a - 2\varepsilon)_+ > \leqslant \\ &<(a - \delta - 4\varepsilon'' - 9n^2\varepsilon'')_+ > \leqslant \\ &<(a' - \delta - 3n^2\varepsilon'')_+ > + \\ &<(a''' - \delta - 6n^2\varepsilon'')_+ > + < a'''' > \leqslant \\ &<(a' - \delta - 3n^2\varepsilon'')_+ > + \\ &< d' > + <(a''' - \delta - 6n^2\varepsilon'')_+ > \leqslant \\ &< p_1' > + \cdots + < p_n' > + < d > + \\ &<(a''' - \delta - 6n^2\varepsilon'')_+ > \leqslant \\ &< p_1' > + \cdots + < p_n' > + < p_1''' > + \cdots + < p_n''' > \leqslant \\ &< p_1 > + \cdots + < p_n > \end{aligned}$$

定理 5[7]　Ω是一类有单位元的C^*-代数,Ω对于有单位元的可传C^*-子代数和张量上一个矩阵代数是封闭的。$A \in \mathrm{TA}\,\Omega$是一个无限维的单的有单位元的$C^*$-代数。$\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$是有限群$G$作用在$C^*$-代数$A$上,并且作用具有迹Rokhlin性质。则交叉积代数$C^*(G, A, \alpha)$也在$\mathrm{TA}\,\Omega$中。

下面证明定理2。

证明:由引理2、定理4和定理5可以得到。

定理 6　Ω是一类有单位元稳定有限的C^*-代数,对于任意的$B \in \Omega$,B具有k-局部几乎可除性质。则对于任意的单的有单位元的C^*-代数$A \in \mathrm{TA}\Omega$,A具有k-局部几乎可除性质。

证明:需要证明存在$x_1, x_2, \cdots, x_k \in \boldsymbol{M}_\infty(A)_+$,使得对于任意的$1 \leqslant j \leqslant k$,任意的$2 \leqslant m$,$< x_j \oplus x_j \oplus \cdots \oplus x_j > \leqslant < 1_A >$,且$< 1_A > \leqslant < \oplus_{i=1}^k (x_i \oplus \cdots \oplus x_i) >$,其中$x_j$重复$m$次,$x_i$重复$m+1$次。

对于$F = \{1_A\}$,由于$A \in \mathrm{TA}\Omega$,存在A的C^*-子代数B和一个非零的投影$p \in A$,满足$B \in \Omega$和$1_B = p$。由于$p \in B$和$B \in \Omega$,存在$x_1', x_2', \cdots, x_k' \in \boldsymbol{M}_\infty(B)_+$,使得$< p > \leqslant < \oplus_{i=1}^k (x_i' \oplus \cdots \oplus x_i') >$,$< x_j' \oplus \cdots \oplus x_j' > \leqslant < p >$,其中其中$x_j'$重复$m$次,$x_i'$重复$m+1$次。

证明这个定理分三步。

第一步,假设$x_1', x_2', \cdots, x_k' \in \boldsymbol{M}_\infty(B)_+$都是投影,并且假设$p \sim \oplus_{i=1}^k (x_i' \oplus \cdots \oplus x_i')$,其中$x_i'$重复$m+1$次。则存在一个非零投影$q$使得$<(x_j' \oplus q) \oplus (x_j' \oplus q) \oplus \cdots \oplus (x_j' \oplus q) > \leqslant < p >$,其中$x_j' \oplus q$重复$m$次。

对于$F = \{1 - p\}$,由于$(1-p)A(1-p) \in \mathrm{TA}\,\Omega$,存有$(1-p)A(1-p)$的$C^*$-子代数$D$和一个非零投影$t \in (1-p)A(1-p)$,满足$D \in \Omega$和$1_D = t$,使得$< 1 - r - t > \leqslant < q >$。

由于$t \in D$和$D \in \Omega$,因此存在$x_1'', x_2'', \cdots, x_k'' \in \boldsymbol{M}_\infty(D)_+$,使得$< x_j'' \oplus x_j'' \oplus \cdots \oplus x_j'' > \leqslant < t >$和$< t > \leqslant < \oplus_{i=1}^k (x_i'' \oplus \cdots \oplus x_i'') >$,其中$x_j''$重复$m$次,$x_i''$重复$m+1$次。

因此得到

$$\begin{aligned} &<((x_j' \oplus q) + x_j'') \oplus ((x_j' \oplus q) + x_j'') \oplus \cdots \oplus ((x_j' \oplus q) + \\ &x_j'') > \leqslant < p > + < 1 - p - t > + < t > = \\ &< 1_A > \leqslant < p > \oplus < q > + < t > \leqslant \\ &< \oplus_{i=1}^k ((x_j' \oplus q) \oplus \cdots \oplus (x_j' \oplus q)) > + \\ &< \oplus_{i=1}^k (x_i'' \oplus \cdots \oplus x_i'') > \leqslant < \oplus_{i=1}^k (((x_j' \oplus q) + \\ &x_j'') \oplus ((x_j' \oplus q) + x_j'') \oplus \cdots \oplus ((x_j' \oplus q) + x_j'')) > . \end{aligned}$$

第二步,假设$x_1', x_2', \cdots, x_k' \in \boldsymbol{M}_\infty(B)_+$都是投影,且$< p > < < \oplus_{i=1}^k (x_i' \oplus \cdots \oplus x_i') >$,其中$x_i'$重复$m+1$次。则存在非零投影$s$,使得$< p > + < s > \leqslant < \oplus_{i=1}^k (x_i' \oplus \cdots \oplus x_i') >$。

对于$F = \{1 - p\}$,由于$(1-p)A(1-p) \in \mathrm{TA}\,\Omega$存有$(1-p)A(1-p)$的$C^*$-子代数$D$和一个非零投影$t \in (1-p)A(1-p)$,满足$D \in \Omega$和$1_D = t$,使得$< 1 - r - t > \leqslant < s >$。

由于$t \in D$和$D \in \Omega$,因此存在$x_1'', x_2'', \cdots, x_k'' \in \boldsymbol{M}_\infty(D)_+$,使得$< x_j'' \oplus x_j'' \oplus \cdots \oplus x_j'' > \leqslant < t >$和$< t > \leqslant < \oplus_{i=1}^k (x_i'' \oplus \cdots \oplus x_i'') >$,其中$x_j''$

重复m,x_i''重复$m+1$次。

因此得到

$$<(x_j'+x_j'')\oplus(x_j'+x_j'')\oplus\cdots\oplus(x_j'+x_j'')>\leqslant$$
$$<p>+<1-p-t>+<t>=<1_A>\leqslant$$
$$<p\oplus s>+<t>\leqslant<\oplus_{i=1}^{k}(x_j'\oplus\cdots\oplus x_j')>+$$
$$<\oplus_{i=1}^{k}(x_i''\oplus\cdots\oplus x_i'')>\leqslant$$
$$<\oplus_{i=1}^{k}(((x_j'\oplus x_j'')\oplus(x_j'+x_j'')\oplus\cdots\oplus(x_j'+x_j'')))>$$

第三步,假设$x_1',x_2',\cdots,x_k'$中存在一个纯正元,不妨设x_1'是纯正元。由于$<p>\leqslant<\oplus_{i=1}^{k}(x_i'\oplus\cdots\oplus x_i')>$,对于任意的$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,满足

$$<p>=<(p-\varepsilon)_+>\leqslant<(x_1'-\delta)_+\oplus(x_1'-\delta)_+\cdots\oplus(x_1'-\delta)_+\oplus_{i=2}^{k}(x_i'\oplus\cdots\oplus x_i')>$$

其中$(x_1'-\delta)_+$和x_1'重复$m+1$次。

由定理3,存在一个非零的正元d,使得$<(x_1'-\delta)_+>+<d>\leqslant<x_1'>$。

对于$F=\{1-p\}$,由于$(1-p)A(1-p)\in\mathrm{TA}\Omega$,存有$A$的$C^*-$子代数$D$和一个非零投影$t\in(1-p)A(1-p)$,满足$D\in\Omega$和$1_D=t$,使得$<1-r-t>\leqslant<d>$。

由于$t\in D$和$D\in\Omega$,因此存在$x_1'',x_2'',\cdots,x_k''\in\boldsymbol{M}_\infty(D)_+$,使得$<x_j''\oplus x_j''\oplus\cdots\oplus x_j''>\leqslant<t>$和$<t>\leqslant<\oplus_{i=1}^{k}(x_i''\oplus\cdots\oplus x_i'')>$,其中$x_j''$重复$m$次,$x_i''$重复$m+1$次。

因此得到

$$<(x_j''+x_j')\oplus(x_j''+x_j')\oplus\cdots\oplus(x_j''+x_j')>\leqslant<p>+<1-p-t>+<t>=<1_A>\leqslant<p\oplus d>+<t>\leqslant<(x_1'-\delta)_+\oplus(x_1'-\delta)_+\oplus\cdots\oplus(x_1'-\delta)_+\oplus d\oplus_{i=2}^{k}(x_i'\oplus\cdots\oplus x_i')>+<\oplus_{i=1}^{k}(x_i''\oplus\cdots\oplus x_i'')>\leqslant<\oplus_{i=1}^{k}((x_j'\oplus x_j'')\oplus(x_j'+x_j'')\oplus\cdots\oplus(x_j'+x_j''))>$$

下面给出定理1的证明。

证明:由引理2,定理5和定理6可以得到。

作者贡献说明:

杨　君:具体撰写论文。

方小春:提出研究选题。

范庆斋:参与讨论研究。

参考文献:

[1] CONNES A. Out conjugacy class of automorphisms of factors [J]. Ann Sci Ecole Norm, 1975,8: 383.

[2] HERMAN R, OCNEANU A. Stability for integer actions on UHF C*-algebras [J]. J Funct Anal, 1984,59: 132.

[3] RORDAM M. Classification of certain infinite simple C*-algebras algebras [J]. J Funct Anal, 1995,131:415.

[4] KISHIMOTO A. The Rohlin property for shifts on UHF algebras [J]. J Reine Angew Math, 1995, 465 : 183.

[5] PHILLIPS N C. The tracial Rokhlin property for actions of finite groups on C*-algebras algebras [J]. Amer J Math, 2011, 133: 581.

[6] LIN H X. The tracial topological rank of C*-algebras algebras [J]. Proc London Math Soc, 2001,83 : 199.

[7] FAN Q Z, FANG X C. Crossed products by finite group actions with certain tracial Rokhlin property [J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2018,38: 829.

[8] ARA P, PERERA F, TOMS A. Aspects of operator algebras and applications [M]. Providence: Amer Math Soc, 2011.

[9] ORTEGA E, RORDAM M, THIEL H. The Cuntz semigroup and comparison of open projections [J]. J Funct Anal, 2011, 260: 3474.

[10] CHRISTENSEN M S. Regularity of C*-algebras and central sequence algebras [D]. Copenhagen: University of Copenhagen, 2017.

[11] LLIOTT G A, NIU Z. On tracial approximation [J]. J Funct Anal, 2008,254: 396.